С. И. Шохоръ-Троцкій.

ГЕОМЕТРІЯ на ЗАДАЧАХЪ

(ОСНОВНОЙ КУРСЪ).

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ:

а) элементарныхъ школъ съ продолжительнымъ курсомъ, б) низшихъ и среднихъ классовъ средне-учебныхъ заведеній, в) профессіональныхъ школъ и курсовъ и т п

(400 политипажей въ текстѣ)

Изданіе 2-е, исправленное

Курсъ основанъ на методическихъ упражненіяхъ въ геометрическомъ черченіи и въ изготовленіи моделей учащимися — Доказательства теоремъ вводятся по мѣрѣ возникновенія потребности въ нихъ у учащихся.

МОСКВА — 1913.

Изданіе Т-ва И. Д. Сытина

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр

Предисловіе ко второму изданію.

Настоящее изданіе этой книги отличается отъ перваго ея изданія значительными исправленіями и тѣмъ, что оно снабжено „Алфавитнымъ указателемъ“.

Книга эта, вмѣстѣ съ книгою для учащихся, разсчитана на такую конструкцію курса геометріи, которая имѣетъ въ виду только два цикла этого курса. основной и систематизаціонный Основной курсъ при этомъ является въ полной мѣрѣ пропедевтическимъ

Жизнь показала однако же, что школы съ непродолжительнымъ курсомъ тоже нуждаются въ нѣкоторомъ, то переплетающемся съ курсомъ ариѳметики (площади, объемы), то болѣе или менѣе самостоятельномъ, геометрическомъ учебномъ матеріалѣ, притомъ значительно меньшемъ, чѣмъ основной курсъ геометріи, который является въ то же время полнымъ ея курсомъ Низшіе классы (приготовительные, первый и второй) тѣхъ среднихъ учебныхъ заведеній, въ которыхъ не проходится основной курсъ геометріи, безъ сомнѣнія, тоже нуждаются въ такомъ же незначительномъ геометрическомъ циклѣ знаній, какъ и начальныя школы Особенно важенъ элементарный (первый) циклъ необходимѣйшихъ геометрическихъ знаній, понятій и навыковъ для успѣшнаго усвоенія учащимися, на низшей ступени, свѣдѣній изъ другихъ областей знанія (ариѳметики, алгебры, географіи, міровѣдѣнія), а также для тѣхъ учащихся, которые почему-либо не въ состояніи закончить полнаго курса средней школы.

новѣйшихъ взглядовъ на преподаваніе математики Противъ этого примирительнаго направленія, однакоже, такой авторитетный ученый и знатокъ школы, какъ Эмиль Борель, приводитъ то соображеніе, что не только способы преподаванія, но и самое содержаніе математики, какъ учебнаго предмета, должны быть кореннымъ образомъ измѣнены.

Ступени курса математики.

Новое направленіе въ преподаваніи математики прежде всего предполагаетъ раздѣленіе курса на ступени Первая ступень для малолѣтнихъ учащихся должна имъ дать наиболѣе необходимое изъ области математики Въ области геометрическаго знанія она содержитъ примитивныя упражненія, относящіяся до прямой, окружности, угловъ, треугольниковъ, площадей и объемовъ Вторая ступень является все еще экспериментальною фазою усвоенія учениками болѣе или менѣе закругленнаго цикла математическаго знанія Только третья стремится къ систематизаціи знанія и дополненію его новыми идеями и взглядами Первая и вторая ступени чаще всего требуютъ примѣненія той методы, которая извѣстна подъ именемъ „лабораторнаго способа" преподаванія математики Но не слѣдуетъ смѣшивать этого хотя предварительнаго, но въ то же время полнаго курса съ тѣмъ, который называется пропедевтическимъ и который доселѣ никогда не обнималъ и не можетъ обнимать всего учебнаго математическаго матеріала, входящаго въ составъ основного курса — Нельзя, впрочемъ, въ интересахъ справедливости, умолчать о томъ, что такъ называемый пропедевтическій курсъ геометріи сыгралъ нѣкоторую роль въ возникновеніи новаго направленія въ преподаваніи математики

Условія обученія на первыхъ двухъ ступеняхъ

Держась новаго направленія, надо стремиться къ слѣдующему учебный матеріалъ долженъ отличаться прежде всего должной простотой и постепенностью въ переходѣ отъ простого къ болѣе сложному, пріемы обученія должны отличаться наглядностью и возбуждать истинный и неослабный интересъ учениковъ къ учебному матеріалу, самодѣятельность учениковъ должна стоять на первомъ планѣ, начинаться всякая работа должна съ соотвѣтствующаго и цѣлесообразнаго чувственнаго воспріятія, и только отъ чувственныхъ воспріятій ученики должны переходить къ соотвѣтствующимъ яснымъ и вѣрнымъ представленіямъ и точнымъ понятіямъ, по мѣрѣ ихъ естественнаго возникновенія въ умѣ учащихся На почвѣ реальнаго и конкретнаго матеріала должны возникнуть чисто-логическая обработка его, доказательство того, что въ данный моментъ нуждается въ доказательствѣ, обобщенія и идеи разнаго рода и своевременная систематизація и дополненіе учебнаго матеріала Этотъ путь вполнѣ согласуется съ современными требованіями психологіи и въ состояніи придать занятіямъ учениковъ истинный интересъ, возбудить ихъ дѣйствительную любознательность, доставить имъ достаточно случаевъ для ея удовлетворенія и для сопутствующихъ ей пріятныхъ чувствованій высшаго порядка Таковы радость ученика по поводу сдѣланнаго имъ наблюденія, или „открытія“, по поводу обогащенія имъ своего ума новымъ знаніемъ, пріятное изумленіе его по поводу полученнаго имъ результата, пріятное сознаніе своихъ силъ, удовольствіе по поводу хорошо сдѣланной работы и т п Этотъ путь какъ бы предчувствовали и старались, по мѣрѣ силъ и возможности, обосновать такіе педагоги-мечтатели, какъ Коменскій, Руссо, Песталоцци Но болѣе или менѣе полное осуществленіе его на практикѣ стало возможно только въ концѣ XIX и въ началѣ XX вѣковъ

Чему не учать на урокахъ геометріи? Чему почти никогда не учатъ и не учили на урокахъ геометріи? Ученикъ, приступая къ занятіямъ геометріей, почти никогда въ жизни не употреблялъ чертежныхъ инструментовъ и никогда въ жизни не начертилъ съ ихъ помощью (т.-е. съ помощью линейки, циркуля, масштаба, чертежнаго треугольника) ни одной геометрической фигуры Онъ путемъ опыта не постарался уяснить и не вполнѣ себѣ уяснилъ, что треугольники дѣйствительно бываютъ разныхъ родовъ (разносторонніе, равнобедренные, равносторонніе, прямоугольные, тупоугольные и остроугольные, совершенно сходные по формѣ и различные, плоскіе и сферическіе) Чѣмъ, въ такомъ случаѣ, являются для него многочисленныя и какъ бы съ неба свалившіяся на его голову теоремы. о подобіи треугольниковъ, о равнобедренныхъ треугольникахъ, о треугольникахъ прямоугольныхъ. о правильныхъ многоугольникахъ и т д? Эти теоремы являются только навязаннымъ ему извнѣ матеріаломъ, которыи надо усвоить преимущественно памятью, въ которомъ надо запомнить прежде всего извѣстный рядъ словъ, затѣмъ — извѣстный чертежъ, извѣстный рядъ буквъ на чертежѣ, извѣстный рядъ формулъ, равенствъ. неравенствъ и т. д Много ли учениковъ, при современной постановкѣ преподаванія математики, имѣли случай попробовать изъ двухъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ какого-нибудь прямоугольнаго треугольника, составить одинъ квадратъ и убѣдиться воочію, что этотъ квадратъ тождественъ съ квадратомъ, построеннымъ на гипотенузѣ того же треугольника? Результатомъ такой постановки дѣла является то, что Пиѳагорова теорема не говоритъ ученику о томъ, что онъ здѣсь имѣетъ дѣло съ достопримѣчательнымъ, чтобы не сказать — удивительнымъ, фактомъ Современный курсъ математики вообще лишенъ возможности внушать ученикамъ удивленіе передъ человѣческимъ умомъ, могущимъ добраться до запрятанныхъ въ геометрическія фигуры и формулы истинъ, обладающихъ цѣнностью истинъ непреходящихъ, непреложныхъ, вѣчныхъ Безъ этого возвышающаго душу чувствованія не велико и воспитательное значеніе обученія математикѣ

Равнодушіе учениковъ къ предмету

Учащіе иногда огорчаются и даже раздражаются по поводу явнаго равнодушія учениковъ своихъ, напр., къ тому, что площадь треугольника равняется основанію его, помноженному непремѣнно на *половину* его высоты, а не на всю высоту, или по поводу ихъ равнодушія къ тому, что въ одномъ случаѣ непремѣнно надо *периметръ* основанія правильной пирамиды помножать на половину *апоөемы*, а во многихъ другихъ случаяхъ — *площадь* основанія на одну треть *высоты* и т. п. Ученики относятся совершенно равнодушно и къ тому, что въ одномъ случаѣ надо брать $2\pi R$, въ другомъ — πR^2, а въ третьемъ — $4\pi R^2$, и учитель (особенно начинающій) за это на нихъ сердится и по этому поводу приходитъ въ уныніе, если онъ не принадлежитъ къ числу тѣхъ учителей, которые считаютъ возможнымъ „добиваться“ должныхъ результатовъ путемъ „отмѣтокъ“ или другихъ наказаній. Но это равнодушіе учениковъ къ насильственно, извнѣ навязываемому имъ учебному математическому матеріалу прямо неизбѣжно, если ученикъ никогда не дѣлалъ измѣреній, никогда не выполнялъ болѣе или менѣе точныхъ чертежей. Учащіеся не могутъ иначе относиться къ этому матеріалу, если они всегда должны стоять только на зыбкой для нихъ почвѣ опредѣленій, доказательствъ и такъ наз. геометрическихъ, на самомъ же дѣлѣ ариөметическихъ, задачъ на вычисленіе.

Самодѣятельность учащихся

Занятія геометріей могутъ быть для ученика занимательны только тогда, когда они требуютъ отъ него посильнаго и планомѣрнаго труда, когда они отъ него требуютъ посильной зрительной и мускульной работы, и рядомъ съ нею — также работы умственной, а не заучиванія словъ на-память, и только рядомъ съ заучиваніемъ — уразумѣнія того, что такъ трудно заучивается. Самодѣятельность и активность учениковъ должны сопровождать не только воспроизведеніе ими въ своемъ воображеніи того или иного представленія, и въ умѣ — того или иного понятія, той или иной идеи или разсужденія. Самодѣятельность и активность должны сопровождать самый *процессъ возникновенія* даннаго представленія, самый *процессъ образованія* даннаго понятія и данной идеи, самый *ходъ разсужденія* Только тогда и возможны тѣ пріятныя чувствованія учениковъ по поводу понятаго ими труда, которыя представляютъ собою важное условіе интереса учащихся къ занятіямъ. Самодѣятельность учениковъ въ накопленіи воспріятій и представленій пространственнаго содержанія должна находить примѣненіе на всѣхъ ступеняхъ обученія Одно изъ первыхъ мѣстъ могутъ занимать упражненія дѣтей въ изготовленіи ими изъ подходящаго матеріала (глины, бумаги, картофеля) такихъ наглядныхъ пособій, которыя не требуютъ особенныхъ навыковъ въ такъ называемомъ „ручномъ трудѣ" (въ узкомъ смыслѣ этого послѣдняго слова) Чрезвычайно важно выполненіе ими, съ помощью линейки, карандаша, циркуля, чертежнаго треугольника и т п, достаточнаго количества цѣлесообразныхъ геометрическихъ чертежей Важны также упражненія дѣтей въ измѣреніи нѣкоторыхъ величинъ, въ дѣйствительномъ накладываніи (а не мысленномъ только) вырѣзанныхъ изъ бумаги фигуръ на другія фигуры, тоже вырѣзанныя или только начерченныя Однимъ словомъ, дѣти должны рѣшать *задачи*. Подборъ этихъ задачъ долженъ прежде всего удовлетворять требованіямъ простоты, цѣлесообразности и занимательности

Склонность къ отвлеченному мышленію — привилегія немногихъ

Чтобы возможны были сколько нибудь отвлеченное мышленіе и приложеніе дедуктивнаго метода къ геометрическимъ вопросамъ, въ распоряженіи учащагося долженъ быть извѣстный матеріалъ, а его-то именно нѣтъ и не можетъ быть въ распоряженіи начинающаго Да и вообще надо помнить, что даже взрослыхъ людей, особенно

10д. Найти «разстояніе» между двумя точками.—Когда говорятъ о разстояніи между двумя точками, то при этомъ имѣютъ въ виду длину *прямой,* соединяющей одну точку съ другой, а не длину другого «пути» отъ одной точки до другой —Конечно, если по прямой линіи невозможно дойти отъ одной точки до другой (если что-нибудь этому мѣшаетъ), тогда разстояніе будетъ другое —Какой путь самый короткій?—Какое разстояніе отъ одной точки до другой—кратчайшее? (Разстояніе, измѣренное по прямой линіи)

12. *Даны двѣ точки; провести прямую отъ одной точки до другой и «продолжить» ее въ томъ же направленіи —Продолжить прямую въ противоположномъ направленіи* —Говорятъ, что прямая безконечна въ одномъ направленіи, если ея начало дано и если можно сказать, что конецъ ея лежитъ какъ угодно далеко.—Говорятъ, что прямая безконечна по обѣ стороны или въ обоихъ направленіяхъ, если ея концы можно представить себѣ удаленными какъ угодно далеко —Прямая, безконечная въ одномъ направленіи, называется иногда «лучомъ». Почему она такъ называется? (Лучъ свѣта идетъ какъ угодно далеко, а начало имѣетъ опредѣленное)

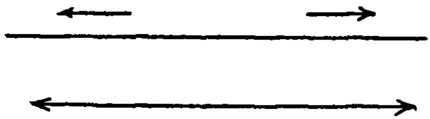
Пока учащеся не нуждаются въ обозначеніи прямыхъ линій буквами, буквъ имъ не надо навязывать. На чертежахъ конечныя прямыя полезно снабжать «барьерами», безконечныя въ одномъ направленіи—однимъ барьеромъ, а безконечныя въ обоихъ направленіяхъ оставлять безъ отмѣтки ихъ начала и конца какимъ-либо условнымъ знакомъ, напр, такъ.

При обозначеніи же прямыхъ буквами, послѣднія можно ставить надъ или подъ прямою, когда прямая безконечна въ обоихъ направленіяхъ, у концовъ—когда прямая конечна, и у начала и надъ или подъ видимымъ ея концомъ, когда прямая безконечна въ одномъ направленіи Такъ, изъ трехъ прямыхъ прямая AB

Къ № 12

конечна, прямая XY безконечна въ обоихъ направленіяхъ, а прямая MN безконечна въ одномъ направленіи, начиная отъ точки M.

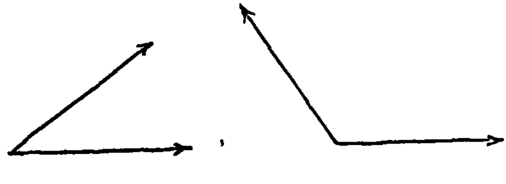
14. *Взять двѣ точки на безконечной прямой* —Конечная прямая, заключенная между этими двумя точками, называется иногда также «отрѣзкомъ» прямой Почему она такъ называется? (Потому что ее мы какъ будто отрѣзали отъ прямой)



Къ № 17

17. Взять точку, изъ нея провести одну прямую въ одномъ направленіи и еще одну прямую — въ прямо-противоположномъ направленіи —Стрѣлками обозначить эти два направленія.

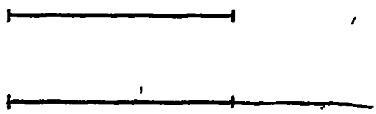
18. *Изъ точки на плоскости провести двѣ прямыя (два луча) не въ одномъ и томъ же и не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ* и стрѣлками обозначить эти направленія —При этомъ получится «уголъ»



Къ № 18.

До сихъ поръ ученики пользовались только линейкой и мѣрительной лентой или линейкой съ дѣленіями, масштабомъ. Появленіе циркуля должно сопровождаться нагляднымъ и краткимъ описаніемъ этого прибора, и разсмотрѣніемъ его учениками

20. Дана конечная прямая Поставить остріе металлической ножки циркуля въ одинъ конецъ этой прямой, а остріе карандаша въ другой конецъ —Взять отдѣльный «лучъ» и сдѣлать, съ помощью циркуля, на этомъ лучѣ отъ начала его «засѣчку» на такомъ разстояніи отъ начала луча, которое равно разстоянію между концами данной конечной прямой.— Измѣрять разстояніе не надо —Это называется «отложить» данный отрѣзокъ на другой прямой



Къ № 20

20а. Одинъ отрѣзокъ прямой можно *наложить* на другой —При этомъ могутъ быть три случая. 1) концы перваго отрѣзка совмѣстятся (сольются) съ концами другого, 2) второй конецъ перваго отрѣзка «попадетъ» между концами второго, 3) второй конецъ перваго попадетъ на продолженіе второго отрѣзка —Въ первомъ случаѣ говорятъ, что отрѣзки *совмѣстимы* одинъ съ другимъ, или *равны другъ другу*, или *равны между собою*.

22. *На лучѣ отложить отъ его начала отрѣзокъ прямой, равный данному отрѣзку.*

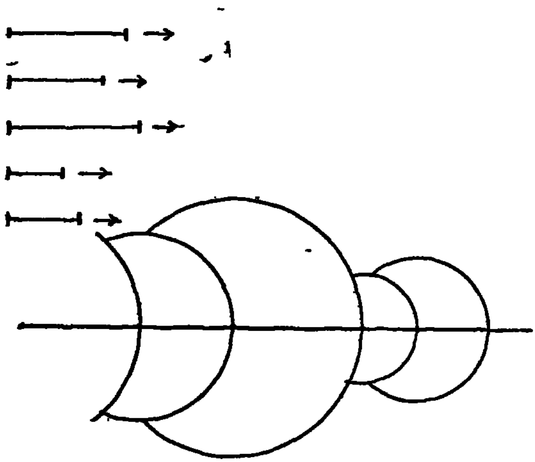
22а. Взять безконечную прямую, на ней точку и, съ помощью циркуля, отмѣтить на прямой двѣ точки, лежащія по разныя стороны первой на одинаковомъ разстояніи. Можно измѣрить каждое изъ нихъ Можно ихъ не измѣрять.

Къ № 22а.

22б. Сдѣлать то же съ помощью бумажной ленты, центиметренной или другой мѣрительной линейки —О такихъ двухъ точкахъ говорятъ, что онѣ лежатъ на данной прямой «симметрично» по отношенію къ первой точкѣ

23. *Начертить нѣсколько конечныхъ прямыхъ, измѣрить каждую изъ нихъ центиметренной линейкой и записать надъ или подъ каждой прямой ея длину въ миллиметрахъ* —Часть миллиметра оцѣнивать *«на-глазъ»*.

25. Начертить двѣ конечныя прямыя и на отдѣльномъ лучѣ отъ начала его отложить ихъ «сумму».—Начертить

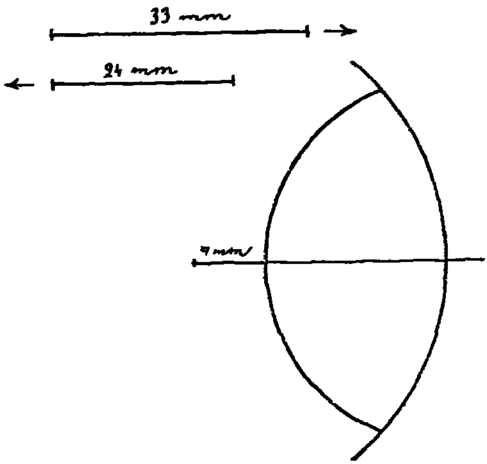


Къ № 25

нѣсколько прямыхъ и на отдѣльномъ лучѣ начертить ихъ сумму.—*«Сложить» нѣсколько данныхъ прямыхъ, имѣющихъ одно и то же направленіе*

27. Начертить два неодинаковыхъ отрѣзка прямой и на отдѣльномъ лучѣ отложить прямую, равную ихъ разности — *«Вычесть» одну конечную прямую изъ другой, ей не равной*

Иногда можно посвящать учащихся: а) въ смыслъ вычитанія одного отрѣзка изъ другого въ тѣхъ случаяхъ, когда «разность между ними равна нулю», б) въ смыслъ «положительнаго» и «отрицательнаго» отрѣзка прямой, в) въ смыслъ «вычитанія» большаго отрѣзка прямой изъ меньшаго, г) въ смыслъ «алгебраическаго сложенія» отрѣзковъ, имѣющихъ различные знаки Для того, чтобы учащіеся это уразумѣли, достаточно принять съ ними, что горизонтальныя прямыя, имѣющія направленіе отъ лѣвой руки къ правой,

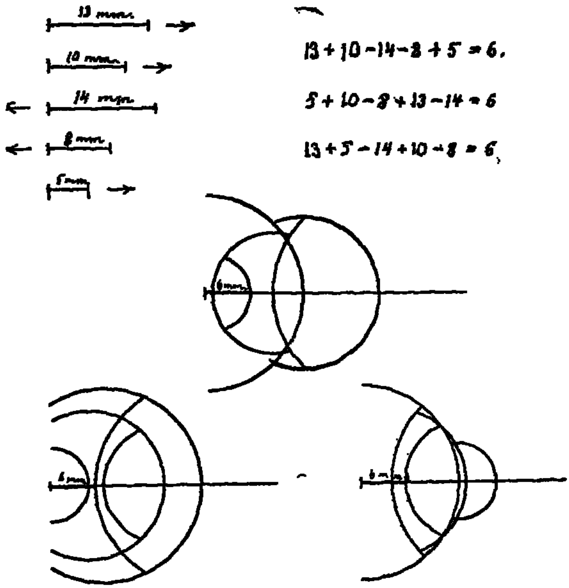


Къ № 27.

можно считать положительными, а горизонтальныя прямыя, имѣющія противоположное направленіе—отрицательными, и что откладываніе положительной прямой отъ данной точки направо и откладываніе отрицательной прямой (отъ данной точки налѣво) безразлично называются алгебраическимъ «прибавленіемъ». Само собою разумѣется, что это требуетъ и упражненій, и нагляднаго объясненія, взятаго изъ области движенія пройти 7 шаговъ вправо и 5 шаговъ влѣво, 7 шаговъ вправо и 7 влѣво, 7 вправо и 12 влѣво и т п. Но, конечно, эти вопросы — не обязательны

***29.** «Сложить» нѣсколько прямыхъ, изъ которыхъ однѣ имѣютъ одно, а другія — противоположное направленіе[1]).

***31.** Дано нѣсколько отрѣзковъ различныхъ прямыхъ линій.—Измѣрить ихъ, *вычислить*, чему равна длина ихъ



Къ № 29

суммы, отложить эту сумму съ помощью центиметренной линейки и провѣрить результатъ съ помощью циркуля.

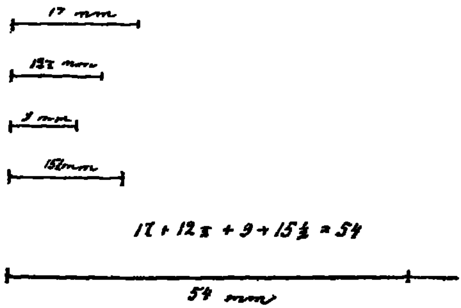
Цѣль этой задачи—выясненіе разницы между чертежомъ и вычисленіемъ.

33. Провѣрить, пряма ли линейка между краями ея и между какими-нибудь другими двумя, отмѣченными на ней какимъ-нибудь образомъ, точками

1) Задачи, нумера которыхъ снабжены звѣздочкой, можно опустить.

35. Данъ небольшой отрѣзокъ прямой Начертить такія двѣ конечныя прямыя, чтобы въ одной данный отрѣзокъ заключался 7 разъ, а въ другой 4 раза — Придумать и разрѣшить еще нѣсколько задачъ того же рода! — Начертить два неодинаковыхъ отрѣзка и узнать, сколько разъ меньшій *содержится* въ большемъ. — Можетъ ли одинъ отрѣзокъ въ другомъ содержаться цѣлое число разъ?

***36.** Начертить двѣ конечныя прямыя неодинаковой длины и поступить съ ними слѣдующимъ образомъ: меньшую отложить на бо́льшей столько разъ, сколько возможно; если останется остатокъ, меньшій, чѣмъ меньшая прямая,



Къ № 31.

отложить его на меньшей столько разъ, сколько возможно; если опять останется остатокъ (второй остатокъ), то его отложить на первомъ столько разъ, сколько возможно, если снова останется остатокъ (третій), то его отложить на второмъ столько разъ, сколько возможно, продолжать это до тѣхъ поръ, пока не получится такого остатка (послѣдняго), который умѣстится въ предпослѣднемъ нѣкоторое *цѣлое число* разъ *).

---

*) Текста этой задачи, конечно, не слѣдуетъ диктовать ученикамъ, во избѣжаніе безполезной затраты времени

***36a.** Повторить то же самое, но со слѣдующей разницей. 1) концы прямыхъ обозначить буквами, 2) какъ только отложенъ одинъ отрѣзокъ на другой, и получился остатокъ, начало этого остатка не только отмѣтить болѣе замѣтнымъ для глаза образомъ, но надъ этой точкой тоже поставить букву, 3) каждый разъ записывать въ отдѣльную строчку результатъ работы.

$$AB = 3CD + EB$$
$$CD = 2EB + FD$$
$$EB = FD + GB \quad \text{и т п}$$

Если предоставить каждому взять въ тетради свой чертежъ, то на этой ступени весьма трудно было бы достигнуть того, чтобы всѣ ученики въ классѣ дѣлали то, что нужно. А потому первыя упражненія въ этомъ пунктѣ нахожденія общей мѣры двухъ прямыхъ надо вести такъ, чтобы чертежъ на доскѣ выполнялъ только одинъ изъ учениковъ, а всѣ остальные записывали бы только то, что получается въ результатѣ, т-е рядъ строчекъ, подобныхъ выше намѣченнымъ

***37.** *Найти «общую мѣру» двухъ конечныхъ прямыхъ* Это достигается пріемомъ, который описанъ въ задачѣ 36

***39.** Найти, сколько разъ общая мѣра содержится въ меньшей прямой, и сколько разъ она содержится въ большей прямой

***41.** *Найти «отношеніе» большей прямой къ меньшей и меньшей прямой къ большей*

Къ сожалѣнію, терминъ «отношеніе» не такъ часто встрѣчается на низшихъ ступеняхъ обученія математикѣ, какъ бы это слѣдовало Когда дѣлятъ одно именованное число на другое, то находятъ именно отношеніе перваго числа ко второму, т.-е то отвлеченное число, на которое въ данномъ случаѣ надо помножить дѣлителя, чтобы получить дѣлимое Если дѣлитель больше дѣлимаго и, вообще, если въ дѣлимомъ дѣлитель не содержится цѣлаго числа разъ, то отношеніе дѣлимаго къ дѣлителю тогда равно отвлеченной дроби, которая выражаетъ, какую часть дѣлителя составляетъ дѣлимое.

***41а.** Въ нашемъ примѣрѣ вышло такъ, что $AB = 37XD$, а $CD = 11XD$ (надо взять, конечно, тѣ числа, которыя получились въ этомъ примѣрѣ). Иногда записываютъ такъ:

$$AB\ \ CD = 37\ \ 11$$

и читаютъ это такъ AB относится къ CD, какъ 37 относится къ 11.—Что это значитъ? (Это значитъ, что нѣкоторый отрѣзокъ содержится въ прямой AB ровно 37 разъ, а въ прямой CD—ровно 11 разъ) —Можно записать и иначе

$$AB\ \ CD = \frac{37}{11} \text{ или } AB = \frac{37}{11} CD,$$

но эти послѣднія записи обозначаютъ одно и то же, такъ какъ онѣ говорятъ, что $\frac{1}{11}$ доля прямой CD содержится въ прямой AB ровно 37 разъ.

Безъ должнаго количества и безъ должнаго качества упражненій въ этомъ направленіи, подъ непосредственнымъ руководствомъ учителя, учащимся этотъ процессъ (такъ называемый Евклидовъ процессъ отысканія общей мѣры двухъ прямыхъ) дается только поверхностно. Самый же смыслъ процесса и его значеніе остаются для учениковъ не достаточно выясненными.

***41б.** Найти общую мѣру двухъ неравныхъ прямыхъ, начерченныхъ на классной доскѣ, и отношеніе большей изъ нихъ къ меньшей —Начертить въ тетрадяхъ такія двѣ прямыя, у которыхъ было бы то же отношеніе, примите миллиметръ за общую ихъ мѣру.

Это—первые шаги къ выработкѣ представленія о пропорціональности, и надѣяться на то, что для этого представленія достаточно одного упражненія, не представляется возможнымъ

***41в.** На доскѣ общая мѣра вотъ какая (учитель показываетъ), а въ тетрадяхъ вмѣсто этой общей мѣры вы взяли миллиметръ.—Отношеніе прямой AB къ прямой CD то же самое, что отношеніе вашей прямой MN къ вашей прямой PQ. Это пишутъ такъ $AB.\ CD = MN : PQ$, а говорятъ, что прямыя AB, CD, MN и PQ составляютъ *пропорцію*, и читаютъ записанное такъ: AB относится къ CD такъ, какъ MN относится къ PQ

Это—первые зачатки идеи пропорціональности, и въ этомъ направленіи надо хорошенько поупражнять учащихся, хотя бы они знали многое о пропорціяхъ изъ курса алгебры Ученики должны отлично знать, что представляетъ собою отношеніе одного числа къ другому, т-е обладать основными понятіями о дѣленіи и объ отвлеченной дроби, какъ объ отношеніи. Съ учениками, не обладающими понятіемъ о дроби, какъ объ отношеніи, достаточна первая запись, приведенная въ № 41а Вообще упражненія этого рода могутъ быть отложены, если они почему-либо въ данный моментъ не цѣлесообразны

43. Раздѣлить одну изъ четвертей страницы классной тетради на двѣ части прямою, чисто и аккуратно заштриховать и зачернить одну изъ этихъ частей карандашомъ и отдать себѣ отчетъ, гдѣ та прямая линія, которая отдѣляетъ зачерненную часть отъ незачерненной.—Имѣетъ ли она ширину, или же она только отдѣляетъ зачерненную часть отъ незачерненной?—Провести на одной изъ четвертей, на которыя раздѣлена страница тетради, отъ руки какую-нибудь не прямую, а «кривую», линію, аккуратно зачернить одну изъ полученныхъ, такимъ образомъ, частей этой четверти и отдать себѣ отчетъ, гдѣ та кривая линія, которая отдѣляетъ зачерненную часть отъ незачерненной —Имѣетъ ли эта линія ширину, или же она только отдѣляетъ зачерненную часть чертежа отъ незачерненной?—Она—«граница» между двумя частями плоскости

43а. Остріе карандаша *движется* по бумагѣ, когда мы чертимъ или рисуемъ что-нибудь карандашомъ.—Оно движется по плоскости чертежа, когда мы чертимъ прямую Оно оставляетъ «слѣдъ» на бумагѣ. — Представьте себѣ, что точка движется, перемѣщается на плоскости — Когда *точка* «перемѣщается» на плоскости, то говорятъ, что она тоже оставляетъ «слѣдъ» и «описываетъ» линію. Если точка движется въ одномъ направленіи, то она «описываетъ» прямую линію.

43б. Граница между двумя частями плоскости не имѣетъ ни ширины, ни толщины —Прямая, которую мы чертимъ карандашомъ, имѣетъ ширину и толщину. Ширину мы видимъ, а толщины не видимъ. Карандашъ стирается, кусочки графита остаются на бумагѣ, остро очиненный карандашъ притупляется. — Точка, нами поставленная на бумагѣ карандашомъ, тоже имѣетъ длину, ширину и толщину — Точка, поставленная остріемъ циркуля или простой иголки, имѣетъ и длину, и ширину, и глубину. — Когда говорятъ о точкѣ въ геометріи, то иногда имѣютъ въ виду начало или конецъ линіи, границу, отдѣляющую одну часть линіи отъ другой ея части.

> Формулировать, что математическая линія не имѣетъ ширины и толщины, и что математическая точка не имѣетъ никакихъ размѣровъ, на этой ступени нѣтъ особенной необходимости, но возможно Представленіе о линіи, какъ слѣдѣ движущейся точки, можно вызвать, прибѣгнувъ къ оптическому опыту быстраго движенія раскаленнаго конца лучинки, привязанной къ ниткѣ. Спицы быстро движущагося колеса даютъ представленіе о поверхности, какъ слѣдѣ движущейся линіи и т. п

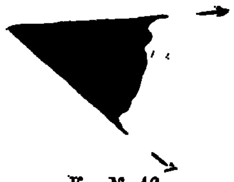
44. Начертить прямую, продолжить ее на самомъ дѣлѣ такъ далеко, какъ это только возможно.—Можно ли себѣ представить, что она продолжена дальше? (Можно).—Можно себѣ представить, что и плоскость чертежа продолжена дальше. — Какъ далеко ее можно продолжить «мысленно»? (Какъ угодно далеко) — Плоскость — *безконечная* поверхность. Если черезъ *любыя* ея двѣ точки провести прямую, то всѣ точки этой прямой будутъ лежать на плоскости — Найдите здѣсь, въ классѣ, еще плоскости, кромѣ плоскости доски и плоскостей вашихъ чертежей. — Покажите мнѣ поверхности, которыхъ нельзя считать плоскими.

Здѣсь можетъ у учениковъ зародиться вопросъ объ идеальной плоскости, но можетъ и не зародиться Навязывать ученикамъ этотъ вопросъ не слѣдуетъ. Но чтобы ученики съ линейкой въ рукахъ были въ состояніи убѣдиться, что поверхности печки, ручки для пера, самого пера и т. п. — не плоскости, необходимо. Они на этой ступени еще такъ слабо отдаютъ себѣ отчетъ въ своихъ наблюденіяхъ, что рѣдко кому изъ учащихся приходитъ въ голову мысль, что поверхность человѣческаго лица — ближайшій примѣръ не плоской (кривой) поверхности.

44а. Если требуется начертить какую-нибудь *опредѣленную* прямую, то, чтобы ее вѣрно провести, достаточно ли знать одну ея точку? (Нѣтъ, черезъ одну точку можно провести сколько угодно разныхъ прямыхъ). — Необходимо ли знать всѣ ея точки? (Нѣтъ, достаточно знать только двѣ ея точки) — Говорятъ: черезъ двѣ данныя точки можно провести только одну прямую. Говорятъ и иначе· прямая линія вполнѣ *опредѣляется* двумя ея точками — Это значитъ, что, если сказано, что данныя двѣ точки лежатъ на требуемой прямой, то это — совершенно *опредѣленная* (единственная) прямая въ пространствѣ, которая проходитъ черезъ данныя точки. — Безконечная прямая на плоскости имѣетъ извѣстное *положеніе* и либо одно, либо два направленія — Лучъ имѣетъ начальную точку, извѣстное положеніе и одно направленіе. — Конечная прямая (отрѣзокъ прямой) имѣетъ положеніе, начало и конецъ (два конца), одно или два направленія и длину. — Повторите!

§ 2. Линейный уголъ.

46. Изъ точки, взятой на плоскости, провести два луча (двѣ прямыя) не въ одномъ и томъ же и не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ —Зачернить «уголъ», который при этомъ получился — Зачернить можно много и мало Остается ли при этомъ *уголъ* тѣмъ же угломъ, или уголъ при этомъ измѣняется?— Уголъ остается тотъ же, будетъ ли зачернена большая или малая часть чертежа —Объ углѣ говорятъ, что онъ лежитъ или заключенъ *между* тѣми прямыми, которыя проведены изъ точки —Объ углѣ говорятъ, что онъ *образованъ* этими двумя прямыми

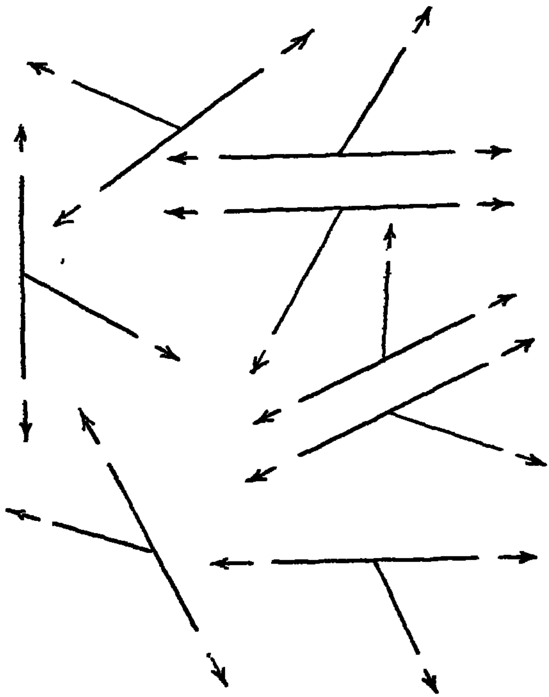


Къ № 46

46а. Начертить на отдѣльной бумажкѣ нѣсколько угловъ и вырѣзать ихъ съ помощью ножика или ножницъ — Изготовить нѣсколько уголковъ изъ писчей бумаги сгибаніемъ —Сравнить ихъ и узнать, который уголъ больше (не который кусокъ бумаги больше, а который *уголъ*)

47 *Изъ точки, взятой на плоскости, провести два луча въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, и еще одинъ лучъ—въ какомъ-нибудь третьемъ направленіи.*— Сколько образовалось угловъ?—Такіе углы называются «смежными».—Какіе углы называются смежными? (Если изъ точки на плоскости провести въ этой плоскости два луча въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ и еще одинъ лучъ въ какомъ-нибудь третьемъ направленіи, то получатся два смежныхъ угла)

Ученики должны *описывать* способъ полученія данной геометрической фигуры, а не строить опредѣленія непремѣнно по такому образцу. «Смежными наз. такіе углы», и т. д —При этомъ можно опускать слова «на плоскости», но въ свое время ихъ надо включить въ опредѣленіе Для того, чтобы ученика...

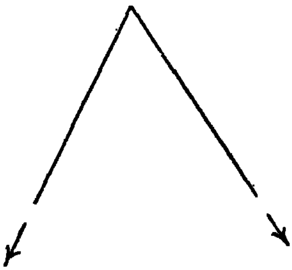


Къ № 47

нятно, что слова «на плоскости» важны, можно прибѣгнуть къ помощи трехъ карандашей два положить на столъ по прямой линiи, такъ чтобы одинъ составлялъ какъ бы продолженie другого, а въ мѣсто ихъ соприкосновенiя поставить третiй карандашъ наклонно къ плоскости стола Третiй карандашъ съ каждымъ изъ остальныхъ только тогда образуетъ уголъ, когда будетъ черезъ нихъ проведена плоскость Ученикамъ надо понять, что пока нѣтъ плоскости, нѣтъ и плоскаго угла, а есть только ломаная линiя

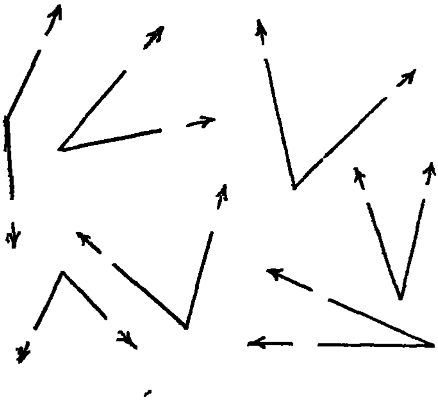
48. Изъ точки, взятой на плоскости, провести два луча въ прямо-противоположныхъ направленiяхъ и еще два луча — тоже въ прямо-противоположныхъ направленiяхъ

Сколько при этомъ образуется угловъ?—Начертить уголъ, отмѣтить стрѣлками направленія его «сторонъ» и продолжить ихъ въ направленіяхъ, прямо-противоположныхъ ихъ направленіямъ



Къ № 50

50. Начертить уголъ и, постепенно стирая часть его «сторонъ», все приближаться къ его «вершинѣ» —Какъ назвать прямыя, «образующія» уголъ? (Сторонами угла) —Что такое стороны угла? (Если изъ точки проведены двѣ прямыя и при этомъ образовался уголъ, то эти двѣ прямыя — стороны угла) — Взять точку и изъ нея провести двѣ прямыя линіи. одну направо внизъ, а другую — налѣво внизъ —Образовался уголъ —Какъ назвать ту точку, изъ которой проведены стороны угла? (Вершиной угла) —А если у сторонъ угла другія направленія, то какъ называются точки, изъ которыхъ проведены стороны угла? (Все равно вершинами)

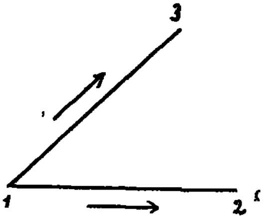


Къ № 50 (прим)

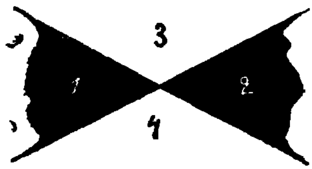
Вначалѣ нѣкоторые учащіеся ошибаются насчетъ того, измѣняется ли уголъ съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ его сторонъ или не измѣняется, и съ этимъ явленіемъ учащему необходимо считаться Понятіе объ углѣ не поддается опредѣленію и принадлежить къ числу первоначальныхъ и основныхъ. Тѣмъ бóльшаго вниманія учениковъ заслуживаетъ то обстоятельство, что уголъ не зависитъ отъ длины его сторонъ, и что длина сторонъ поэтому не принимается во вниманіе, когда говорятъ объ углѣ

50а. Взять въ плоскости три точки на одной прямой — Взять три точки, не лежащія на одной прямой, и соединить первую со второй и съ третьей прямыми линіями —Образуется ли при этомъ уголъ? (Образуется).

51. Продолжить стороны угла въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ —Если стороны угла имѣютъ направленія прямо-противоположныя направленіямъ сторонъ другого



Къ № 50а



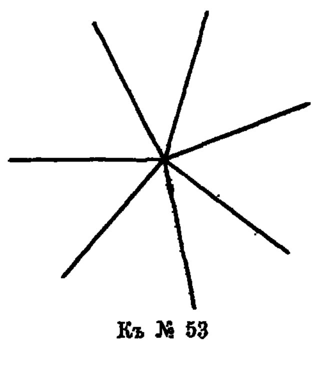
Къ № 51

угла и если у нихъ одна и та же (общая) вершина, то это— углы «вертикальные» —Какіе углы называются смежными? (Если изъ точки на плоскости провести двѣ прямыя въ той же плоскости въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ и если въ той же плоскости изъ той же точки провести еще одну прямую въ нѣкоторомъ третьемъ направленіи, то при этомъ образуется два угла, и эти углы будутъ смежными) — А какіе углы называются вертикальными? (Если стороны угла продолжить въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, то при этомъ получатся два угла, у которыхъ одна и та же вершина, и стороны которыхъ имѣютъ прямо-противоположныя направленія, эти два угла называются вертикальными, вертикальными будутъ и остальные два угла).

Опредѣленія въ математикѣ не только на низшихъ ступеняхъ обученія, но и на высшихъ, можно строить такъ, чтобы они *описывали* самый способъ полученія и образованія даннаго понятія въ умѣ ученика. То же относится и къ опредѣленіямъ геометрическихъ фигуръ Такое (генетическое) построеніе опредѣленій всегда дозволительно, но оно особенно полезно на первыхъ ступеняхъ курса и, вообще, въ курсѣ элементарномъ и пропедевтическомъ. Терминъ «вертикальный уголъ», конечно, не принадлежитъ къ числу удачнѣйшихъ, но онъ, къ сожалѣнію, принадлежитъ къ числу общепринятыхъ. Можно вертикальные углы называть также противоположными, но терминъ этотъ менѣе употребителенъ

52. Изъ вершины угла провести прямую «внутри» угла — Уголъ раздѣлится на двѣ «части», изъ которыхъ каждая тоже будетъ угломъ

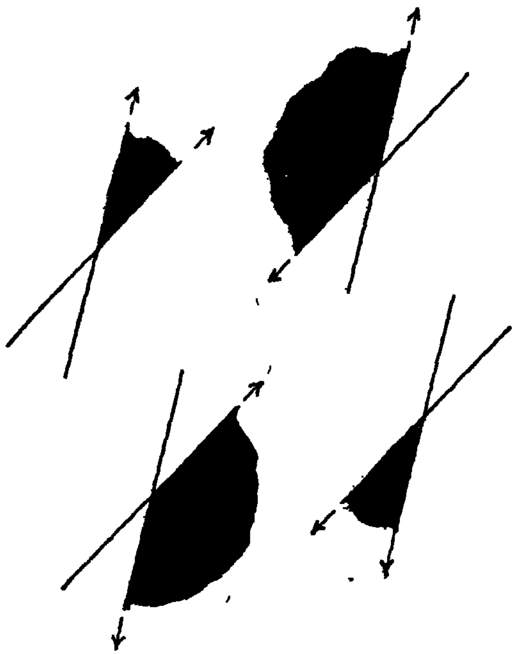
53 Изъ точки, взятой на плоскости, въ той же плоскости, провести три прямыя въ разныхъ направленіяхъ.—Изъ точки, взятой на плоскости, провести нѣсколько прямыхъ въ различныхъ направленіяхъ — При этомъ образуются углы —Возьмемъ одинъ уголъ, не раздѣленный ни одною изъ проведенныхъ прямыхъ на двѣ части, и будемъ его считать первымъ, одну изъ его сторонъ будемъ считать первою, а другую—второю — Составляетъ ли вторая его сторона первую сторону другого угла? (Составляетъ) — Этотъ другой уголъ будемъ считать вторымъ угломъ и будемъ говорить. первая сторона второго угла совпадаетъ со второй стороною перваго угла, первая сторона третьяго угла совпадаетъ со второю



Къ № 53

стороной второго угла и т д —Такіе углы можно называть углами *послѣдовательно прилежащими* одинъ къ другому.

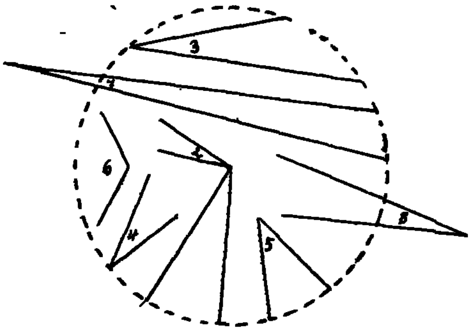
55. Провести въ плоскости одну прямую въ какомъ-нибудь направленіи и другую въ какомъ-нибудь другомъ направленіи, но такъ, чтобы вторая прямая пересѣкла



Къ № 55

первую —«Точка пересѣченія» двухъ прямыхъ, «общая» точка этихъ прямыхъ, лежитъ на обѣихъ прямыхъ линіяхъ — Единственная ли это общая точка обѣихъ прямыхъ? (Единственная) —Взять по нѣсколько точекъ на каждой изъ взаимно пересѣкающихся прямыхъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, почему ни одна изъ нихъ не можетъ считаться общей точкой обѣихъ прямыхъ? (Потому что каждая изъ нихъ обратномъ направленію движенія часовой стрѣлки —Сколько получилось окружностей? (Одна).—Если не извѣстно, въ какомъ направленіи начерчена окружность, то считаютъ, что она можетъ имѣть то или другое направленіе, безразлично.

86. Начертить окружность (стр 31), провести два радіуса не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, отъ центра до какихъ-нибудь точекъ окружности и продолжить эти радіусы въ томъ же направленіи —Какъ называется уголъ, вершина котораго совпадаетъ съ центромъ? (Центральнымъ). — Дуга, заключенная между сторонами центральнаго угла, называется его дугою. — Существуютъ углы, которыхъ нельзя называть центральными.—Если направленіе дуги центральнаго угла неизвѣстно, то считаютъ, что у нея направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки

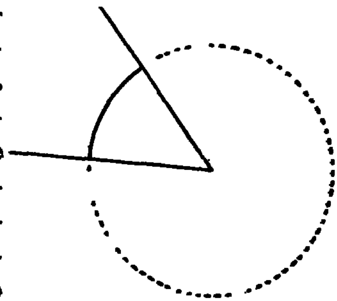


Къ № 86.

***86а** Направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки, обыкновенно считаютъ положительнымъ, а противоположное — отрицательнымъ.

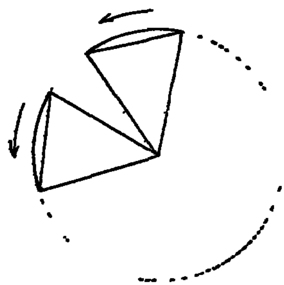
89. Изъ точки въ плоскости провести двѣ какія-нибудь прямыя въ различныхъ, но не прямо-противоположныхъ направленіяхъ, стрѣлками указать ихъ направленія, принять вершину угла за центръ и какимъ-нибудь радіусомъ описать «дугу этого угла» въ направленіи, обратномъ направленію часовой стрѣлки.

90. Начертить уголъ, провести его дугу, продолжить стороны угла въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, провести дугу угла, вертикальнаго первому, тѣмъ же радіусомъ —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, одинаковы ли эти дуги — Одинаковы ли эти вертикальные углы или не одинаковы?—Одинаковы ли всякіе два вертикальные угла?—Чѣмъ они отличаются одинъ отъ другого? (Только своимъ положеніемъ въ плоскости и направленіемъ своихъ сторонъ).



Къ № 86

91а Начертить уголъ и его дугу и поставить остріе одной ножки циркуля въ одинъ конецъ дуги, а остріе другой ножки циркуля—въ другой конецъ дуги.—Начертить двѣ окружности разными радіусами, взять двѣ точки на окружности меньшаго радіуса, поставить острія ножекъ циркуля въ двѣ точки и, не раздвигая и не сдвигая ножекъ циркуля, поставить ихъ острія въ нѣкоторыя точки на второй окружности —«Перенесли» ли мы такимъ образомъ дугу первой окружности на дугу второй? (Нѣтъ, мы взяли на второй окружности двѣ точки, *разстояніе* между которыми—то же, что между взятыми двумя точками).—«Забрать въ циркуль» можно только хорду.



Къ № 94

94 Начертить окружность, на ней взять двѣ одинаковыя дуги въ одномъ и томъ же направленіи (обратномъ направленію движенія часовой стрѣлки), центръ соединить съ концами этихъ двухъ дугъ, отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе углы равны между собою, и какимъ-нибудь образомъ отмѣтить равенство этихъ угловъ —Одинаковой ли «кривизны» эти двѣ дуги?—Можно «забрать въ циркуль» *разстояніе* между концами дугъ.—Можно ли утверждать (т.-е. говорить съ увѣренностью въ томъ, что̀ это—правда), что дуги эти одинаковы? (Можно).—Если одну дугу можно наложить на другую такъ, чтобы и концы ихъ и всѣ остальныя точки совмѣстились, то такія дуги совмѣстимы, и о нихъ говорятъ, что онѣ равны между собою —Совмѣстимы могутъ быть только дуги одинаковой кривизны, т.-е одного и того же радіуса

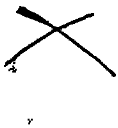
96. Начертить какой-нибудь уголъ и продолжить одну изъ его сторонъ въ прямо-противоположномъ направленіи — Получатся ли два смежныхъ угла?—Почему они смежные?—Сдѣлать такъ, чтобы эти смежные углы стали центральными углами съ дугами одинаковой кривизны —Равны ли между собою ихъ дуги?—Если не равны между собою, то которая изъ нихъ больше?—Который изъ угловъ больше?—Можно ли судить о томъ, который центральный уголъ больше, по ихъ дугамъ одинаковой кривизны?

97 Начертить двѣ окружности одинаковыми радіусами, взять на одной окружности какую-нибудь дугу и такую же дугу — на другой окружности, соединить центръ каждой окружности съ отмѣченными на ней концами дуги, какимъ-нибудь образомъ, отъ-руки, отмѣтить, какіе углы равны между собою.

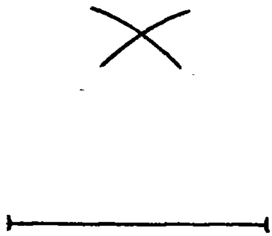
Ученики очень быстро усваиваютъ себѣ способъ отмѣтки равенства двухъ угловъ съ помощью проведенной отъ-руки дуги небольшого радіуса и уясняютъ себѣ на этой ступени происхожденіе этой отмѣтки.

98. *Начертить («построить») уголъ, равный данному*

100. Начертить дугу окружности круга и тѣмъ же или другимъ радіусомъ, изъ другого центра, начертить другую дугу, которая пересѣкла бы первую дугу въ какой-нибудь



Къ № 100



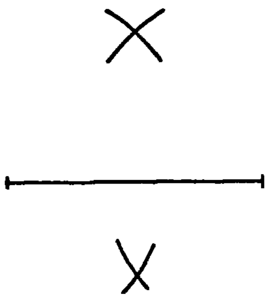
Къ № 101

одной точкѣ —Въ такихъ случаяхъ говорятъ, что на одной дугѣ сдѣлана «засѣчка» другой дугою

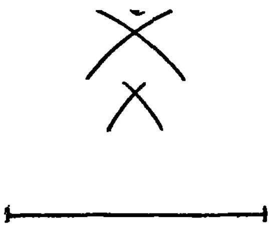
101 Взять двѣ точки, соединить ихъ прямою, принять ихъ за центры и начертить одинаковыми радіусами двѣ дуги, которыя пересѣкались бы въ одной точкѣ по одну сторону прямой, соединяющей данныя двѣ точки

102 Взять двѣ точки, соединить ихъ прямою, принять ихъ за центры и одинаковыми радіусами сдѣлать двѣ засѣчки одну—по одну сторону этой прямой, другую—по другую ея сторону.

104 Взять двѣ точки, соединить ихъ прямою, принять ихъ за центры, одинаковыми радіусами сдѣлать одну засѣчку по одну сторону этой прямой, а другими двумя, тоже одинаковыми, радіусами сдѣлать еще одну засѣчку, но по ту же сторону прямой

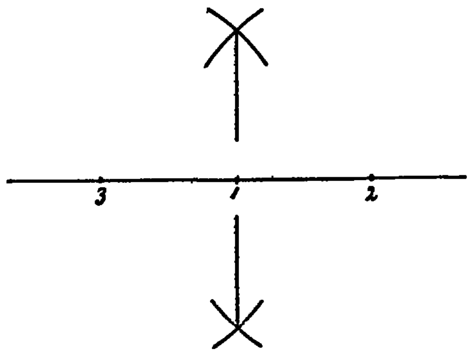


Къ № 102



Къ № 104

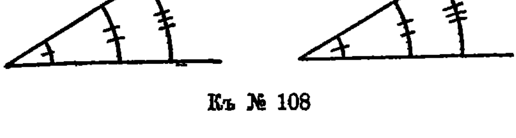
105. Начертить прямую, взять на ней точку, отмѣтить ее цифрой 1, отложить отъ нея въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ два одинаковыхъ отрѣзка, отмѣтить ихъ концы цифрами 2 и 3, прьнять вторую и третью точки за центры, одинаковыми радіусами по обѣ стороны прямой сдѣлать два засѣчки, соединить засѣчки прямою и отдать себѣ отчетъ въ томъ, должна ли эта прямая пройти черезъ первую точку или не должна?



Къ № 105

106. *Раздѣлить данную конечную прямую пополамъ* (на двѣ одинаковыя части).

108. Начертить уголъ, провести разными радіусами нѣсколько его дугъ, принявъ его вершину за центръ, построить уголъ, равный ему, съ такими же дугами и равныя дуги отмѣтить одинаковыми значками —Зависитъ ли величины угла отъ длины радіуса его дуги?

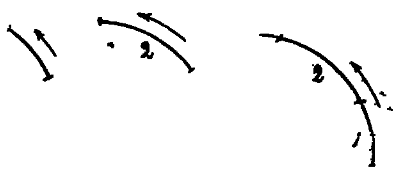


Къ № 108

110. Начертить уголъ, провести его дугу, построить еще одинъ уголъ, у котораго дуга того же радіуса была бы больше дуги перваго угла; отдать себѣ отчетъ въ томъ, который изъ угловъ больше

112. Взять пару смежныхъ угловъ и начертить ихъ дуги одинаковыми радіусами —Можно ли съ помощью циркуля установить, которая дуга больше?—Возможно ли начертить такую пару смежныхъ угловъ, чтобы дуги ихъ были одинаковы?—Начертить такую пару смежныхъ угловъ

114. Начертить двѣ дуги одинаковой кривизны Какіе у нихъ должны быть радіусы? (Одинаковые) — Составить одну дугу изъ двухъ дугъ одинаковой кривизны — Сложить двѣ дуги одинаковой кривизны —Сложить двѣ дуги одинаковыхъ радіусовъ —Нуженъ ли для этого центръ дугъ? (Нуженъ).



Къ № 114

115. Сложить нѣсколько дугъ одного и того же радіуса

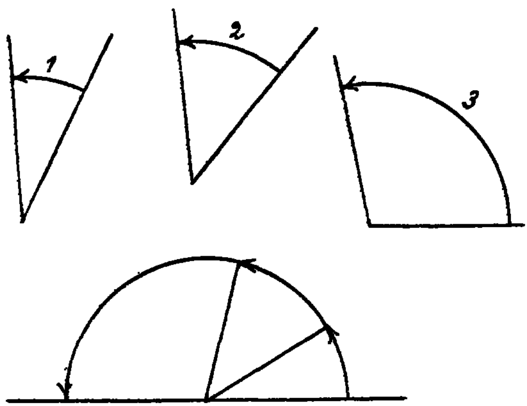
117. *Сложить два угла*

118. *Сложить нѣсколько угловъ*

120. *Вычесть меньшій уголъ изъ большаго*

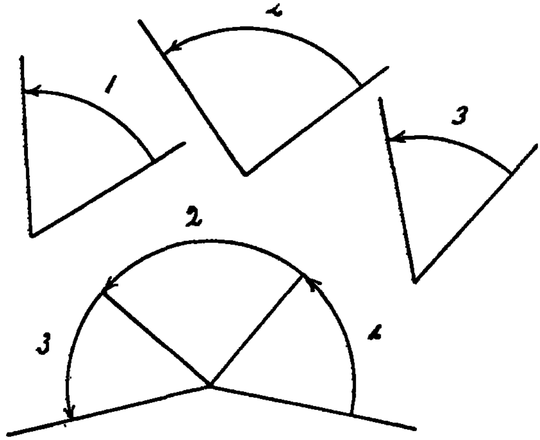
Здѣсь учащіеся уясняютъ себѣ значеніе «направленія» дугъ и угловъ Такъ какъ понятіе это принадлежитъ къ числу важныхъ, то желательно обратить вниманіе учениковъ и на то, что чисто условнымъ является то обстоятельство, что обыкновенно «положительной» дугѣ приписывается направленіе, обратное движенію часовой стрѣлки Здѣсь же умѣстно, если учащіеся уже различаютъ положительныя и отрицательныя значенія величинъ, допускающихъ двоякій смыслъ (положительный и отрицательный), указать имъ, что направленіе горизонтальнаго луча считается положительнымъ, когда онъ «идетъ» слѣва направо, и что это—тоже только условіе, а не необходимое *свойство* такого луча Далѣе, на этой ступени умѣстны также упражненія въ нахожденіи алгебраическихъ суммъ дугъ и угловъ, имѣющихъ разныя направленія Наконецъ, здѣсь же можно и полезно указать учащимся и дать имъ возможность усвоить себѣ · 1) что уголъ можно разсматривать, какъ «слѣдъ» *луча*, вращающагося въ плоскости вокругъ своего начала въ какомъ-нибудь направленіи; 2) что кругъ — «слѣдъ» радіуса, вращающагося въ одномъ направленіи вокругъ центра; 3) что окружность круга—«слѣдъ» точки, двигающейся въ плоскости въ направленіи движенія часовой стрѣлки (или въ обратномъ направленіи) и остающейся отъ нѣкоторой неподвижной точки, находящейся въ той же плоскости и называемой центромъ окружности круга, на одномъ и томъ же разстояніи, и т. п —На этой ступени уголъ является уже истинной величиною

120а. Провести конечную прямую въ плоскости, представить себѣ, что одинъ ея конецъ неподвиженъ, а прямая перемѣщается по плоскости въ направленіи движенія часовой стрѣлки, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, что «описываетъ» каждая точка прямой, и что—вся прямая



Къ № 123.

123. Сложить нѣсколько данныхъ угловъ.—Можетъ ли случиться, чтобы вторая сторона послѣдняго изъ слагаемыхъ угловъ оказалась продолженіемъ первой стороны перваго изъ слагаемыхъ угловъ?—*Можетъ ли случиться, чтобы дуга* суммы угловъ была полуокружностью? (Можетъ).—Можетъ ли случиться, чтобы дуга суммы угловъ была больше полуокружности? (Можетъ).—Какой уголъ соотвѣтствуетъ дугѣ, которая равна полуокружности?—Какой уголъ соотвѣтствуетъ



Къ № 123 (прим.)

дугѣ, которая больше полуокружности?—Углы ли это? (Хотя и не углы, но эти «фигуры» тоже можно считать углами).

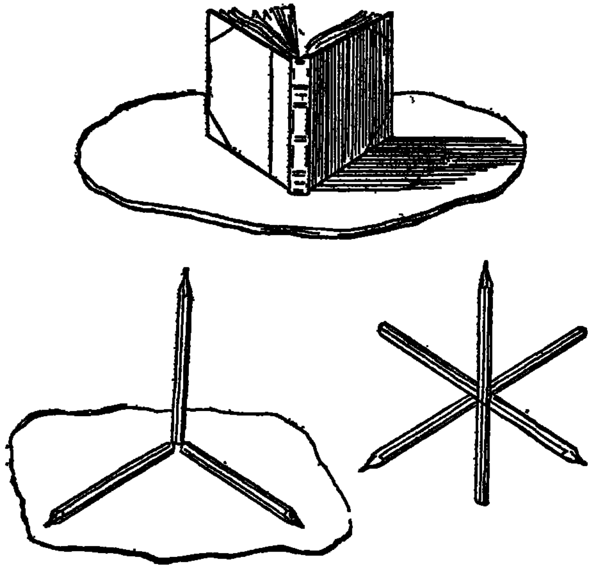
Эти постепенныя обобщенія понятія объ углѣ представляютъ собою прямое слѣдствіе сложенія угловъ и оказываютъ громадныя услуги въ дальнѣйшемъ курсѣ. Напр., при усвоеніи учащимися ученія о суммѣ угловъ треугольника, четыреугольника и многоугольника, при усвоеніи ими, въ курсѣ тригонометріи, ученія о тригонометрическихъ функціяхъ всякихъ угловъ и т. п., это обобщеніе весьма полезно.

125. Умножить уголъ на 3, на 4, на 5.

однимъ и тѣмъ же радіусомъ —Равны ли между собою эти 4 дуги? А углы?—Объ этихъ двухъ прямыхъ говорятъ, что каждая изъ нихъ перпендикулярна къ другой, или что онѣ «взаимно перпендикулярны» —О сторонахъ всякаго прямого угла тоже говорятъ, что онѣ *взаимно* перпендикулярны.

***140а.** Отчего я говорилъ «на прямой взятой *въ плоскости,* взять точку, изъ нея къ этой прямой *въ той же плоскости* провести перпендикуляръ?» (Потому что безъ плоскости нѣтъ «линейнаго» угла и нѣтъ нужнаго намъ чертежа).

Учащіеся должны понятіе линейнаго угла, а потому и понятіе о перпендикулярѣ къ прямой, связывать съ плоскостью, въ которой уголъ и перпендикуляръ «лежать». Чтобы этого достигнуть, надо вывести воспріятія учениковъ изъ плоскости и перенести ихъ въ пространство трехъ измѣреній Для этой цѣли достаточны три карандаша или три спички, или, еще лучше, немного раскрытая книжка въ переплетѣ, поставленная на столъ такъ, чтобы спинка ея была перпендикулярна къ поверхности стола Два карандаша можно положить на столъ такъ, чтобы одинъ лежалъ перпендикулярно къ другому, а третій можно приставить къ вершинѣ угла такъ, чтобы онъ съ однимъ изъ остальныхъ тоже образовалъ прямой уголъ, и тогда плоскость чрезъ эти два карандаша будетъ *мысленно* проведена Учащійся изъ этого сначала выведетъ, что къ одной и той же прямой можно провести два перпендикуляра, но въ двухъ разныхъ плоскостяхъ, а потомъ что изъ одной и той же точки можно провести сколько угодно перпендикуляровъ, но каждый изъ нихъ потребуетъ своей плоскости Что касается книги, то края переплета, лежащіе на столѣ, будутъ порознь перпендикулярны къ корешку переплета Отсюда же ученикамъ можно добраться до полнаго уразумѣнія того, что всѣ перпендикуляры къ одной и той же прямой, проведенные изъ одной ея точки, лежатъ въ одной и той же плоскости, и до понятія о перпендикулярѣ къ плоскости Положеніе невидимыхъ плоскостей,

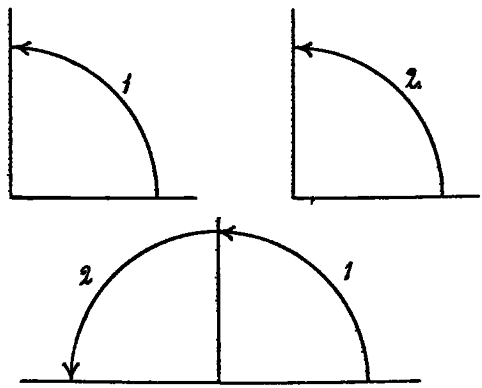


Къ № 140а.

въ которыхъ лежать взаимно перпендикулярныя прямыя, можно показать съ помощью ладони или, еще лучше, съ помощью линейки, переплета книги, куска бумаги Время, на это затраченное, окупится яснымъ уразумѣнiемъ учащимися одного изъ важнѣйшихъ вопросовъ о положенiи прямыхъ линiй въ пространствѣ

140б. Начертить два несмежныхъ прямыхъ угла.—Сложить два несмежныхъ прямыхъ угла —Отмѣтить сумму этихъ двухъ угловъ одной дугою

140в. Начертить уголъ, который меньше прямого угла. Начертить уголъ, который больше прямого угла, но меньше суммы двухъ прямыхъ угловъ —Какъ называется уголъ, который меньше прямого угла? (Острымъ).—Какъ называется уголъ, который больше прямого угла, но меньше суммы двухъ прямыхъ угловъ? (Тупымъ) —Отчего я прибавилъ слова: «но меньше суммы двухъ прямыхъ угловъ»? (Оттого,



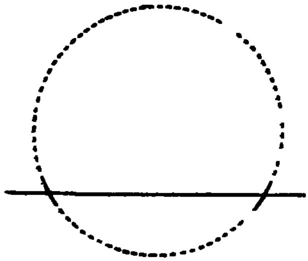
Къ № 140б

что сумму двухъ прямыхъ угловъ нельзя называть тупымъ угломъ) —Можно ли называть тупымъ угломъ такой уголъ, который больше суммы двухъ прямыхъ угловъ? (Тоже нельзя).—Прямой, острый и тупой углы называются иногда *выпуклыми* углами, «уголъ», равный суммѣ двухъ прямыхъ угловъ, называютъ иногда «выпрямленнымъ» или «развернутымъ» угломъ, а уголъ, превосходящій сумму двухъ прямыхъ угловъ на нѣкоторый выпуклый уголъ — «вогнутымъ».

Что сумма двухъ прямыхъ угловъ (и что сумма двухъ прямыхъ угловъ съ нѣкоторымъ третьимъ, выпуклымъ, угломъ) называются тоже углами ради *обобщенія* понятія объ углѣ, скрывать отъ учениковъ не надо. Они поймутъ, почему угломъ называется то, что на уголъ не похоже, если понятіе это связать со сложеніемъ угловъ Надо только не бояться разъясненій.

142. Начертить прямую въ плоскости и взять точку, которая лежала бы въ той же плоскости, но внѣ прямой и внѣ ея продолженій —Обыкновенно говорятъ короче, а именно: взять точку «внѣ данной прямой», и это всегда значитъ, что ихъ надо взять въ одной и той же плоскости, и что точка лежитъ внѣ прямой и внѣ ея продолженій.

143. Взять прямую и внѣ ея точку, взять точку на этой прямой, принять первую точку за центръ, а прямую, которою можно соединить эти двѣ точки,—за радіусъ окружности, провести окружность и отдать себѣ отчетъ въ томъ, есть ли у взятой прямой и окружности еще одна общая точка, или же у окружности и прямой только одна общая точка —Выполнить такой чертежъ нѣсколько разъ —Если у безконечной прямой и окружности двѣ общія точки (двѣ точки взаимнаго пересѣченія), то прямая называется *сѣкущею* данной окружности —Начертить сначала окружность, а потомъ провести какую-нибудь сѣкущую —Какъ это сдѣлать? (Взять двѣ точки окружности и черезъ нихъ провести прямую)

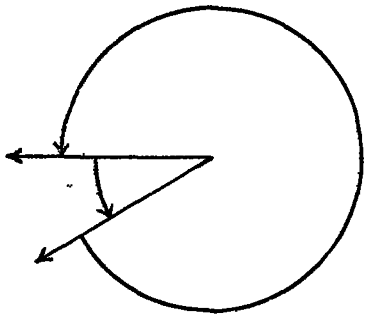


Къ № 143

144. Взять въ плоскости конечную прямую и изъ одного ея конца провести перпендикулярную къ ней прямую. (Для этого прежде всего придется продолжить конечную прямую).

144а. Начертить окружность и провести одинъ ея радіусъ. центръ окружности считаютъ началомъ радіуса, а общую точку радіуса и окружности—концомъ радіуса

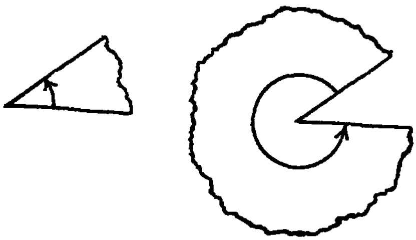
144б. Начертить окружность, провести одинъ ея радіусъ, изъ конца его провести къ нему перпендикуляръ и этотъ перпендикуляръ продолжить въ прямо-противоположномъ направлении —Сколько общихъ точекъ у этого перпендикуляра и окружности? (Одна всѣ остальныя точки прямой лежатъ внѣ круга).—Если у безконечной прямой и у окружности круга только одна общая точка, то говорятъ, что эта прямая—касательная къ окружности или къ кругу,



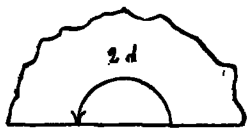
Къ № 181

ютъ въ виду меньшій изъ двухъ «угловъ», образованныхъ этими прямыми

183. *Начертить два отдѣльныхъ прямыхъ угла и сложить ихъ* —Можно ли ихъ сумму тоже называть угломъ? (Называютъ, коли и эту сумму называть угломъ, то можно сказать, что если изъ точки на плоскости провести въ этой плоскости двѣ прямыя *въ какихъ бы то ни было* направленіяхъ, то при этомъ получается уголъ или, вѣрнѣе, два угла) —Уголъ, полученный отъ сложенія двухъ прямыхъ угловъ, такъ и называютъ *угломъ, который равенъ суммѣ двухъ прямыхъ* —Прямой уголъ



Къ № 181

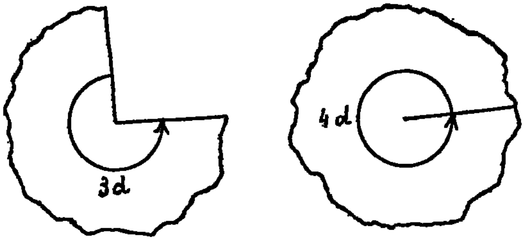


Къ № 183

часто обозначается на письмѣ французской буквою d, начальной буквой французскаго слова droit, обозначающаго «прямой» —Сумму двухъ прямыхъ угловъ можно обозначать такъ $d+d$, или $d.2$, или просто $2d$.

184. Начертить, отдѣльно одинъ отъ другого, четыре прямыхъ угла и найти ихъ сумму —Можно ли эту сумму тоже называть угломъ? (Можно) —Какое направленіе имѣютъ обѣ стороны этого угла? (Одно и то же) —Этотъ уголъ равенъ суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ.

Если изъ куска бумаги вырѣзывать углы, то ихъ неопредѣленное «отверстіе» надо обрывать неровно, чтобы не получалось прямолинейной фигуры. — Если изъ бумаги надо вырѣзать «уголъ», равный суммѣ двухъ прямыхъ угловъ, то надо взять обрывокъ бумаги, котораго одинъ край прямая линія, и, сверхъ того, обозначена точка — «вершина» угла Если надо прибѣгнуть къ «модели» угла, равнаго суммѣ трехъ прямыхъ угловъ, то обрывокъ долженъ имѣть соотвѣтственную форму Наконецъ, для угла, равнаго суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ, можно взять обрывокъ бу-

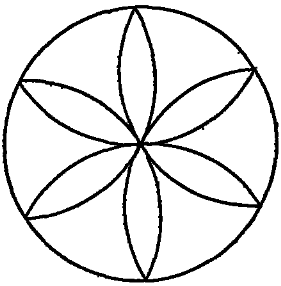


Къ № 184

маги съ прямымъ надрѣзомъ, при чемъ внутренній конецъ надрѣза служитъ вершиной этого угла Этотъ надрѣзъ есть наглядный образъ угла, равнаго нулю.—Не надо при этомъ думать, что такая наглядность можетъ быть вредна для истинно-научнаго построенія этихъ понятій Наоборотъ, на фундаментѣ ясныхъ и наглядныхъ представленій научныя понятія строятся гораздо прочнѣе, чѣмъ безъ этого фундамента

185. Начертить два различныхъ угла и вычесть меньшій изъ бо́льшаго — Начертить два одинаковыхъ угла и вычесть одинъ изъ другого — Можно ли говорить, что разность между двумя различными углами — тоже уголъ? (Можно). — Можно ли говорить, что разность между двумя одинаковыми углами—тоже уголъ? (Можно, но тогда говорятъ, что этотъ уголъ равенъ нулю).—Если въ плоскости изъ одной ея точки провести два луча въ одномъ и томъ же направлeніи, то можно сказать, что при этомъ образовалось два угла одинъ, равный нулю, а другой, равный суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ.

187. Взять точку на плоскости, провести изъ нея одинъ лучъ въ одномъ направленіи, другой—въ прямо-противоположномъ, и рядъ лучей, лежащихъ по одну сторону обоихъ первыхъ лучей, принять уголъ, образованный первымъ лучомъ со слѣдующимъ за нимъ, за первый уголъ, слѣдующій уголъ—за второй и т д. до послѣдняго включительно, и разобраться въ томъ, чему равна сумма всѣхъ этихъ, послѣдовательно прилежащихъ одинъ къ другому, угловъ

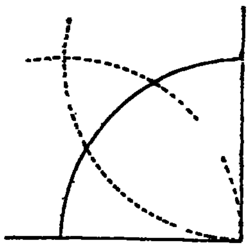


Къ № 188

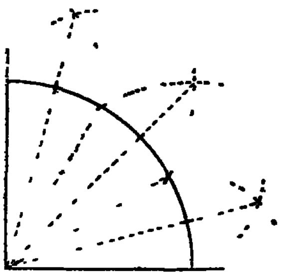
188. Начертить окружность, одну точку ея принять за центръ и тѣмъ же радіусомъ провести внутри круга такую часть новой окружности, чтобы концы ея лежали на первой окружности, одинъ изъ этихъ концовъ принять за центръ и тѣмъ же радіусомъ провести снова дугу внутри перваго круга и т. д, т-е начертить «розетку» —На сколько частей раздѣлена *данная окружность?*—*Одинаковы* ли эти части?

188a. Раздѣлить окружность на 12 одинаковыхъ частей.—Сколько *такихъ частей содержится въ полуокружности?*—Сколько—въ четверти окружности?—*Раздѣлить прямой уголъ на три одинаковыя части* (стр. 57) —Можно иначе. начертимъ дугу прямого угла, тѣмъ же радіусомъ сдѣлаемъ засѣчку на этой дугѣ, а бо̀льшую изъ полученныхъ дугъ раздѣлимъ пополамъ, точки пересѣченія соединимъ съ вершиной прямого угла.

190. Раздѣлить, съ помощью линейки и циркуля, дугу центральнаго прямого угла пополамъ —Раздѣлить, съ помощью линейки и циркуля, прямой уголъ пополамъ —Раздѣлить дугу прямого угла на три одинаковыя части, средняя треть будетъ раздѣлена пополамъ —Раздѣлить также каждую изъ остальныхъ двухъ третей дуги прямого угла пополамъ.— На сколько одинаковыхъ частей будетъ раздѣлена дуга прямого угла? (На шесть одинаковыхъ частей).—Раздѣлить,— но уже «на-глазъ», по глазомѣру,—каждую шестую долю дуги прямого угла на 3 одинаковыя части —Циркулемъ



Къ № 188а.



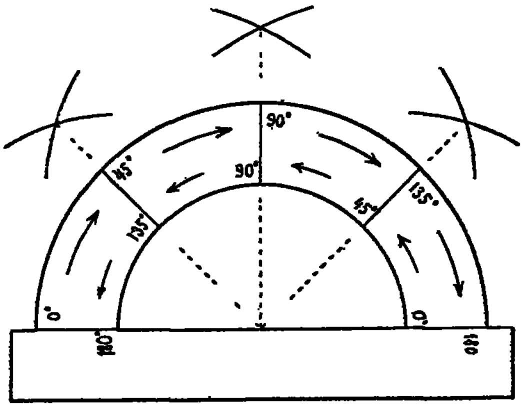
Къ № 190

только *провѣрить,* достаточно ли хорошо мы сдѣлали послѣднее дѣленіе, и исправить ошибку, если таковая окажется —Раздѣлить полученную 18-ую долю дуги прямого угла, хотя бы только мысленно, на 5 одинаковыхъ частей.— Одна 90-ая доля дуги прямого угла называется дугою въ одинъ «градусъ», дуговымъ градусомъ или просто градусомъ —Сколько градусовъ въ цѣлой окружности? Въ полуокружности? Въ шестой долѣ окружности?—Прямой уголъ состоитъ изъ девяноста одинаковыхъ угловъ, изъ которыхъ каждый называется угломъ въ одинъ градусъ, угловымъ градусомъ или просто градусомъ —Поэтому можно говорить. прямой уголъ содержитъ 90 угловыхъ градусовъ или просто. «въ прямомъ углѣ 90 градусовъ» —Пишутъ такъ 90°.

193. Начертить «транспортиръ»,—что можно—точно, а чего нельзя, то — на-глазъ

195. Съ помощью транспортира провѣрить углы линейки. — Узнать, сколько градусовъ содержитъ вырѣзанный изъ бумаги уголъ —Начертить уголъ въ 20°, 35°, 75° и т п

195а. Двѣ точки «опредѣляютъ» прямую линію, черезъ нихъ проведенную, т-е дѣлаютъ прямую совершенно опредѣленною. Что это значитъ? (Это значитъ, что если мы



Къ № 193

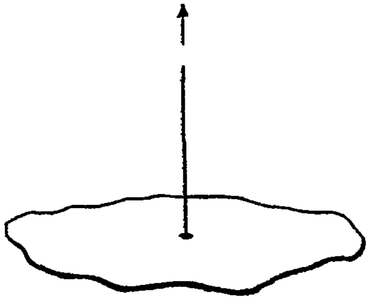
знаемъ двѣ точки, черезъ которыя проходитъ прямая, то мы знаемъ и всю прямую) —Если мы знаемъ, что какія-нибудь данныя двѣ точки лежатъ внутри какого-то угла, знаемъ ли мы этотъ уголъ? (Нѣтъ) —Что мы должны знать для этого, чтобы знать, о какомъ углѣ рѣчь? (Его вершину) —Достаточно ли этого? (Нѣтъ) —Почему?—Что еще? (Его сторону) —Достаточно ли этого? (Нѣтъ) —Почему?—Что еще? (Вторую сторону) —Достаточно ли этого? (Достаточно) —Нужно ли знать длину сторонъ? (Нѣтъ).—А если мы знаемъ, какія безконечныя прямыя образуютъ уголъ, достаточно ли этого? (Нѣтъ) —Почему? (Потому что двѣ безконечныя прямыя, если мы не знаемъ ихъ направленія, образуютъ 4 угла) —Что нужно знать для того, чтобы знать, о какомъ углѣ рѣчь? (Надо знать направленія прямыхъ) —А если знаемъ вершину, одну сторону и дугу этого угла, достаточно ли этого? (Достаточно) —Чтобы знать уголъ, надо знать 1) вершину его и по одной точкѣ на его сторонахъ, или 2) прямыя, на которыхъ лежатъ стороны угла, и ихъ направленія, или 3) вершину, одну изъ его сторонъ, число градусовъ и направленіе дуги этого угла, если вершина его принята за центръ нѣкоторой окружности, пересѣкающей стороны угла.

На этой ступени учитель можетъ подойти къ понятію о направленіи угла, весьма важному на нѣкоторыхъ другихъ ступеняхъ математическаго знанія

***1956.** Представьте себѣ прямую не въ плоскости, а въ *пространствѣ*, безъ плоскости, можно ли провести «черезъ эту прямую» какую-нибудь плоскость? (Можно).—Что это значитъ? (Это значитъ провести какую-нибудь плоскость такъ, чтобы прямая оказалась на этой плоскости) —Можно ли себѣ представить, что эта прямая сдѣлалась осью вращенія плоскости? (Можно) —«Взять» прямую въ пространствѣ и точку внѣ ея и внѣ ея продолженій, можно ли провести плоскость черезъ эту прямую и эту точку? (Можно) —Сколько плоскостей можно провести черезъ одну прямую? (Сколько угодно) —Можно ли провести плоскость черезъ прямую и точку, взятую внѣ ея и внѣ ея продолженій? (Можно) —Сколько можно провести плоскостей черезъ прямую линію и точку, взятую внѣ ея и внѣ ея продолженій? (Одну) —Изъ точки, взятой въ пространствѣ (не въ плоскости), провести двѣ прямыя въ различныхъ, но не прямопротивоположныхъ направленіяхъ, можно ли провести «черезъ эти двѣ прямыя» плоскость? (Можно) —Сколько можно провести плоскостей черезъ двѣ взаимно пересѣкающіяся прямыя? (Одну).—Сколько—черезъ три точки, не лежащія на одной прямой линіи? (Одну).

Развивать пространственное, а не только «плоскостное» воображеніе учащихся на этой ступени не рано Трудность, хотя и незначительную, представляетъ собою то, что чертить здѣсь нечего, и что «брать» прямыя и точку, а равно проводить плоскости приходится только съ помощью воображенія Поэтому надо заставить учениковъ поработать надъ мысленнымъ проведеніемъ плоскостей черезъ точки, «взятыя» въ классѣ провести плоскость черезъ прямую, соединяющую такую-то вершину рамы классной доски и такую-то вершину учительскаго стола, или черезъ острія трехъ карандашей трехъ учениковъ, которыхъ надо пригласить держать карандаши такъ, чтобы они были видны остальнымъ ученикамъ, и т д Для нагляднаго указанія мѣста, занимаемаго плоскостью, полезно прибѣгать къ длинной указкѣ, прорѣзывающей воздухъ въ этомъ мѣстѣ Бояться, что это сближеніе работы воображенія учениковъ съ жизнью можетъ повредить классной дисциплинѣ, не слѣдуетъ Лучше примириться съ нѣкоторымъ нарушеніемъ классной дисциплины, которое легко устранить, чѣмъ заставлять учениковъ на урокахъ математики только заучивать опредѣленія и теоремы Отсутствіе у дѣтей развитого пространственнаго воображенія крайне вредно отзывается и на урокахъ по нѣкоторымъ другимъ предметамъ Ученикамъ приходится встрѣчаться, напр , на урокахъ географіи, съ понятіями о горизонтѣ, о широтѣ и долготѣ мѣста, о земной оси и полюсахъ, о меридіанахъ и параллельныхъ кругахъ и т п , и въ результатѣ получается, что ученикамъ, по причинѣ ихъ полной безпомощности въ вопросахъ геометріи, приходится опредѣленія, для нихъ почти совершенно не доступныя, только выучивать наизусть

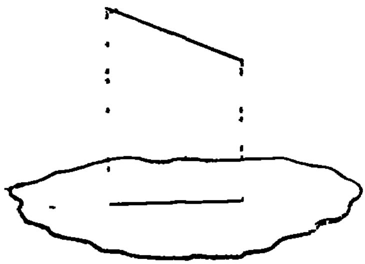
***195в** «Нарисовать» часть плоскости и перпендикуляръ къ ней, возставленный изъ точки, взятой на этой плоскости — Нарисовать плоскость, взять внѣ ея точку и изъ этой точки опустить перпендикуляръ на эту плоскость — Представить это на плоскости стола съ помощью ручки отъ пера, карандаша и т. п —Основаніе этого послѣдняго перпендикуляра называется *проекціей* данной точки на данную плоскость



Къ № 195в

На многихъ ступеняхъ обученія элементарной геометріи ученики склонны смѣшивать *чертежъ* съ *рисункомъ*. Требуется ли раздѣлить уголъ или прямую пополамъ, построить равнобедренный треугольникъ, провести перпендикуляръ къ данной прямой, ученики вначалѣ склонны рѣшать эти задачи на-глазъ, не понимая, что тогда они рисуютъ, а не чертятъ. Поэтому ихъ надо пріучить къ мысли, что чертежъ требуетъ точнаго употребленія чертежныхъ инструментовъ.—При занятіяхъ вопросами №№ 195в—195е ученики должны *рисовать*, по возможности съ натуры, имѣя предъ глазами куски картона и палочки и вполнѣ сознавая, что они именно рисуютъ, а не чертятъ Ближайшій къ зрителю край участка плоскости можно рисовать болѣе толстой линіей

***195г.** Взять плоскость и внѣ ея двѣ точки, соединить эти точки прямою, изъ нихъ опустить по перпендикуляру на плоскость —Основанія этихъ перпендикуляровъ будутъ *проекціями* данныхъ двухъ точекъ на данную плоскость —Соединить эти проекціи прямою —Эта прямая называется проекціею прямой на данную плоскость —Выполнить это «въ воздухѣ» надъ каран-

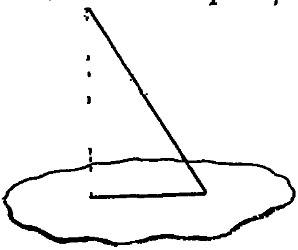


Къ № 195г

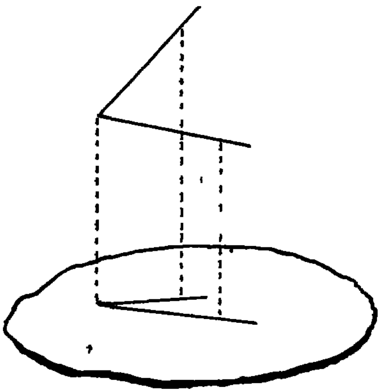
дашомъ и плоскостью стола —Можетъ ли карандашъ занимать такое положеніе, чтобы проекція его не была прямой линіей?—Можетъ ли прямая линія въ пространствѣ имѣть проекцію, отличающуюся отъ прямой? (Можетъ если прямая перпендикулярна къ плоскости проекціи, то проекціей прямой будетъ точка) —Перпендикуляръ, опущенный изъ данной точки на плоскость, называется *проектирующею* прямою —Проведемъ мысленно плоскость черезъ проектирующія прямыя концовъ даннаго отрѣзка, эта плоскость называется проектирующею плоскостью даннаго отрѣзка

Учителю нечего бояться, что ученики этого не поймутъ Хотя они теоремъ о перпендикулярѣ къ плоскости еще не «учили», но ежедневная жизнь переполнена примѣрами на перпендикуляры къ плоскости. Весь вопросъ только въ томъ, чтобы ученикъ эти примѣры видѣлъ и сознавалъ, что ихъ видитъ Всѣ столбы, растенія, постройки, многіе предметы доставляютъ подходящій для этихъ примѣровъ матеріалъ Когда ученику говорятъ стойте «прямо», когда у него изъ руки падаетъ мячъ, когда ему говорятъ «бросьте мячъ прямо вверхъ» и т п , то у него ясное представленіе о перпендикулярѣ къ плоскости есть Когда ему на урокѣ географіи говорятъ о горизонтѣ, о длинѣ тѣни, отбрасываемой такъ наз «гномономъ» на горизонтальную плоскость въ полдень, объ антиподахъ и т п , то уже предполагаютъ, что представленіе о перпендикулярѣ къ плоскости у него есть Понятно, что въ интересахъ образованія учениковъ учитель математики не долженъ быть бо́льшимъ педантомъ, чѣмъ всѣ остальные учителя отъ этого образованіе только потеряетъ Строгимъ доказательствамъ и систематизаціи *познаній* должно отвести свое мѣсто въ курсѣ уже послѣ того, какъ соотвѣтствующія ясныя геометрическія представленія учениками пріобрѣтены

***195д.** Изъ точки, взятой внѣ плоскости, опущенъ на нее перпендикуляръ, сверхъ того, она соединена съ какою-либо точкой плоскости прямою.—Эта вторая прямая называется *наклонной* къ плоскости —Если соединить ея основаніе съ основаніемъ перпендикуляра прямою, то эта прямая называется *проекціей* на-



Къ № 195д



Къ № 195е

клонной на данную плоскость —Какая плоскость будетъ проектирующей? (Плоскость, проведенная черезъ перпендикуляръ и наклонную)

***195е.** Дана плоскость и уголъ внѣ ея, нарисовать ихъ, а также проекцію угла на данную плоскость.—Равенъ ли уголъ своей проекціи?—Отдать себѣ отчетъ въ томъ когда уголъ можетъ равняться своей проекціи —Для этого нужно особенное положеніе сторонъ угла —Можетъ ли проекція угла быть прямой линіей? (Можетъ, а именно тогда, когда уголъ лежитъ въ проектирующей плоскости)

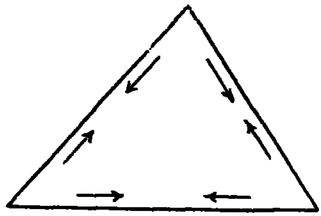
Выяснить эти геометрическія представленія можно и слѣдуетъ только наглядно, «въ воздухѣ», съ помощью куска бумаги, изображающаго уголъ, и т п Каждый ученикъ долженъ поупражняться въ этомъ направленіи, проводить проектирующія прямыя въ воздухѣ указательнымъ пальцемъ, а проектирующія плоскости—ладонью свободной руки Упражненія эти въ высшей степени полезны для постепеннаго и планомѣрнаго развитія пространственнаго воображенія учениковъ Бояться появленія терминовъ «параллельныя

ГЛАВА ВТОРАЯ.

Треугольники, параллельныя прямыя и многоугольники.

§ 4. Треугольники, ихъ элементы, равенство и подобіе

201. Взять на плоскости двѣ точки, а внѣ прямой, которую можно провести черезъ нихъ, еще одну точку, соединить прямыми линіями первую со второю, первую съ третьею и вторую съ третьей —Получится «фигура» — Скольько у нея «вершинъ»? Сколько сторонъ? — Считаютъ, что каждую сторону этой фигуры можно взять въ любомъ изъ двухъ ея направлений — Сколько у нашей фигуры угловъ? Какъ называется эта фигура? (Треугольникомъ) — Какъ начертить треугольникъ? (Надо взять три точки, не лежащія на одной прямой,



Къ № 201

соединить первую точку съ остальными двумя, а затѣмъ вторую съ третьей) —Можно ли соединять точки въ иномъ порядкѣ? (Можно) —Нельзя ли иначе начертить треугольникъ? (Можно проведемъ въ плоскости изъ одной ея точки двѣ конечныя прямыя не въ одномъ и томъ же и не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ и соединимъ остальные два конца этихъ прямыхъ третьей прямою);

202. Начертить треугольникъ, отмѣтить стрѣлками направленія сторонъ каждаго угла и начертить дуги этихъ угловъ въ направленіяхъ, обратныхъ движенію часовой стрѣлки

202а. Стороны треугольника и его углы называются (безразлично) *элементами* треугольника, иногда (но неправильно) — *частями* треугольника

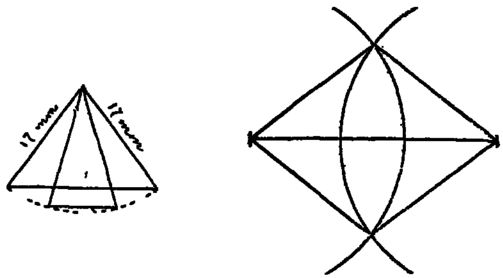
Хотя слово «элементъ» и иностранное слово, но только по этой причинѣ избѣгать его не слѣдуетъ Дѣло въ томъ, что *частью* фигуры можетъ быть тоже только фигура, притомъ замкнутая, сторона же треугольника не есть фигура, да и уголъ не замкнутая фигура Когда говорятъ «часть треугольника», то подъ этимъ разумѣютъ дѣйствительную его часть, о которой можно сказать, что она *меньше* всего треугольника, о сторонѣ же треугольника нельзя говорить, что она меньше треугольника, да и объ углѣ ничего подобнаго говорить нельзя. Поэтому ни сторона, ни уголъ не могутъ быть частями треугольника Это можно ученикамъ выяснить, основываясь на выше намѣченномъ Если бы оказалось, что слово «элементъ» ученикамъ не вполнѣ понятно, то этимъ не должно смущаться, а тѣмъ болѣе руководиться при замѣнѣ его другимъ словомъ, не выражающимъ того же, что обозначается словомъ «элементъ». А именно такимъ неподходящимъ словомъ является слово «часть». Для лучшаго выясненія понятія объ элементѣ можно прибѣгнуть къ фактамъ вода состоитъ изъ двухъ *элементовъ:* кислорода и водорода, но это не значитъ, что кислородъ — часть воды То же справедливо относительно сѣрной кислоты, состоящей изъ сѣры, водорода и кислорода, и т п Какъ бы мало ученики ни знали изъ области химіи, подобными примѣрами можно оправдать появленіе и выяснить смыслъ иностраннаго слова «элементъ»

202б. Какіе элементы у угла? (Двѣ стороны).

204. Начертить уголъ, меньшій, чѣмъ 180°, взять на сторонахъ его по одной точкѣ и соединить эти двѣ точки

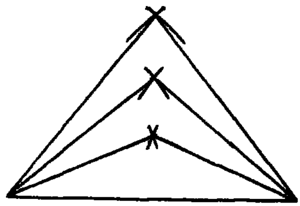
206. Начертить отрѣзокъ прямой, принять его начало и конецъ за центры двухъ окружностей одинаковаго радіуса, но радіусъ взять бо̀льшій, чѣмъ половина начерченнаго отрѣзка, и соединить точки пересѣченія окружностей съ концами отрѣзка.—*Начертить какой-нибудь равнобедренный треугольникъ*.—Начертить равнобедренный треугольникъ, въ которомъ каждая изъ одинаковыхъ сторонъ равна 17 *мм*.—Много ли можно начертить такихъ равнобедренныхъ треугольниковъ?

Когда задача эта рѣшена учениками въ тетрадяхъ, полезно показать нѣкоторымъ изъ нихъ тѣ треугольники, которые начерчены ихъ товарищами, чтобы они воочію убѣдились въ томъ, что эти два *одинаковыхъ* элемента «не опредѣляютъ» равнобедреннаго треугольника.



Къ № 206

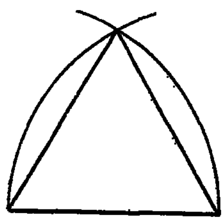
207 Начертить такой треугольникъ, относительно котораго мы знаемъ только то, что двѣ его стороны равны между собою, а третья равна 39 мм.—Начертить такой равнобедренный треугольникъ, въ которомъ уголъ, образованный одинаковыми сторонами, равенъ данному, а каждая изъ одинаковыхъ сторонъ равна 16 мм.—Начертить еще нѣсколько треугольниковъ, «удовлетворяющихъ этимъ условіямъ», и отдать себѣ отчетъ въ томъ, «совмѣстимы» ли эти треугольники одинъ съ другимъ или не совмѣстимы.—Что это значитъ: «треугольники совмѣстимы»?—Что это значитъ «углы совмѣстимы»?—Что это значитъ «прямыя линіи совмѣстимы»?—Что это значитъ: «дуги совмѣстимы»?—Что это значитъ «круги совмѣстимы»? — Что это значитъ «окружности совмѣстимы»?



Къ № 207

208. Начертить нѣсколько одинаковыхъ угловъ, на сторонахъ ихъ, отъ ихъ вершинъ, отложить равные отрѣзки и соединить концы отрѣзковъ, отложенныхъ на сторонахъ одного и того же угла Какія получатся фигуры? (Треугольники) —Какіе треугольники? (Равнобедренные).—Одинаковые ли это треугольники?—«Совмѣстимы» ли они?—Если данъ равнобедренный треугольникъ, то двѣ одинаковыя его стороны особеннаго названія не имѣютъ, а третья называется *основаніемъ* —Иногда одинаковыя стороны равнобедреннаго треугольника называются «боковыми» его сторонами

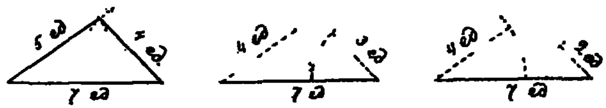
Въ началѣ можно равнобедренные треугольники чертить такъ, чтобы основанія ихъ имѣли приблизительно горизонтальное положеніе. Но впослѣдствіи непремѣнно нужно пріучать учениковъ къ тому, что это вовсе не обязательно для того, чтобы треугольникъ былъ равнобедреннымъ Ихъ необходимо отучать отъ дурной привычки связывать основныя свойства фигуръ съ ихъ случайнымъ положеніемъ на чертежѣ



Къ № 211

211. Начертить конечную прямую, принять ея концы за центры, а прямую за радіусы, и сдѣлать по одну ея сторону «засѣчку», и эту засѣчку соединить съ концами данной прямой —Какія стороны этого треугольника равны между собою? (Въ немъ всѣ три стороны равны между со-чертежи, выполняемые учителемъ на доскѣ, переносить въ свои тетради въ уменьшенномъ (конечно, на глазъ) масштабѣ Дѣлаютъ они это какъ на урокахъ математики, такъ и на урокахъ по другимъ предметамъ (географіи, естествовѣдѣнію) Бóльшая же сознательность (хотя бы сначала и не строго обоснованная) въ этомъ направленіи можетъ только послужить на пользу общаго образованія учениковъ. Умалчивать о столь важномъ свойствѣ фигуръ, какъ возможность подобія двухъ фигуръ разныхъ размѣровъ, притомъ умалчивать объ этомъ въ теченіе многихъ лѣтъ только потому, что полное ученіе объ этомъ излагается въ курсѣ одного изъ высшихъ классовъ, значитъ умышленно не вводить учениковъ въ интересы истиннаго математическаго образованія

239. «Построить» треугольникъ, въ которомъ стороны равны 7 мм, 5 мм и 4 мм —Построить треугольникъ, въ которомъ стороны равняются 10 мм, 6 мм и 5 мм и т п — Построить треугольникъ, въ которомъ стороны равны. 10 мм, 6 мм и 3 мм и т п (Невозможно) —Построить треугольникъ, въ которомъ стороны равны 12 см., 7 см. и 5 см (Невозможно).



Къ № 239

239a Даны три конечныя прямыя на доскѣ, построить треугольникъ, стороны котораго были бы «порознь» равны этимъ прямымъ, т-е одна изъ сторонъ равна одной изъ данныхъ прямыхъ, другая—другой, а третья — третьей

Можно брать сначала такія прямыя, которыя могутъ быть сторонами треугольника, потомъ — такія, чтобы сумма двухъ была меньше третьей, и, наконецъ, такія, чтобы сумма двухъ была равна третьей Упражняться въ рѣшеніи этихъ задачъ у доски должны по возможности всѣ ученики.

243 Начертить какой-нибудь треугольникъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, можетъ ли сумма двухъ сторонъ треугольника равняться третьей?—Можетъ ли сумма двухъ сторонъ треугольника быть меньше третьей его стороны?—Измѣреніемъ отдать себѣ отчетъ въ томъ, что отрѣзокъ прямой, заключенной между его концами, короче любой ломаной, заключенной между тѣми же концами —Провести прямую «между» данными двумя точками —Провести «между» тѣми же двумя точками ломаную, состоящую изъ двухъ прямыхъ —Которая линія короче? (Прямая короче ломаной, проведенной между тѣми же точками).—Убѣдиться въ этомъ измѣреніемъ —Какой путь отъ одной точки до другой короче прямой или ломаный?

245. Начертить нѣсколько треугольниковъ, въ которыхъ стороны одного «порознь» равны сторонамъ другихъ — Совмѣстимы ли эти треугольники?—Вмѣсто того, чтобы говорить, что два треугольника совмѣстимы, чаще говорятъ, что они «равны между собою».

Терминъ «равны между собою» слѣдовало бы относить только къ величинамъ Поэтому, напр, вполнѣ умѣстны выраженія «длина (или величина) одного отрѣзка прямой равна длинѣ (или величинѣ) другого», «вѣсъ одного тѣла равенъ вѣсу другого», «емкость одного сосуда равна емкости другого», «число градусовъ одного угла равно числу градусовъ другого» Объ отрѣзкахъ же прямой одинаковой длины, о самихъ углахъ, о треугольникахъ, если они совмѣстимы, слѣдовало бы говорить, что они совмѣстимы Вообще о двухъ фигурахъ, изъ которыхъ одна можетъ быть совмѣщена съ другой, можно было бы говорить, что онѣ совмѣстимы, если всѣ точки одной изъ нихъ могутъ слиться съ точками другой, а всѣ точки второй — съ точками первой Но въ русской математической литературѣ принято говорить, что такія фигуры (хотя онѣ и не представляютъ собою *величинъ въ истинномъ смыслѣ этого слова*) *равны между собою* За знакъ совмѣстимости двухъ фигуръ принимается знакъ равенства Въ западно-европейской же литературѣ часто пишутъ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, для обозначенія того, что эти треугольники совмѣстимы, въ то время какъ у насъ въ такомъ случаѣ пишутъ: $\triangle ABC = \triangle DEF$. Если за знакъ совмѣстимости принять двойной знакъ $\cong$ (подобія и равенства), то запись $\triangle ABC = \triangle DEF$ можетъ обозначать то, что площадь перваго изъ нихъ равна площади второго. У насъ для обозначенія равенства площадей пишутъ· пл $\triangle ABC =$ пл $\triangle DEF$ Но это, конечно, не столь существенно, существенно за-то самое понятіе о совмѣстимости (такъ наз «конгруентности»)

248. Начертить какой-нибудь треугольникъ, далѣе построить дугу одного изъ его угловъ и отдѣльно уголъ, равный этому углу, а на сторонахъ второго угла отложить отъ вершины угла стороны треугольника, образующія такой же уголъ въ данномъ треугольникѣ, и соединить концы отложенныхъ сторонъ прямою — Какая получится фигура? — Совмѣстимъ ли этотъ треугольникъ съ первымъ?

249. Построить треугольникъ, «равный данному», принимая во вниманіе только двѣ его стороны и уголъ, ими образованный.

251. Начертить какой-нибудь треугольникъ, провести дуги двухъ его угловъ, отложить сторону, заключенную между ихъ вершинами на какую-нибудь прямую, построить у концовъ этой прямой линіи углы треугольника такъ, чтобы они лежали по одну сторону этой прямой въ тѣхъ же направленіяхъ, какъ углы треугольника, и продолжить стороны этихъ угловъ до ихъ взаимнаго пересѣченія —Какая получится фигура? Совмѣстимъ ли этотъ треугольникъ съ первымъ?

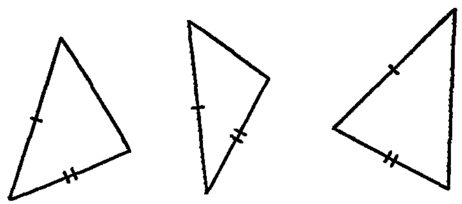
251а. Начертить какой-нибудь треугольникъ, провести дуги двухъ его угловъ, отложить въ другомъ мѣстѣ прямую, меньшую, чѣмъ сторона, заключенная между вершинами угловъ начерченнаго треугольника, построить у концовъ ея такіе же углы и продолжить стороны этихъ угловъ до взаимнаго ихъ пересѣченія. — Какая получится фигура? (Тоже треугольникъ) —Совмѣстимъ ли онъ съ первымъ? (Нѣтъ).—Похожъ ли онъ на него во всѣхъ отношеніяхъ, за исключеніемъ величины?

253 Построить треугольникъ, «равный данному», принимая во вниманіе только одну его сторону и оба угла, къ ней прилежащіе

255. Всякія ли три конечныя прямыя линіи могутъ быть сторонами треугольника?—*Построить треугольникъ по даннымъ тремъ сторонамъ его*

255а Опредѣляютъ ли три прямыя тотъ треугольникъ, въ которомъ онѣ служатъ сторонами? (Опредѣляютъ) —Что это значитъ? (Это значитъ, что сколько бы ни взять треугольниковъ, у которыхъ стороны порознь равны даннымъ тремъ прямымъ, всѣ эти треугольники равны между собою).—Вмѣсто этого говорятъ короче треугольникъ *опредѣляется* тремя его сторонами.

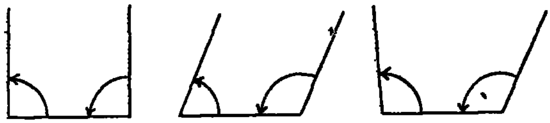
255б Опредѣляется ли треугольникъ своими двумя сторонами?—Построить три несовмѣстимыхъ треугольника, въ которыхъ двѣ стороны порознь одинаковы



Къ № 255б

Самыя выраженія «по даннымъ тремъ сторонамъ», «по двумъ сторонамъ и углу между ними» и т п требуютъ иногда поясненія для учениковъ, будучи для насъ совершенно ясными Такъ говорятъ только для краткости, вмѣсто того, чтобы говорить «построить такой треугольникъ, въ которомъ стороны были бы порознь равны даннымъ прямымъ» или «построить такой треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны были бы порознь равны даннымъ двумъ прямымъ, а уголъ, образованный этими двумя сторонами,—данному углу» и т п Тщательной проработки требуетъ также выраженіе «треугольникъ опредѣляется» и т п. не достаточно разъ или два въ классѣ произнести это выраженіе и на этомъ основаніи уже требовать отъ учениковъ, чтобы они вполнѣ понимали его смыслъ и вѣрно разбирались въ этой идеѣ Ср № 195а.

257. *Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ его и углу между ними* —Всякій ли уголъ можетъ быть угломъ треугольника? — Опредѣляется ли треугольникъ двумя сторонами и угломъ между ними? (Опредѣляется· неопредѣленнымъ остается только положеніе его въ пространствѣ).—Опредѣляется ли онъ только двумя сторонами?

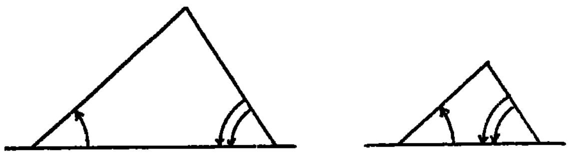


Къ № 259

259. Построить треугольникъ по одной сторонѣ его и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ —Всякіе ли два угла могутъ быть углами треугольника? (Нѣтъ, не всякіе). — Какіе два угла не могутъ быть углами треугольника?

Не бѣда, что для строгаго обоснованія первыхъ двухъ случаевъ требуются уже нѣкоторыя познанія изъ теоріи параллельныхъ линій и что вопросъ задачи соприкасается съ вопросомъ о суммѣ угловъ треугольника Достаточною подготовкой къ интуитивному освѣщенію этихъ случаевъ служатъ уже упражненія подъ № 204а Такое довѣріе къ непосредственному усмотрѣнію учениковъ и къ ихъ здравому смыслу тѣмъ дозволительнѣе, что и въ строго научной геометрической системѣ теорія параллельныхъ линій требуетъ установленія нѣкоторой аксіомы,—Евклидовой или другой — Важно, чтобы мысль о томъ, пересѣкутся ли данныя двѣ безконечныя прямыя, проведенныя въ извѣстныхъ направленіяхъ, или же не пересѣкутся, была оформлена, а не только имѣлась бы на лицо у учащихся въ видѣ несознанномъ и неформулированномъ, благодаря неупорядоченному и случайному внѣшкольному ихъ опыту

261. На прямой взято двѣ точки, принявъ ихъ за вершины, а эту прямую за общую сторону двухъ угловъ, начертить эти два угла и продолжить остальныя двѣ стороны до взаимнаго ихъ пересѣченія —На другой прямой взять двѣ точки на болѣе близкомъ одна отъ другой разстояніи и начертить, принявъ ихъ за вершины, два угла, порознь равные угламъ перваго треугольника —Похожи ли эти треугольники одинъ на другой? (Совершенно похожи, но одинъ меньше другого) —Исполнить нѣсколько такихъ же чертежей —Сравнить третьи углы полученныхъ треугольниковъ — Замѣтьте *если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другого треугольника, то и третьи углы ихъ тоже равны между собою*

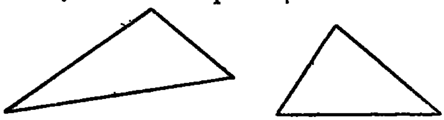


Къ № 261

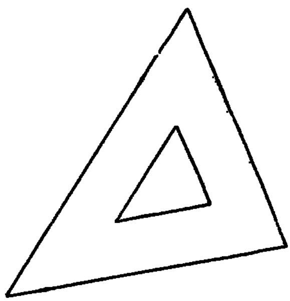
261а. Опредѣляется ли треугольникъ двумя своими углами? — Начертите нѣсколько несовмѣстимыхъ, но совершенно другъ на друга похожихъ треугольниковъ.

261б. Похожи ли треугольники (надо начертить на доскѣ) одинъ на другой? (Нѣтъ, не похожи) — Почему? (Потому что углы одного изъ нихъ отличаются отъ угловъ другого). — Могутъ ли быть похожи одинъ на другой такіе треугольники, въ которыхъ стороны разныя? (Могутъ). — Одинъ можетъ быть большой треугольникъ, а другой — значительно меньше, между тѣмъ они могутъ быть совершенно похожи одинъ на другой — При этомъ углы ихъ должны быть непремѣнно порознь равны между собою — Начертить два треугольника, у которыхъ одинъ уголъ одного равенъ одному углу другого, а остальные углы перваго порознь не равны остальнымъ угламъ другого — Можно ли считать, что такіе треугольники совершенно похожи одинъ на другой?

261в. Начертить какой-нибудь треугольникъ (какой угодно формы) и другой съ меньшими сторонами, но такой же точно формы, притомъ такъ, чтобы второй цѣликомъ ле-



Къ № 261б

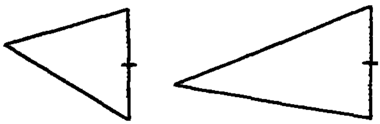


Къ № 261в

жалъ внутри перваго — Можно ли «нарисовать» что-нибудь (столъ или комодъ), а рядомъ «нарисовать» *то же самое*, но въ меньшихъ размѣрахъ? (Можно). — Если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другого, то треугольники имѣютъ одну и ту же форму. — Въ такихъ случаяхъ говорятъ, что одинъ треугольникъ «подобенъ» другому, или что они «подобны» другъ другу, или, короче, что эти треугольники «подобны».

Слово «подобенъ»—книжное слово Въ жизни оно обозначаетъ меньшее сходство, чѣмъ слово «похожъ» Въ математикѣ же оно обозначаетъ то же, что слова «совершенно похожъ, но, можетъ-быть, и не совмѣстимъ» Это учащеся должны усвоить

263. Какіе элементы *опредѣляютъ* треугольникъ? (Во-первыхъ, всѣ три его стороны, во-вторыхъ, двѣ его стороны и уголъ между ними, въ-третьихъ, одна сторона и два угла, къ ней прилежащіе) Опредѣляютъ ли треугольникъ три его угла? (Нѣтъ, не опредѣляютъ) —Опредѣляютъ ли его два угла? (Не опредѣляютъ) — Опредѣляютъ ли его двѣ стороны?—Опредѣляетъ ли его одинъ уголъ?—Начертите треугольникъ 1) по тремъ его сторонамъ, 2) по двумъ его сторонамъ и углу между ними, 3) по одной сторонѣ и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ — Начертите два несовмѣстимыхъ треугольника 1) по двумъ ихъ угламъ, 2) по двумъ ихъ сторонамъ, 3) по одной ихъ сторонѣ



Къ № 263

263а. Построить треугольникъ, у котораго углы порознь равны слѣдующимъ (надо начертить три острыхъ угла, которыхъ сумма меньше суммы двухъ прямыхъ) — Оказывается, что два угла порознь равны двумъ даннымъ угламъ, а третій больше —Построить треугольникъ, у котораго углы порознь равны слѣдующимъ (надо взять острые углы, которыхъ сумма больше суммы двухъ прямыхъ угловъ).— Оказывается, что два угла треугольника порознь равны двумъ даннымъ угламъ, а третій получился, *независимо отъ насъ*, такой, что онъ не равенъ третьему изъ взятыхъ угольниковъ. Представленіе это полезно также для упроченія ихъ знаній о трехъ признакахъ *равенства* этихъ фигуръ.

263б. Можно ли всегда наложить одинъ треугольникъ на другой?—Напримѣръ, если одинъ треугольникъ начерченъ на доскѣ въ одномъ классѣ, а другой — на доскѣ въ другомъ классѣ?—Одинъ треугольникъ начерченъ въ Москвѣ, а другой—въ Петербургѣ?—Одинъ—на потолкѣ, а другой—на полу? — Могу ли, не видѣвъ, какой треугольникъ начерченъ моимъ пріятелемъ въ Москвѣ, начертить такой же здѣсь? (Можете) — Что мнѣ для этого надо знать? (Надо знать, какова длина каждой стороны его треугольника) — А если онъ сообщитъ мнѣ длину только двухъ сторонъ своего треугольника,—чего мнѣ не будетъ хватать? — А *если онъ мнѣ еще сообщитъ, какъ великъ уголъ между сторонами*, — довольно ли мнѣ будетъ этого? (Довольно) — Можно ли, не накладывая одинъ треугольникъ на другой, какъ-нибудь иначе узнать, равны ли они? — Есть *признаки*, по которымъ можно судить объ этомъ — Это значитъ, что накладывать одинъ треугольникъ на другой нѣтъ надобности для того, чтобы узнать, равны ли они, а достаточно *знать* признаки равенства треугольниковъ — Каковы эти «признаки»?

263в. Замѣтьте если три стороны одного треугольника порознь равны тремъ сторонамъ другого, то треугольники *равны* между собою, если же три стороны одного порознь не равны тремъ сторонамъ другого, то треугольники между собою не равны — Можно измѣрить только двѣ стороны въ одномъ и двѣ стороны въ другомъ, затѣмъ сравнить углы между ними если окажется, что двѣ стороны одного треугольника равны двумъ сторонамъ другого и углы, заключенные между ними, тоже между собою равны, то такіе треугольники равны между собою, если же никакія двѣ ихъ стороны порознь не равны между собою, или если двѣ стороны одного равны, а углы между ними не равны, то треугольники тоже не равны между собою. Это — второй признакъ равенства треугольниковъ. — Третій признакъ если одна сторона одного треугольника равна одной сторонѣ другого и углы, къ нимъ прилежащіе, порознь равны между собою, то треугольники равны между собою, если ни одна сторона одного треугольника не равна ни одной сторонѣ другого, или же если одна сторона равна одной сторонѣ другого, а углы, къ ней прилежащіе, порознь не равны между собою, то треугольники не равны между собою —По этимъ тремъ признакамъ можно, не накладывая одного треугольника на другой, а только зная о равенствѣ нѣкоторыхъ ихъ *элементовъ*, судить о томъ, равны ли данные два треугольника между собою или же не равны, или, иначе говоря, совмѣстимы ли они или не совмѣстимы

Для того, чтобы данное свойство двухъ треугольниковъ было *признакомъ* ихъ равенства, необходима справедливость двухъ теоремъ прямой и противоположной Такъ, напримѣръ, нельзя считать признакомъ слѣдующую теорему если въ двухъ треугольникахъ всѣ шесть сторонъ одинаковы, то такіе треугольники равны между собою Ибо этого только достаточно для ихъ равенства, но это вовсе не необходимо

265. Построить какой-нибудь *прямоугольный* треугольникъ —Что мы раньше всего начертимъ для рѣшенія этой задачи? (Прямую линію) —А потомъ?

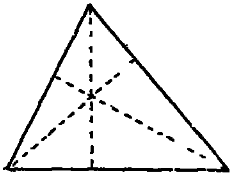
Важно, чтобы учащіеся обратили вниманіе на то, что намъ требуется *прямоугольный* треугольникъ, и что поэтому нуженъ прямой уголъ

266. Стороны прямого угла прямоугольнаго треугольника наз его *катетами* —Сколько прямыхъ угловъ въ прямоугольномъ треугольникѣ? (Одинъ).—Сколько въ немъ катетовъ? (Два).—*Построить прямоугольный треугольникъ по двумъ катетамъ его* —Что это значитъ?—Это знаблагодаря такой проработкѣ, ученики легко усвоятъ термины «катетъ» и «гипотенуза» и лучше уяснятъ себѣ, что это значитъ, когда говорятъ, что данная фигура «опредѣляется» такими-то элементами

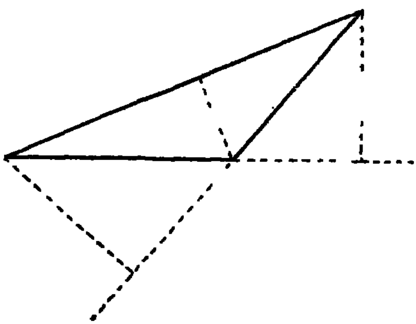
268б. А какой намъ извѣстенъ признакъ *подобія* треугольниковъ? (Одинъ если два угла одного порознь равны двумъ угламъ другого, то треугольники подобны, если же два угла одного треугольника не равны порознь никакимъ двумъ угламъ другого, то эти треугольники не подобны).

270. Построить остроугольный треугольникъ и изъ одной его вершины опустить перпендикуляръ на противолежащую сторону.—Если изъ вершины треугольника опущенъ перпендикуляръ на противолежащую сторону, то эта послѣдняя называется *основаніемъ* треугольника, и перпендикуляръ — *высотой* его —Сколько у построеннаго остроугольнаго треугольника высотъ?—Замѣтьте высоты остроугольнаго треугольника взаимно пересѣкаются въ одной и той же точкѣ

272. Построить тупоугольный треугольникъ и изъ вершины тупого угла его опустить перпендикуляръ на противолежащую сторону —Построить тупоугольный треугольникъ и опустить перпендикуляръ изъ вершины одного изъ *острыхъ* угловъ тупоугольнаго треугольника на противолежащую сторону. — Какъ это сдѣлать? (Надо сначала *продолжить* противолежащую сторону) —Сколько



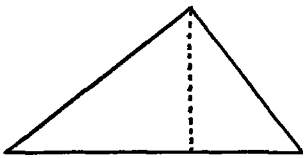
Къ № 270



Къ № 272

высотъ у тупоугольнаго треугольника? (Три) —Пересѣкаются ли онѣ на чертежѣ? (Нѣтъ) —Замѣтьте если ихъ надлежащимъ образомъ продолжить, то онѣ должны пересѣчься въ одной точкѣ

274. Построить прямоугольный треугольникъ и изъ вершины прямого его угла опустить перпендикуляръ на гипотенузу — Сколько высотъ у прямоугольнаго треугольника? (Три). — Гдѣ онѣ? — Одну мы провели, а остальныя? (Остальныя двѣ высоты — катеты прямоугольнаго треугольника) — А пересѣкаются ли всѣ эти три высоты въ одной точкѣ? (Пересѣкаются, и точка ихъ пересѣченія—вершина прямого угла)



Къ № 274

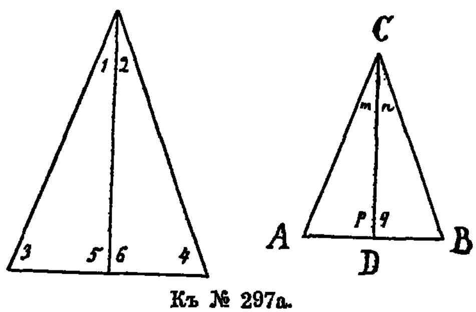
278. Построить какой-нибудь равнобедренный треугольникъ —Сколько у него вершинъ? (Три) —Но когда говорятъ о «вершинѣ равнобедреннаго треугольника», то имѣютъ въ виду только вершину того угла, который образованъ *одинаковыми* сторонами равнобедреннаго треугольника — Гдѣ вершина построеннаго нами равнобедреннаго треугольника?—А сколько у него высотъ? (Три) —Но когда говорятъ о высотѣ равнобедреннаго треугольника, то при этомъ обыкновенно имѣютъ въ виду ту высоту, которая проведена изъ вершины угла, образованнаго *одинаковыми* сторонами этого равнобедреннаго треугольника — А когда говорятъ объ основаніи равнобедреннаго треугольника, то говорятъ о третьей сторонѣ равнобедреннаго треугольника — Начертить еще нѣсколько разнообразныхъ треугольниковъ и ихъ высоты и указать, гдѣ ихъ вершины, гдѣ высоты и гдѣ основанія этихъ треугольниковъ.

278а. Начертить на полулистѣ бумаги равнобедренный треугольникъ и вырѣзать эту фигуру, положить ее на классную доску и обвести ея стороны мѣломъ, затѣмъ переверравнодѣлящую до пересѣченія съ противолежащей стороною —Разобраться въ томъ, что случилось бы, если бы мы повернули треугольникъ, лежащій по одну сторону этой равнодѣлящей, вокругъ этой послѣдней и поворачивали бы его до тѣхъ поръ, пока онъ ляжетъ на другой треугольникъ, лежащіи по другую сторону равнодѣлящей.

Это — одна изъ первыхъ попытокъ въ мысленномъ вращеніи и перемѣщеніи фигуръ, — попытокъ, которыя, конечно, должны *предшествовать* доказательствамъ, основаннымъ на мысленномъ вращеніи и перемѣщеніи фигуръ

297a. Какія стороны треугольниковъ совмѣстились? — Какіе углы совмѣстились?—Совмѣстились ли треугольники?

Здѣсь можетъ появиться надобность въ обозначеніи точекъ буквами Но нѣтъ необходимости непремѣнно сразу знакомить учащихся съ обозначеніемъ угловъ всѣми тремя буквами Достаточно, если они будутъ говорить, что CD—равнодѣлящая угла, что, при вращеніи II треугольника вокругъ равнодѣлящей, сторона CB совмѣстится со стороной CA, а вершина B съ вершиной A, отрѣзокъ DB съ отрѣзкомъ DA, уголъ B съ угломъ A, а уголъ при вершинѣ D въ одномъ треугольникѣ съ угломъ при вершинѣ D въ другомъ На первый разъ упражненія этого рода совершенно достаточны для уразумѣнія дѣтьми значенія



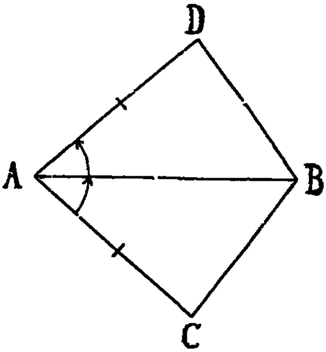
Къ № 297a.

букъвъ на чертежѣ Когда нѣсколько упражненій этого рода будетъ продѣлано и учащіеся вполнѣ освоятся съ существомъ дѣла, можно обратиться къ тому, что для обозначенія угловъ при вершинѣ D лучше придумать какое-нибудь особенное обозначеніе, чѣмъ каждый разъ говорить такъ много словъ «уголъ при вершинѣ D въ одномъ треугольникѣ» Можно обозначить углы цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 Можно обозначать отдѣльными буквами, не считая буквъ A и B Когда говорятъ объ углахъ A и B, то здѣсь не можетъ быть недоразумѣнія, затѣмъ равные между собою углы обозначимъ буквами m и n, а углы при точкѣ D—буквами p и q Въ свое время, но отнюдь не на первыхъ же порахъ, конечно, надо ознакомить съ необходимымъ, хотя и самымъ громоздкимъ способомъ обозначенія угла тремя буквами Но онъ необходимъ только тогда, когда другіе способы обозначенія оказываются менѣе удобными Когда наступитъ такой моментъ, учителю виднѣе Во всякомъ случаѣ, обозначенію угловъ тремя буквами должно предшествовать обозначеніе ихъ одной буквой, поставленной въ надлежащемъ мѣстѣ

297б. Какой выводъ (какое заключеніе) можно сдѣлать изъ нашей работы (надъ вращеніемъ одной части равнобедреннаго треугольника вокругъ равнодѣлящей его угла) ?— Выводъ такой если прямая дѣлитъ пополамъ уголъ при вершинѣ равнобедреннаго треугольника, то она — также равнодѣлящая его основанія, и она же—высота этого равнобедреннаго треугольника —Равнодѣлящая того угла равнобедреннаго треугольника, который образованъ одинаковыми его сторонами, дѣлитъ равнобедренный треугольникъ на двѣ части; симметричны ли онѣ?—Высота равнобедреннаго треугольника, равнодѣлящая его основанія и биссектриса— одна и та же прямая, слѣдовательно, можно сказать, что высота, или равнодѣлящая основанія, или биссектриса угла при вершинѣ равнобедреннаго треугольника дѣлитъ его на два симметричныхъ треугольника

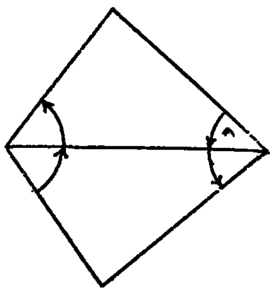
301. Построить равнобедренный треугольникъ по слѣдующимъ даннымъ. 1) даны его основаніе и одна изъ одинаковыхъ сторонъ, 2) основаніе и одинъ изъ угловъ, къ нему прилежащихъ, 3) основаніе и высота его, 4) высота и уголъ при вершинѣ, 5) высота и одна изъ одинаковыхъ его сторонъ.

311. Построить два треугольника, удовлетворяющихъ слѣдующимъ 4-мъ условіямъ 1) у нихъ одна общая сторона; 2) два угла, прилежащіе къ общей сторонѣ, симметричны, 3) на остальныхъ сторонахъ этихъ двухъ угловъ отложены два равныхъ отрѣзка; 4) концы этихъ двухъ отрѣзковъ соединены съ концомъ общей стороны —Равны ли эти два треугольника между собою или не равны?—Убѣдиться въ ихъ равенствѣ мысленнымъ вращеніемъ одного треугольника вокругъ общей стороны обоихъ треугольниковъ.

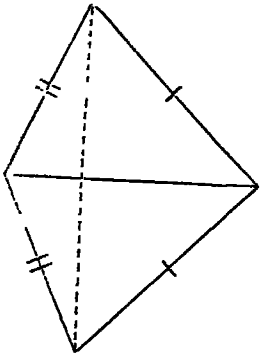


Къ № 311

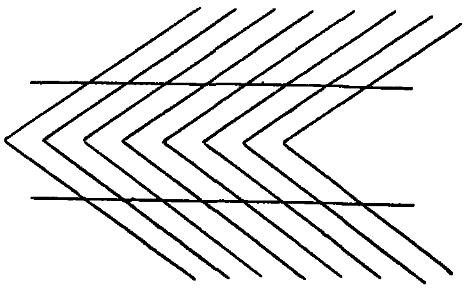
При этой работѣ учащіеся должны обращать вниманіе на то, *почему* сторона AC *пойдетъ* по сторонѣ AD и *почему* точка C попадетъ въ точку D Обыкновенно учащіеся систематически дѣлаютъ ошибку, полагая, что для того, чтобы одна прямая *пошла* по другой, необходимо ихъ равенство между собою, въ то время какъ для этого ихъ равенство вовсе не нужно, а необходимо равенство нѣкоторыхъ угловъ


Къ № 313

313. Построить два треугольника, удовлетворяющихъ слѣдующимъ условіямъ 1) у нихъ общая сторона, 2) углы, прилежащіе къ ней и имѣющіе общую вершину, попарно симметричны.—Отдать себѣ отчетъ въ томъ, совмѣстятся ли эти два треугольника, если одинъ



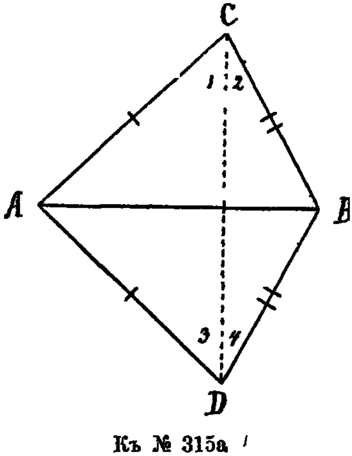
Къ № 315



Къ № 315 (прим.)

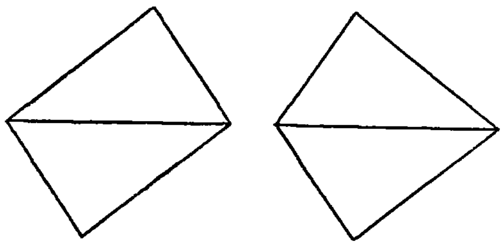
изъ нихъ оставить на своемъ мѣстѣ, а другой повернуть вокругъ общей стороны обоихъ треугольниковъ до совмѣщенія съ первымъ.

315. Построить два треугольника, удовлетворяющихъ слѣдующимъ условіямъ: 1) у нихъ общая сторона, 2) двѣ стороны, идущія отъ одного конца общей стороны, равны между собою, и 3) остальныя двѣ стороны, идущія отъ другого конца общей стороны, тоже равны между собою.—Попробуйте мысленнымъ вращеніемъ убѣдиться въ томъ, что треугольники совмѣстимы.—Вращеніемъ мысленнымъ въ этомъ убѣдиться невозможно.—Почему? (Потому что намъ ничего не извѣстно объ углахъ этихъ треуголь-



Къ № 315а

быть,—по крайней мѣрѣ, на первыхъ порахъ,—сколько-нибудь убѣдительнымъ и занимательнымъ —На этой же ступени полезно упражнять учащихся въ симметричномъ, относительно какой-либо начерченной на доскѣ прямой линiи, и несимметричномъ расположенiи двухъ фигуръ, въ такомъ «прикладыванiи» одной фигуры къ другой, при которомъ фигуры легли бы симметрично и несимметрично Здѣсь же умѣстны тѣ упражненiя съ равнобедреннымъ и равностороннимъ треугольниками, которыя показываютъ, что два равныхъ треугольника



Къ № 316 (прим)

этого рода, лежащiе въ одной плоскости, *всегда* могутъ быть совмѣщены, какъ бы они ни лежали, однимъ передвиженiемъ одного изъ нихъ въ плоскости Разносторонние же треугольники могутъ такъ лежать на плоскости, что, будучи равны одинъ другому, они для совмѣщенiя одного изъ нихъ съ другимъ требуютъ того, чтобы одинъ «вышелъ» изъ плоскости и повернулся бы вокругъ одной изъ своихъ сторонъ, какъ вокругъ оси

316а. Вырѣзать изъ бумаги два одинаковыхъ разностороннихъ треугольника а) по даннымъ тремъ сторонамъ, б) по двумъ сторонамъ и углу между ними и в) по сторонѣ и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ —Отдать себѣ отчетъ въ томъ 1) какiе углы въ равныхъ треугольникахъ лежатъ противъ равныхъ между собою сторонъ равные между собою или не равные, и 2) какiя стороны лежатъ противъ равныхъ между собою угловъ. равныя или не равныя?—Замѣтьте: 1) *въ одномъ и томъ же* треугольникѣ, если у него только есть равныя стороны, противъ этихъ равныхъ сторонъ лежатъ равные углы, 2) *въ одномъ и томъ же* треугольникѣ, если у него только есть *равные* между собою углы, противъ этихъ угловъ лежатъ одинаковыя стороны, 3) если же у насъ есть *два* треугольника, которые между собою равны, то противъ двухъ одинаковыхъ ихъ сторонъ лежатъ одинаковые углы, и противъ одинаковыхъ ихъ угловъ лежатъ одинаковыя стороны.—Разобрать всѣ случаи

Опытъ показываетъ, что ученики часто, въ особенности на первыхъ порахъ, не достаточно внимательны къ тому, что рѣчь въ одномъ случаѣ идетъ о двухъ равныхъ треугольникахъ, а въ другомъ—объ одномъ и томъ же треугольникѣ Поэтому они склонны иногда заключать о равенствѣ двухъ угловъ безъ достаточнаго къ тому основанія, особенно, если на чертежѣ углы кажутся равными, и т п А потому упражненія, указанныя въ № 316а, заслуживаютъ со стороны учителя бо́льшаго вниманія, чѣмъ то, какое этому, для учителя столь очевидному, вопросу иногда удѣляется.

316б. Начертите треугольникъ, въ которомъ двѣ стороны навѣрное не одинаковы, какіе углы имъ противолежатъ одинаковые или разные?—Замѣтьте: если двѣ стороны *одного и того же треугольника* не равны между собою, то противъ большей стороны лежитъ большій уголъ, а противъ меньшей—меньшій —Убѣдитесь въ этомъ съ помощью циркуля на нѣсколькихъ примѣрахъ

Здѣсь, на этой ступени, надо только обратить должное вниманіе учениковъ на это свойство угловъ треугольника, лежащихъ противъ неравныхъ сторонъ его Впослѣдствіи къ этому придется вернуться

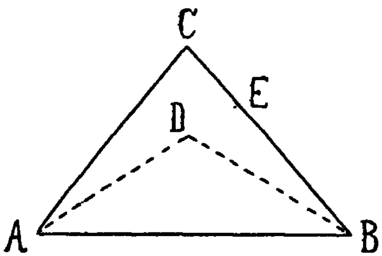
316в. Замѣтьте если два угла *одного и того же треугольника* не равны между собою, то и стороны, противолежащія этимъ угламъ, тоже не одинаковы, и противъ бо́льшаго угла *лежитъ* бо́льшая сторона, а противъ меньшаго—меньшая —Убѣдитесь въ этомъ на примѣрахъ, съ помощью циркуля.

316г. Но замѣтьте также, что если одна сторона треугольника больше другой его стороны вдвое, то уголъ, лежащій противъ большей стороны, вовсе не вдвое больше угла, который лежитъ противъ меньшей стороны.—Провѣрьте это на чертежѣ —Замѣтьте также если одинъ уголъ треугольника больше другого его угла вдвое, то сторона, лежащая противъ бо́льшаго угла, вовсе не вдвое больше стороны, лежащей противъ меньшаго —Возьмите примѣръ. начертите прямоугольный треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ острыхъ угловъ содержитъ 45°.

Это надобно прорабатывать не мелькомъ, не мимоходомъ, а со всей тщательностью, *какая только возможна* на этой ступени обученія. А такъ какъ на этой ступени невозможно тригонометрическое освѣщеніе вопроса, то упражненій на чертежахъ надобно сдѣлать довольно много

321. Начертить какой-нибудь треугольникъ, взять внутри его точку, соединить ее съ какими-нибудь двумя вершинами треугольника и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какая изъ двухъ ломаныхъ больше,—внѣшняя или внутренняя,—тремя способами а) глазомѣромъ, б) сложеніемъ ея звеньевъ и в) измѣреніемъ ихъ длины

***321а.** Сдѣлать чертежъ, на подобіе того, который требуется въ № 321, и, сверхъ того, продолжить одно «звено» внутренней ломаной до пересѣченія со звеномъ внѣшней («положить мостъ») —Обозначить буквами всѣ вершины и эту точку пересѣченія и отдать себѣ отчетъ въ томъ, которая изъ двухъ ломаныхъ больше. ACB или AEB? Затѣмъ отдать себѣ отчетъ въ томъ, которая изъ двухъ ломаныхъ больше AEB или ADB?—Записать: лом ACB больше, чѣмъ лом AEB, лом AEB больше, чѣмъ лом ADB. Что



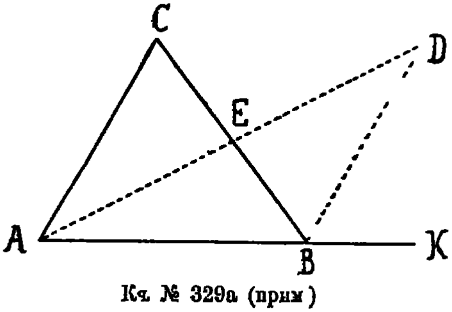
Къ № 321а.

изъ этого слѣдуетъ? — У меня больше денегъ, чѣмъ у Иванова, а у Иванова больше, чѣмъ у Степанова, что изъ этого слѣдуетъ? (Изъ этого слѣдуетъ, что у меня больше, чѣмъ у Степанова, или, какъ говорятъ, «подавно» больше, чѣмъ у Степанова) — Которая ломаная больше внутренняя или внѣшняя?

Если эти разсужденія и записи неумѣстны, то можно ограничиться № 321, не прибѣгая къ записямъ, можно также обратиться къ *разсмотрѣнію* всѣхъ трехъ ломаныхъ,—внѣшней, внутренней съ «мостомъ» и внутренней безъ «моста» Разсматривая каждую ломаную, какъ путь, по которому можно дойти отъ начала каждой ломаной, т-е отъ точки A, до конца ея, т-е до точки B, можно разсуждать, не записывая ничего, слѣдующимъ образомъ надо изъ точки A «попасть» въ точку B, предположимъ, что для этого можно избрать только одинъ изъ слѣдующихъ трехъ путей: 1) изъ точки A черезъ точку C, черезъ точку E до точки B (обойти кругомъ), 2) изъ точки A черезъ D, черезъ мостъ DE, черезъ точку E до точки B,—какой изъ двухъ путей больше?—и 3) изъ точки A до точки D,—на мостъ не ходить,—и изъ точки D прямо до точки B,—какой путь короче всѣхъ? И т п — Не бываетъ такихъ нормальныхъ дѣтей, которыя этого разсужденія не усвоили бы — Полезно подольше остановиться на частныхъ, конкретныхъ примѣрахъ, выясняющихъ аксіому, по которой если $a > b$ и $b > c$, то a «подавно» больше, чѣмъ c, и смыслъ слова «подавно»

324. Начертить треугольникъ и продолжить одну изъ его сторонъ въ одномъ направленіи — Получится «внѣшній уголъ треугольника» — Отдать себѣ отчетъ въ томъ, который уголъ больше внѣшній или же тотъ внутренній уголъ, себѣ отчетъ въ этомъ —Замѣтьте· *любой внѣшній уголъ треугольника всегда больше каждаго изъ двухъ внутреннихъ угловъ того же треугольника, съ нимъ не смежныхъ*

Доказательство этой теоремы требуетъ отъ учащихся впервые довольно сложнаго вспомогательнаго построенія, состоящаго изъ слѣдующихъ чертежныхъ операцій. 1) раздѣленія прямой пополамъ, 2) проведенія медіаны, 3) ея продолженія, 4) отложенія медіаны на этомъ продолженіи и 5) соединенія двухъ точекъ прямою Каждую изъ этихъ операцій учащійся на этой ступени уже въ состояніи сдѣлать вполнѣ сознательно чего нельзя сказать о тѣхъ учащихся, которые эту теорему усваиваютъ, еще не умѣя дѣлить прямую пополамъ, а только принимая на вѣру, что это какимъ-то неизвѣстнымъ имъ образомъ можно выполнить Но послѣдовательность этихъ операцій все-таки довольно сложна для начинающаго Однакоже не въ этомъ одномъ трудность доказательства Затрудняетъ встрѣчающаяся впервые необходимость въ сложной фигурѣ, дающей пять треугольниковъ, выбрать непремѣнно два (не ABC, ABE, ABD, а ACE и BDE) А когда это уже сдѣлано, то предстоятъ еще раскрытіе свойствъ этихъ двухъ треугольниковъ и самый выводъ, тоже требующій выбора тѣхъ двухъ сторонъ и тѣхъ двухъ угловъ, которые нужны, въ то время какъ всѣхъ сторонъ 6 и угловъ столько же Въ виду всего выше указаннаго, учитель можетъ, при желаніи, за-



Кч. № 329а (прим)

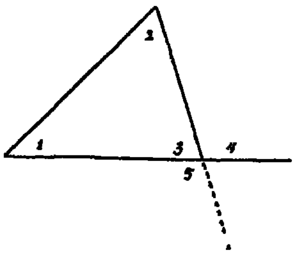
няться доказательствомъ теоремы При интересѣ учениковъ къ такому доказательству, который можетъ быть установленъ опросомъ, можно обратиться къ №№ 329б—329ж, имѣющимъ цѣлью, слѣдуя принципу «по одной трудности за разъ», расчленить трудности и въ должномъ направленіи углубить разумѣніе учащихся

***329б.** Построить какой-нибудь треугольникъ и продолжить одну изъ его сторонъ, затѣмъ сторону треугольника, образующую внѣшній уголъ, раздѣлить пополамъ, противолежащую ей вершину треугольника соединить съ полученною серединою этой стороны, эту медіану (равнодѣлящую стороны) продолжить внутрь внѣшняго угла, на продолженіи, отъ начала его, отложить медіану и вершину внѣшняго угла соединить съ концомъ отложеннаго отрѣзка —Сдѣлать это построеніе для треугольниковъ разнаго рода остроугольныхъ, тупоугольныхъ, прямоугольныхъ, равнобедренныхъ, равностороннихъ и разностороннихъ

Это упражненіе представляетъ собою понятную, во всякомъ случаѣ, работу, могущую показать учителю, на сколько ученики умѣютъ выполнять болѣе или менѣе сложные чертежи «подъ диктовку» Сверхъ того, она можетъ оказать услугу въ томъ числѣ, если учитель желаетъ перейти къ доказательству теоремы о внѣшнемъ углѣ треугольника Для малолѣтнихъ учениковъ такое доказательство мало интересно и не вполнѣ доступно Только съ 12-ти—13-лѣтними учениками, при благопріятныхъ условіяхъ, учитель можетъ попробовать привести учениковъ къ доказательству. Но само собою разумѣется, что дать ученикамъ навыкъ въ оріентировкѣ во всѣхъ трудностяхъ геометрическихъ доказательствъ вообще можно только путемъ упорнаго и многолѣтняго труда надъ этими трудностями.

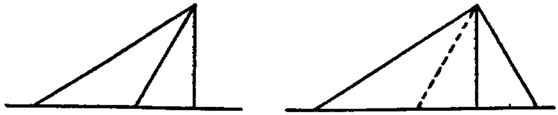
***329в.** Въ фигурѣ, полученной послѣ рѣшенія предыдущей задачи, отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе въ ней получаются треугольники (Данный треугольникъ ABC, далѣе треугольники ABE, ABF, BEF и AEC) —Отдать

***329е.** Справедлива ли эта теорема для каждаго изъ внѣшнихъ угловъ даннаго треугольника? (Справедлива) — Почему?—Всякую ли сторону даннаго треугольника можно раздѣлить пополамъ? (Всякую) —Всякую ли вершину даннаго треугольника можно соединить прямою съ серединою противолежащей стороны? (Всякую) — Всякую ли медіану его можно продолжить внутрь внѣшняго угла? (Всякую) — На продолженіи всякой ли медіаны можно отложить отрѣзокъ, равный этой медіанѣ? (Всякой) — Будетъ ли конецъ этого отрѣзка всегда внутри внѣшняго угла? (Будетъ) — Для всякаго ли внѣшняго угла даннаго треугольника можно сдѣлать такое построеніе, какое сдѣлано нами для взятыхъ нами треугольниковъ? (Для всякаго) —Всегда ли получатся такіе два треугольника, какіе мы разсматривали? (Всегда) —Всегда ли получится, что внутренній уголъ, противолежащій продолженной сторонѣ, равенъ части внѣшняго, образованнаго этимъ продолженіемъ? (Всегда) —Стало-быть, каждый ли внѣшній уголъ любого треугольника больше внутренняго, съ нимъ не смежнаго и противолежащаго продолженной сторонѣ? — А больше ли каждый внѣшній уголъ также и второго внутренняго угла, съ нимъ не смежнаго? (Больше) — Почему? (Потому что каждый внѣшній уголъ равенъ вертикальному съ нимъ, тоже внѣшнему) —Почему $\angle$ 5 больше, чѣмъ $\angle$ 1?



Къ № 329д (прим)

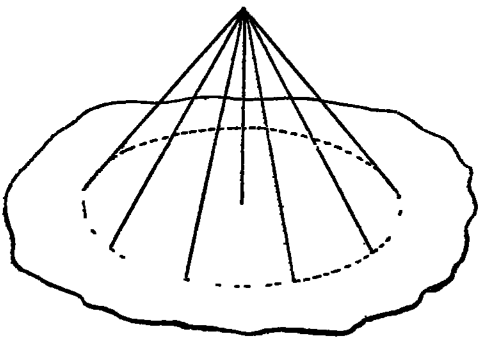
***329ж.** Для всякаго ли треугольника справедлива теорема о внѣшнемъ углѣ? (Для всякаго) —Почему? (Потому что то, что мы дѣлали при доказательствѣ ея для даннаго треугольника, «не зависѣло» отъ формы и величины треугольника и можетъ быть повторено для всякаго треугольника)



Къ № 331

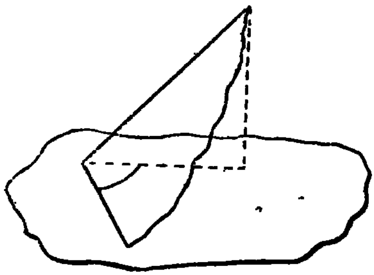
Для того, чтобы послѣднее утвержденіе не было голословнымъ,—голословность въ тѣхъ случаяхъ, когда рѣчь идетъ о доказательствѣ, въ корнѣ убиваетъ силу доказательства,—необходимо, чтобы оно сопровождалось такимъ же рядомъ вопросовъ, который намѣченъ въ № 329е, либо же, чтобы ему, по крайней мѣрѣ, предшествовали упражненія, приведенныя въ № 329б.

331. Изъ точки, взятой на плоскости и внѣ прямой, лежащей въ той же плоскости, опустить перпендикуляръ на эту прямую и ту же точку соединить съ какою-нибудь точкой той же прямой, не совпадающей съ «основаніемъ» (или «подошвой») перпендикуляра.—Какая получится фигура?—Какой треугольникъ? (Прямоугольный)—Какіе въ немъ углы?—Почему остальные два—острые? (Потому что внѣшній прямой уголъ треугольника больше каждаго изъ нихъ, стало-быть, каждый изъ нихъ—острый)—Какая прямая короче перпендикуляръ или наклонная?—



Къ № 331а.

Почему перпендикуляръ? (Потому что онъ въ треугольникѣ лежитъ противъ меньшаго угла) —Изъ точки, взятой внѣ прямой на плоскости, опустить на нее перпендикуляръ; отъ основанія перпендикуляра на этой прямой, по обѣ стороны этого основанія, отложить равные отрѣзки и соединить данную точку съ концами этихъ отрѣзковъ — Которая изъ наклонныхъ больше? (Равны между собою).—Почему? (Треугольники). — Симметричны ли наклонныя? — Изъ точки, взятой внѣ прямой на плоскости, опустить перпендикуляръ и двѣ несимметричныя наклонныя — Равны ли онѣ между собою? (Нѣтъ, не равны) —Почему?—Разсмотрѣть разные случаи на чертежахъ



Къ № 331а (прим)

331а. Не начертить, а *нарисовать* часть плоскости, точку внѣ ея, перпендикуляръ и наклонную до пересѣченія съ плоскостью.—Которая прямая короче?—Показать что-нибудь подобное въ классной комнатѣ съ помощью карандашей, ручекъ и т п — Нарисовать перпендикуляръ къ плоскости и нѣсколько наклонныхъ

Относящіяся сюда свойства перпендикуляра и наклонныхъ въ пространствѣ не должны быть непремѣнно доказываемы Но если ужъ учитель пожелаетъ ввести доказательства, то самое важное въ нихъ,—а именно необходимость проведенія плоскостей черезъ всякія двѣ прямыя,—учениками должно быть понято вполнѣ Они должны понять, что все, что они знаютъ относительно фигуръ, справедливо только для *плоскихъ* фигуръ, т -е фигуръ, всѣми своими точками лежащихъ въ плоскости Нельзя, однакоже, не признать, что на этой ступени скорѣе нужны вѣрныя пространственныя представленія, примыкающія къ ученію о перпендикулярѣ и наклонной, чѣмъ точно обоснованныя теоремы, которымъ мѣсто въ курсѣ систематическомъ Гораздо важнѣе ознакомить учениковъ съ прямымъ угломъ въ пространствѣ, котораго одна сторона лежитъ на нѣкоторой плоскости и который обращается около этой стороны, какъ вокругъ оси, притомъ сначала наглядно, а потомъ—на рисункѣ, съ вращеніемъ наклонной къ плоскости въ пространствѣ вокругъ перпендикуляра, какъ вокругъ оси, и т п (См чертежъ на стр 113). Неторопливая работа въ этомъ направленіи на этой ступени полезнѣе, чѣмъ даже вполнѣ точныя доказательства

331б. Положить на плоскость катетъ одного чертежнаго треугольника, держа вершину противолежащаго угла въ воздухѣ, сдѣлать то же самое съ катетомъ другого чертежнаго треугольника, но такъ, чтобы лежащіе на плоскости катеты обоихъ треугольниковъ образовали какой-нибудь уголъ, а вершины прямыхъ угловъ соприкасались, затѣмъ до тѣхъ поръ поворачивать оба треугольника вокругъ ихъ катетовъ, лежащихъ на плоскости, пока остальные два катета не сольются —Тогда эти последніе катеты будутъ перпендикулярны къ плоскости

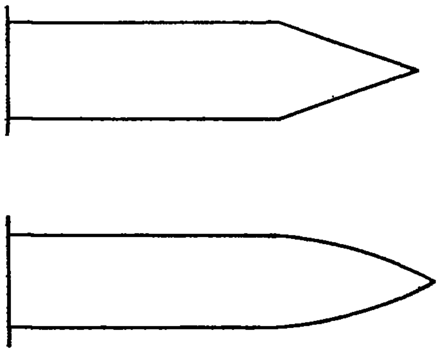
331в. Взять обрывокъ бумаги, одинъ край котораго составляетъ прямую линію, сложить его такъ, чтобы линія сгиба была перпендикулярна къ прямому краю этого обрывка бумаги, нѣсколько разогнуть этотъ обрывокъ и полученный «плоскостной уголъ» поставить на плоскость —Сгибъ будетъ перпендикуляренъ къ этой плоскости —Замѣтьте если прямая линія пересѣкаетъ плоскость и въ точкѣ пересѣченія перпендикулярна къ двумъ прямымъ, лежащимъ на той же плоскости и проходящимъ черезъ эту точку пересѣченія, то говорятъ, что эта прямая перпендикулярна къ плоскости

Эти упражненія чрезвычайно полезны во многихъ отношеніяхъ они обогащаютъ учениковъ многими такими оформленными геометрическими представленіями, безконечной прямой двѣ точки, черезъ нихъ провести двѣ конечныя прямыя, взаимно не пересѣкающіяся, и продолжить ихъ въ тѣхъ направленіяхъ, которыя не приведутъ ихъ къ взаимному пересѣченію

Если бы ученикъ, рѣшающій у доски эти задачи, случайно начертилъ двѣ конечныя прямыя, которыя настолько близки къ взаимно-параллельнымъ прямымъ, что вопроса разрѣшить нельзя, то надо съ этимъ примириться и отмѣтить, что *въ этомъ случаѣ* рѣшить задачи нельзя Это дѣлу отнюдь не повредитъ

342. Взять въ плоскости часть безконечной прямой, а на ней двѣ точки; черезъ нихъ провести въ той же плоскости двѣ прямыя, къ ней перпендикулярныя, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, могутъ ли онѣ взаимно пересѣчься, если ихъ продолжить за предѣлы чертежа по ту или по другую сторону первой безконечной прямой —Можно ли себѣ представить, что онѣ гдѣ-нибудь «встрѣтятся»,—«взаимно пересѣкутся»?—Сходятся ли онѣ съ которой-нибудь стороны первой безконечной прямой? (Нѣтъ, не сходятся) —Расходятся ли онѣ съ которой-нибудь стороны? (Нѣтъ, не расходятся) — Можно ли предположить, что онѣ гдѣ-нибудь встрѣтятся?— Какая была задача?—Задача была такая (повторить ея условія дословно) —Отчего я прибавилъ, что перпендикуляры надо провести въ той же плоскости? (Оттого, что перпендикуляры можно провести такъ, чтобы одинъ лежалъ въ той же плоскости чертежа, а другой—наклонно къ ней) —Покажите, что это возможно, съ помощью двухъ карандашей —Можно ли предположить, что проведенные въ плоскости чертежа перпендикуляры, по достаточномъ ихъ продолженіи, встрѣтятся?

На этотъ вопросъ могутъ получиться отвѣты слѣдующихъ типовъ 1) «нѣтъ, *они не встрѣтятся*», 2) болѣе тонкій отвѣтъ *«нельзя предполагать,* что они встрѣтятся», 3) *«можетъ-быть*, встрѣтятся» 4) *«можно предположить*, что они не встрѣтятся», 5) «да, они встрѣтятся», и 6) *«не знаю, можно ли это предполагать»* Отвѣты въ родѣ 5 и 6 почти никогда не получаются, чаще всего получаются отвѣты перваго и второго рода, рѣдко — отвѣтъ четвертаго рода. Это служитъ наилучшимъ доказательствомъ того, насколько неестественнымъ въ этомъ случаѣ должно казаться начинающимъ такъ наз «доказательство отъ противнаго» Къ такому доказательству можно и надо поэтому прибѣгать не на первыхъ порахъ, а лишь тогда, когда, — какъ на занимающей насъ ступени, — ученики настолько развиты, что они уже, можетъ-быть, въ состоянiи понять слѣдующее разсужденiе. *«если бы мы предположили*, что эти двѣ прямыя встрѣтятся, то мы *должны были бы признать*, что въ такомъ случаѣ получится треугольникъ, *и допустить*, что въ немъ два угла—прямые, или, *иначе говоря, допустить*, что существуетъ треугольникъ, котораго внѣшнiй уголъ равенъ внутреннему, съ нимъ не смежному. А возможно ли это?»—Само собою разумѣется, что выполнять при этомъ чертежи въ родѣ приведенныхъ выше, по меньшей мѣрѣ, не разсудительно, такъ какъ подобный чертежъ не отвѣчаетъ самымъ скромнымъ требованiямъ наглядности Ибо, какъ бы мало ни былъ развитъ ученикъ, образованiе изъ двухъ прямыхъ пятиугольной фигуры или фигуры криволинейной для него является нелѣпостью Эта, слишкомъ ужъ явная, нелѣпости ни въ чемъ убѣдитъ его не въ состоянiи и не въ состоянiи также его чему-нибудь научить



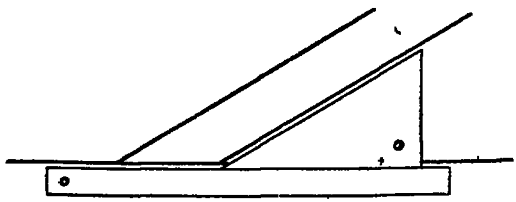
Къ № 342 (прим)

4-й какъ лежитъ? — Ему какой соотвѣтствуетъ? — А уголъ 2-й? — Ему какой соотвѣтствуетъ? — А уголъ 3-й — Ему какой соотвѣтствуетъ?

Полезно показывать рукою и обозначать стрѣлками направленія угловъ, обратныя направленію движенія часовой стрѣлки, и направленія ихъ сторонъ.

366. Провести прямую, построить на ней какой-нибудь уголъ, продолжить его стороны въ обоихъ направленіяхъ; построить на той же прямой *соотвѣтственный уголъ, равный первому*, и продолжить его стороны тоже въ обоихъ направленіяхъ. — Пересѣкутся ли взаимно тѣ двѣ прямыя, которыя пересѣкаются каждая третьею прямою? — Провести прямую, построить на ней два равныхъ между собою внѣшнихъ накрестъ-лежащихъ угла и продолжить ихъ стороны въ обоихъ направленіяхъ. — Пересѣкутся ли взаимно двѣ прямыя, пересѣченныя данной прямою? — Начертить двѣ прямыя, пересѣченныя третьею такъ, чтобы два внутреннихъ накрестъ-лежащихъ угла были равны между собою — Если двѣ прямыя, находящіяся (лежащія) въ одной плоскости, не пересѣкаются, какъ бы далеко ихъ ни продолжали въ тѣхъ или иныхъ направленіяхъ, то эти прямыя одна другой *параллельны* или *взаимно-параллельны*

367. *Изъ точки, взятой внѣ прямой, къ этой прямой провести параллельную прямую* а) съ помощью



Къ № 367

линейки и циркуля, б) съ помощью линейки и транспортира и в) съ помощью линейки и чертежнаго треугольника.

На этой ступени полезно обратиться къ чертежному треугольнику, и въ употребленіи его ученики впослѣдствіи должны пріобрѣсти достаточный навыкъ Для вычерчиванія прямыхъ угловъ онъ не необходимъ,— *для этой цѣли могутъ служить прямые углы хорошей* четыреугольной линейки Треугольная же линейка можетъ оказаться полезной только съ наступленіемъ необходимости быстро вычерчивать параллельныя прямыя На всякій случай, ея прямой уголъ слѣдуетъ вывѣрить, такъ какъ учащіеся охотно прибѣгаютъ къ нему для вычерчиванія прямыхъ угловъ—На этой же ступени учащіеся могутъ совершенно сродниться съ терминами «катетъ» и «гипотенуза», когда учитель диктуетъ «приложите линейку къ меньшему катету», «проведите прямую по гипотенузѣ», «проведите прямую по большему катету» и т п Ученикамъ надо на практикѣ уяснить себѣ параллельность передвиженія чертежнаго треугольника въ томъ случаѣ, когда его катетъ передвигается по линейкѣ, неподвижно лежащей на столѣ или на доскѣ

381. Провести двѣ параллельныя прямыя съ ихъ сѣкущей, перенумеровать всѣ углы и записать, какіе равны между собою.—Можно ли такъ провести сѣкущую, чтобы всѣ 8 угловъ были между собою равны?—Провести на плоскости двѣ не параллельныя одна другой прямыя, пересѣчь ихъ сѣкущей, перенумеровать углы и записать, какіе углы равны между собою—Начертить двѣ не параллельныя прямыя, пересѣчь ихъ сѣкущею и разобраться въ томъ, могутъ ли всѣ углы быть равны между собою—Могутъ ли четыре угла быть равны между собою—Возможенъ ли такой случай, чтобы не было равныхъ между собою угловъ?

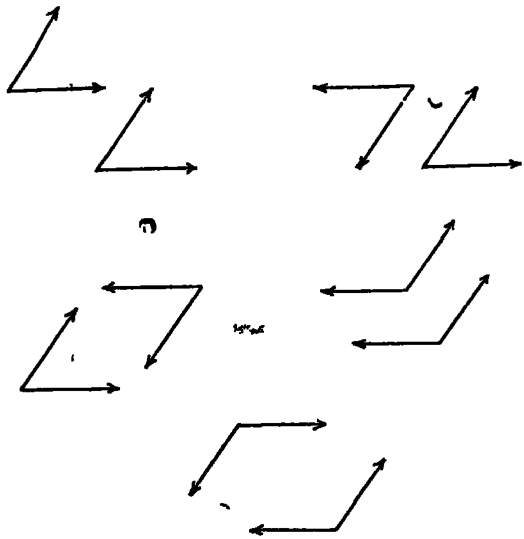
383. Пересѣчь двѣ параллельныя прямыя наклонною къ нимъ сѣкущей и отдать себѣ отчетъ, чему равна сумма любого тупого съ любымъ острымъ угломъ—Чему равна сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ, если двѣ параллельныя прямыя пересѣчены нѣкоторой сѣкущей, перпендикулярной къ нимъ?—А если сѣкущая не перпендикулярна къ параллельнымъ прямымъ, то чему равна сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ?—А сумма двухъ внѣшнихъ одностороннихъ?

385. Двѣ не параллельныя прямыя пересѣчь сѣкущей.—Равна ли сумма двухъ внутреннихъ одностороннихъ угловъ суммѣ двухъ прямыхъ угловъ или же больше ея, или меньше?—По какую сторону сѣкущей эта сумма больше. по эту ли сторону, гдѣ произойдетъ пересѣченіе данныхъ прямыхъ, или же по ту ея сторону, гдѣ прямыя линіи расходятся?

387. Какъ съ помощью циркуля разобраться въ томъ, параллельны ли двѣ прямыя, проведенныя въ плоскости?—Надо ихъ пересѣчь прямой, наклонной къ одной изъ нихъ, затѣмъ аккуратно начертить дуги двухъ острыхъ накрестъ-лежащихъ угловъ и съ помощью циркуля разобраться въ томъ, равны ли эти дуги,—вѣрнѣе *хорды* этихъ дугъ,—или не равны между собою, если эти дуги равны, то прямыя параллельны, въ противномъ случаѣ, онѣ не параллельны.—А какъ убѣдиться въ параллельности или непараллельности двухъ прямыхъ съ помощью циркуля и прямой, перпендикулярной къ одной изъ данныхъ прямыхъ?

389. Начертить двѣ взаимно-параллельныя прямыя и изъ точки, взятой на одной изъ нихъ, опустить перпендикуляръ на другую —Перпендикулярна ли эта послѣдняя прямая также къ первой прямой?—Взять на одной изъ двухъ взаимно-параллельныхъ прямыхъ нѣсколько точекъ и опустить изъ нихъ перпендикуляры на другую изъ нихъ —Равны ли перпендикуляры между собою?—По какой линіи должна «пойти» точка, если она должна пойти кратчайшимъ путемъ изъ точки одной изъ взаимно-параллельныхъ прямыхъ до ближайшей отъ нея точки другой изъ нихъ?—Длину какой прямой принимаютъ за разстояніе между двумя параллельными прямыми? (Длину перпендикуляра, опущеннаго изъ точки, взятой на одной изъ параллельныхъ, на другую изъ нихъ)

389а. Начертить въ данной плоскости (въ плоскости чертежа) нѣсколько взаимно-параллельныхъ прямыхъ —Начертить между двумя взаимно-параллельными прямыми возможно больше параллельныхъ имъ прямыхъ



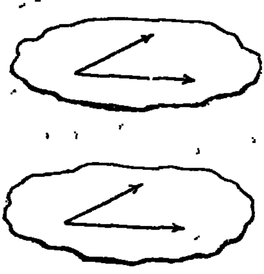
Къ № 395

389б. Возможно ли, чтобы нѣсколько прямыхъ линій, изъ которыхъ не всѣ лежатъ въ одной и той же плоскости, всѣ были взаимно-параллельны? (Возможно). —Примѣръ положите на столѣ два карандаша такъ, чтобы они лежали параллельно одинъ другому, возьмите въ каждую изъ рукъ еще по карандашу и держите ихъ надъ столомъ такъ, чтобы всѣ четыре карандаша были взаимно-параллельны —Передвинуть эти карандаши, но такъ, чтобы всѣ карандаши все-таки остались взаимно-параллельными —Но каждая пара

***400в.** Дана плоскость и внѣ ея параллельный къ ней отрѣзокъ, найти его проекцію и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ велика эта проекція (Она равна данному отрѣзку и параллельна ему)

***400г.** Даны двѣ взаимно-параллельныя плоскости, на одной изъ нихъ начерченъ уголъ, найти его проекцію на другую плоскость и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ велика проекція даннаго угла на вторую плоскость (Оба угла равны между собою, и стороны одного параллельны сторонамъ другого) — Представить себѣ, что первый уголъ непрозраченъ, что остальная часть его плоскости прозрачна, и что вторая плоскость — «экранъ», на который падаетъ пучокъ взаимно-параллельныхъ лучей, идущій перпендикулярно къ обѣимъ плоскостямъ, такъ что на пути его лежитъ первая плоскость — Чѣмъ тогда будетъ проекція угла на вторую плоскость? («Тѣнью», отбрасываемою первымъ угломъ на вторую плоскость)

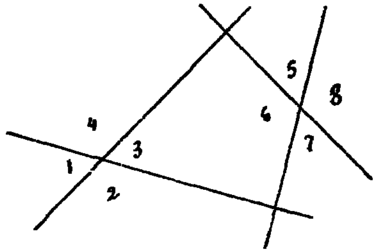
***400д.** Даны двѣ плоскости, на одной изъ нихъ начертить уголъ и на другой тоже начертить уголъ, но такой, стороны котораго порознь имѣютъ то же направленіе, какое имѣютъ стороны перваго угла, т-е такой, котораго стороны порознь параллельны сторонамъ его — Отдать себѣ отчетъ въ томъ, когда это возможно (Это возможно только тогда, когда данныя двѣ плоскости взаимно-параллельны).



Къ № 400д.

На этой ступени необходимы только наглядные примѣры и опыты съ двумя парами карандашей, съ двумя карточками, на каждой изъ которыхъ начерчено по углу, при чемъ углы эти могутъ быть равны между собою (тогда карточки могутъ принять такое положеніе въ пространствѣ, что стороны этихъ угловъ будутъ порознь взаимно-параллельны) или не равны между собою (тогда такое положенıе карточекь невозможно), и т п

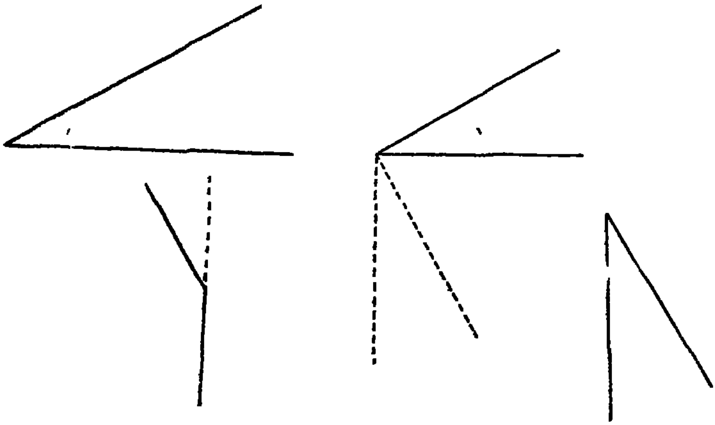
402. Начертить двѣ взаимно-пересѣкающıяся прямыя, взять какую-нибудь точку въ той же плоскости и черезъ нее провести двѣ прямыя, изъ которыхъ одна перпендикулярна къ одной, а другая перпендикулярна къ другой изъ первыхъ двухъ взаимно - пересѣкающихся прямыхъ линій, разобраться въ томъ, какıе изъ четырехъ угловъ, образованныхъ при точкѣ пересѣченıя первой пары прямыхъ линıй, какимъ равны угламъ, образованнымъ при точкѣ пересѣченıя второй пары прямыхъ линıй



Къ № 402

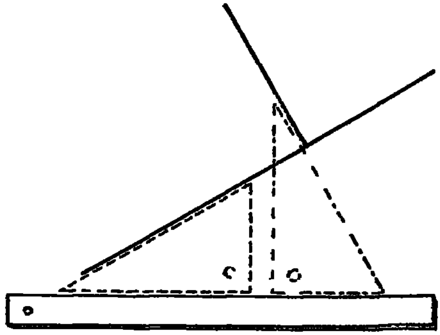
Въ этой задачѣ надо обратить вниманıе учениковъ также на остальные 16 угловъ, образованныхъ при другихъ пересѣченıяхъ. изъ нихъ 8 — прямые углы, а остальные 8 обладаютъ тѣмъ свойствомъ, что сумма каждаго остраго вмѣстѣ съ острымъ изъ числа данныхъ угловъ равна одному прямому углу Къ сожалѣнıю, на этотъ пунктъ обыкновенно не обращаютъ вниманія, и эта неясность дѣлаетъ теорему труднѣе, чѣмъ она есть на самомъ дѣлѣ, такъ какъ игнорированıе всѣхъ угловъ, кромѣ извѣстной группы ихъ, вноситъ въ самую формулировку теоремы неясность и путаницу Неполный текстъ теоремы, насъ интересующей, гласитъ такъ если стороны одного угла перпендикулярны къ сторонамъ другого, то эти два угла или равны между собою или взаимно дополняютъ другъ друга до 180^0, или такъ если двѣ взаимно-пересѣкающıяся прямыя перпендикулярны къ другимъ двумъ прямымъ, то уголъ, образованный при взаимномъ пересѣченıи первой пары прямыхъ, либо равенъ углу, образованному при взаимномъ пересѣченıи второй пары прямыхъ линіи, либо дополняетъ его до 180⁰ Полная же формулировка должна имѣть въ виду и остальные 8 угловъ

402а. Построить острый уголъ и изъ вершины его провести въ той же плоскости перпендикуляры къ сторонамъ угла такъ, чтобы они одинъ съ другимъ образовали тоже острый уголъ —Равенъ ли онъ данному?—Построить острый уголъ и изъ вершины его провести перпендикуляры къ его сторонамъ такъ, чтобы эти перпендикуляры образовали (одинъ съ другимъ) тупой уголъ —Сумма обоихъ угловъ равна 180⁰



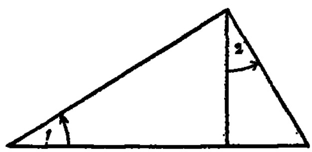
Къ № 402а

402б. Положить линейку на доску (на плоскость чертежа), къ ней приложить большій катетъ чертежнаго наугольника и по гипотенузѣ провести прямую, затѣмъ, оставивъ линейку на ея мѣстѣ, повернуть чертежный треугольникъ, приложить меньшій катетъ къ линейкѣ и по гипотенузѣ провести вторую прямую, отдать себѣ отчетъ въ томъ, какой получился уголъ? (Прямой)



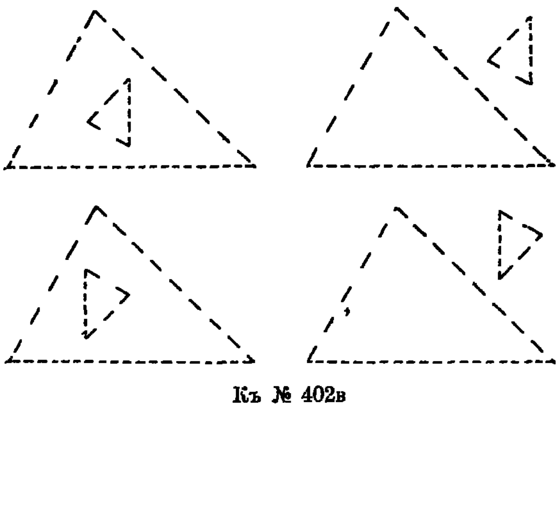
Къ № 402б

402в. Начертить два треугольника, въ которыхъ стороны одного порознь перпендикулярны къ сторонамъ другого, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, не подобны ли эти треугольники



Къ № 402г.

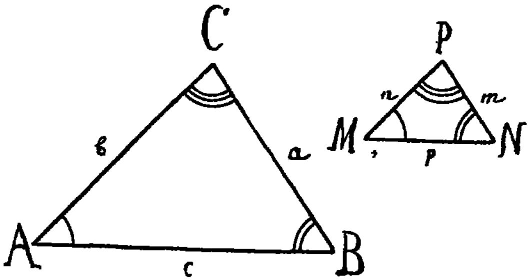
402г. Изъ вершины прямого угла прямоугольнаго треугольника опустить перпендикуляръ на его гипотенузу и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какими прямыми линіями обра-



Къ № 402в

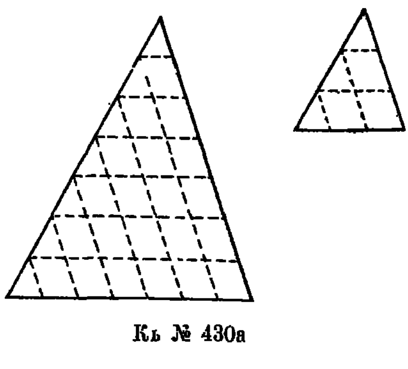
428. *Раздѣлить конечную прямую на нѣсколько одинаковыхъ частеи*

430. Начертить разносторонній треугольникъ, а также подобный ему, но меньшихъ размѣровъ, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какія двѣ стороны противолежатъ въ этихъ двухъ треугольникахъ двумъ равнымъ между собою угламъ. Такія двѣ стороны называются соотвѣтственными или *сходственными* сторонами данныхъ треугольниковъ Въ треугольникахъ ACB и MPN сходственными сторонами являются стороны a и m, стороны b и n, наконецъ, стороны c и p



Къ № 430

430a. Начертить разносторонній треугольникъ и ему подобный, но притомъ такой, чтобы одна изъ сторонъ послѣдняго составляла половину соотвѣтственной стороны перваго — Что можно сказать объ остальныхъ двухъ сторонахъ второго треугольника? (Каждая изъ сторонъ второго треугольника составляетъ половину соотвѣтственной стороны перваго) — Построить два такихъ подобныхъ тре-



Къ № 430a

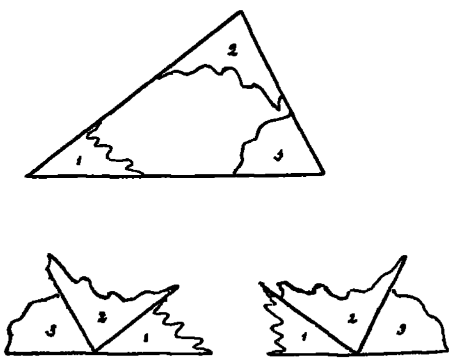
угольника, чтобы сторона одного изъ нихъ составляла $^3/_7$ доли соотвѣтствующей стороны другого, и т п

Прежде чѣмъ доказывать теорему о пропорціональности сторонъ двухъ треугольниковъ, у которыхъ углы одного порознь равны угламъ другого, надо добиться того, чтобы ученики путемъ нагляднымъ убѣдились на частныхъ примѣрахъ въ томъ, что это похоже на истину Когда это будетъ достигнуто, можно сдѣлать и шаги къ доказательству, выясняющемуся—для случая соизмѣримости сходственныхъ сторонъ—изъ чертежа, который долженъ быть учениками выполненъ не разъ и выполняемъ со всею возможною тщательностью

435. Начертить двѣ взаимно-параллельныя прямыя, взять на одной изъ нихъ одну точку, а на второй — двѣ, первую соединить съ каждою изъ этихъ двухъ послѣднихъ, перенумеровавъ углы полученнаго треугольника цифрами 1, 2 и 3, и остальные два угла, образованные при первой точкѣ, цифрами 4 и 5, отдать себѣ отчетъ въ томъ, чему равна сумма

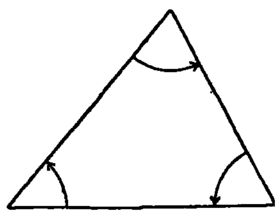
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$$

438. *Найти сумму угловъ даннаго треугольника*



Къ № 438 (прим)

Полезно обращать вниманіе учащихся на то, что всѣ углы треугольника надо брать въ одномъ направленіи Полезно вырѣзать кусокъ бумаги треугольной формы и оборвать углы неровными краями, и кнопками приколоть ихъ къ доскѣ, какъ показано на чертежѣ Поучительность этихъ упражненій въ высшей степени велика, и не подлежитъ сомнѣнію, что одно доказательство теоремы о суммѣ угловъ треугольника не даетъ *яснаго представленія* объ этой суммѣ и даетъ только—и то лишь въ лучшемъ случаѣ—понятіе о причинѣ, по которой сумма угловъ треугольника равна суммѣ двухъ прямыхъ угловъ —Надо обращать вниманіе на то, чтобы учащіеся не говорили «углы треугольника равны двумъ прямымъ» или «въ треугольникѣ два прямыхъ» и т п

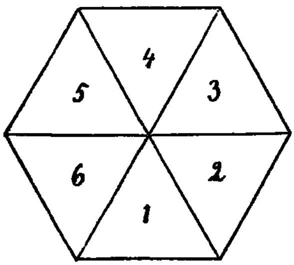


Къ № 438 (прим)

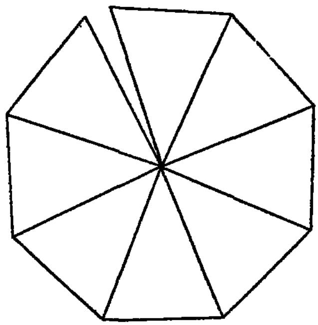
Пусть они всегда говорятъ, что «*сумма* угловъ треугольника равна *суммѣ* двухъ прямыхъ угловъ» — Умѣстно на этой ступени уже различать 1) самый треугольникъ, 2) его форму, 3) длину его периметра и 4) сумму его угловъ Не бѣда, что о площади фигуръ ученики имѣютъ представленія недостаточныя и смутныя Въ свое время присоединится и это представленіе, нуждающееся въ весьма тщательной выработкѣ —Въ порядкѣ, въ которомъ углы треугольника взяты при сложеніи, ученики должны себѣ отдавать ясный отчетъ, не связывая понятія о величинѣ этой суммы непремѣнно съ однимъ порядкомъ сложенія угловъ треугольника —Учащіеся должны дѣйствительно складывать углы треугольника

438а. Начертить безъ транспортира треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ равенъ 45°, другой $67^1/_2$°; опредѣлить, сколько градусовъ содержится въ третьемъ углѣ, начертить другой—меньшій—треугольникъ, не ему подобный, въ которомъ, стало-быть, тоже одинъ изъ угловъ 45°, другой $67^1/_2$°, и опредѣлить, чему равенъ третій.

438б. Начертить равносторонній треугольникъ, вычислить, сколько градусовъ въ каждомъ изъ его угловъ и сложить столько треугольниковъ, сколько возможно, при-

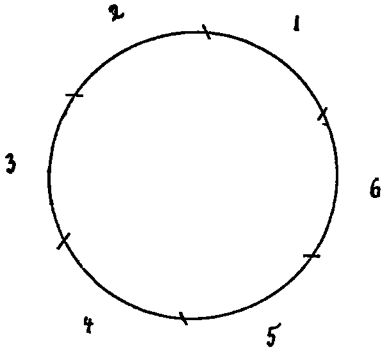


Къ № 438б



Къ № 438б

томъ такъ, какъ показано на чертежѣ.—Всегда ли такъ случается, что одинаковые равнобедренные треугольники «заполнятъ» плоскость? — Можно ли, принявъ общую вершину шести сложенныхъ равностороннихъ треугольниковъ, провести черезъ остальныя вершины окружность?

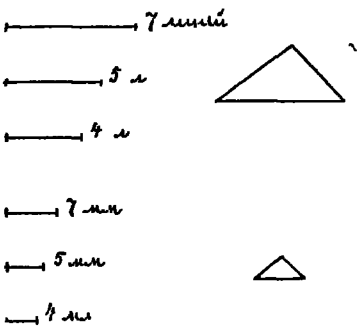


Къ № 439

439. *Раздѣлить окружность на шесть одинаковыхъ частей.* Сколько градусовъ въ дугѣ прямого угла? — Сколько градусовъ въ шестой долѣ окружности? ($360^0:6$) — Вычесть изъ дуги прямого угла дугу, равную шестой долѣ прямого угла.

треугольниковъ, вычислить, какъ великъ третiй уголъ каждаго изъ нихъ, и провѣрить, на треугольникахъ, равенъ ли этотъ третiй уголъ разности между суммой двухъ прямыхъ и суммою двухъ угловъ —Замѣтьте если два угла одного треугольника порознь равны двумъ угламъ другого, то и третьи ихъ углы тоже равны между собою —Почему? (Потому, что сумма всѣхъ трехъ угловъ во всѣхъ треугольникахъ одна и та же)

439г. Начертить три, различной длины, прямыя, изъ которыхъ въ одной нѣкоторый отрѣзокъ содержится 7 разъ, въ другой — 5 разъ, и въ третьей—4 раза, и построить треугольникъ, стороны котораго порознь равны этимъ прямымъ, затѣмъ начертить другой треугольникъ, въ которомъ стороны составлены точно такъ же, но съ той разницей, что общая мѣра его сторонъ значительно меньше общей мѣры сторонъ перваго треугольника —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, подобны ли эти треугольники или нѣтъ, т-е равны ли углы одного треугольника порознь угламъ другого (Равны) —Примемъ это безъ доказательства.



Къ № 439г

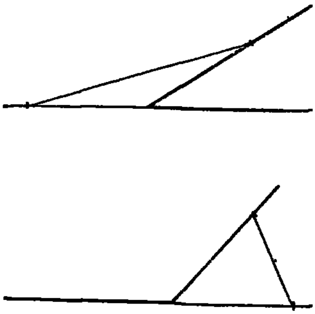
439д. Начертить данный треугольникъ, но «въ уменьшенномъ масштабѣ»

439е. Что это значитъ начертить данную фигуру въ масштабѣ «1 верста въ 1-мъ дюймѣ»?—Знаете ли вы какiе-нибудь чертежи, изображающiе что-нибудь въ уменьшенномъ масштабѣ? — (Планы домовъ, ихъ «фасады», чертежи машинъ, мостовъ, планы имѣнiй, географическiя карты)

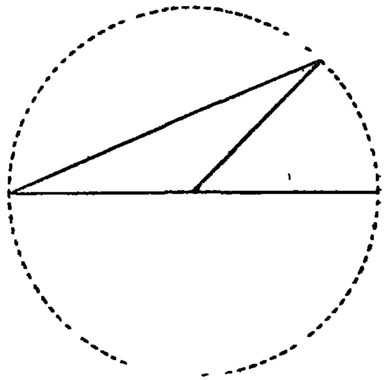
Иностранное слово «масштабъ» не должно смущать учителя Надо сначала объяснить ученикамъ, что линейка съ нанесенными дѣленiями называется масштабомъ, а потомъ—перейти къ «уменьшенному» масштабу.

439ж. Начертить два смежныхъ угла, на общей ихъ сторонѣ и на другой сторонѣ тупого угла отъ вершины его отложить равные отрѣзки, соединить концы этихъ отрѣзковъ прямою и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какую долю внѣшняго угла составляетъ каждый изъ внутреннихъ, съ нимъ не смежныхъ

439з. Повторить тотъ же чертежъ, принять вершину внѣшняго угла за центръ, а отложенный отрѣзокъ—за радiусъ, провести окружность и отдать себѣ отчетъ въ томъ,



Къ № 439ж



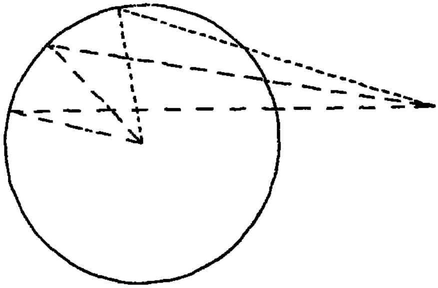
Къ № 439з

который изъ двухъ угловъ,—внѣшнiй или вписанный,—содержитъ большее число градусовъ —Сколько ихъ въ дугѣ внѣшняго (центральнаго) угла?—Сколько градусовъ въ вписанномъ? (Вдвое меньше, чѣмъ въ центральномъ)

439и. Начертить такой вписанный уголъ, чтобы центръ окружности лежалъ внутри его, и разобраться въ томъ, сколько въ немъ градусовъ по сравненiю съ числомъ градусовъ дуги, заключенной между его сторонами.

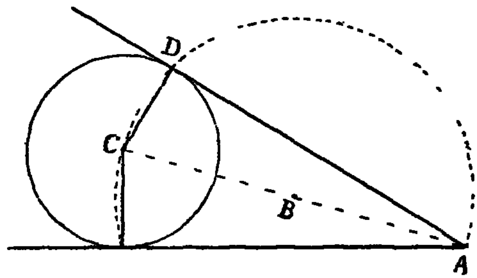
Важно, чтобы ученики вполнѣ, на рядѣ чертежей, уяснили себѣ полную независимость рѣшенія отъ угла между діаметромъ и хордою

439л. Начертить окружность, взять въ той же плоскости внѣ круга точку, на окружности взять нѣсколько точекъ, соединить ихъ съ центромъ и съ взятой внѣ круга точкой и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе углы образуются у вершинъ, которыя лежатъ на окружности



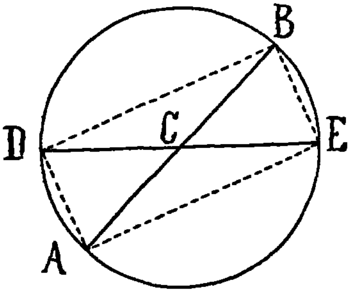
Къ № 439л.

439м. Начертить окружность, взять внѣ ея точку и изъ этой точки провести къ окружности касательную —Вся

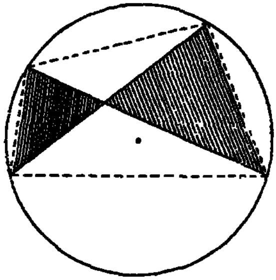


Къ № 439л

трудность въ томъ, чтобы уголъ, образованный прямою *AD* съ радіусомъ *CD*, проведеннымъ къ неизвѣстной точкѣ *D*, былъ прямымъ угломъ —*Для* рѣшенія задачи раздѣлимъ прямую *CA* пополамъ, середину *B* примемъ за центръ и радіусомъ, равнымъ прямой *BA*, начертимъ окружность, а точки пересѣченія *D* и *E* соединимъ съ точкой *A* —Прямыя *AD* и *AE* будутъ касательными —Почему?



Къ № 439н



Къ № 442

439н. Взять кругъ, провести два діаметра, соединить ихъ концы прямыми и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе изъ треугольниковъ равны между собою?—Перебрать всѣ пары равныхъ между собою треугольниковъ

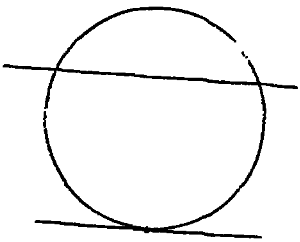
$$\triangle ADC = \triangle BEC,\ \triangle ACE = \triangle BCD,$$
$$\triangle ADE = \triangle ADB,\ \triangle ADE = \triangle EBA,$$
$$\triangle BED = \triangle BEA,\ \triangle BED = \triangle ABD,$$
$$\triangle ABE = \triangle DBE,\ \triangle ABD = \triangle BEA$$

Отдать себѣ отчетъ въ томъ а) какіе треугольники здѣсь прямоугольные, б) которые углы составляютъ половины другихъ угловъ, в) какіе углы равны между собою

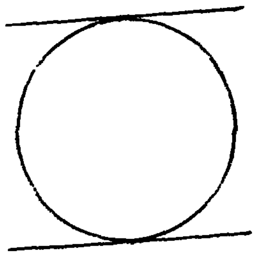
Для начала ознакомленія учениковъ со способами обозначенія треугольниковъ буквами, да и впослѣдствіи полезно треугольникъ обозначить четырьмя, а не тремя, буквами, и говорить о треугольникѣ *ABEA* или о треугольникѣ *ABDA* и т п Это обозначеніе полнѣе и потому для учениковъ яснѣе обычнаго, ему нимало не мѣшая

442. Взять кругъ, провести два діаметра, соединить центромъ его, провести черезъ нее двѣ хорды, соединить концы хордъ прямыми и отдать себѣ отчетъ въ томъ, которые треугольники одинъ другому подобны.

442г. Начертить окружность, провести двѣ параллельныя прямыя одну сѣкущую, а другую — касательную, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, не равны ли между собою дуги, заключенныя между сѣкущей и точкою касанія?



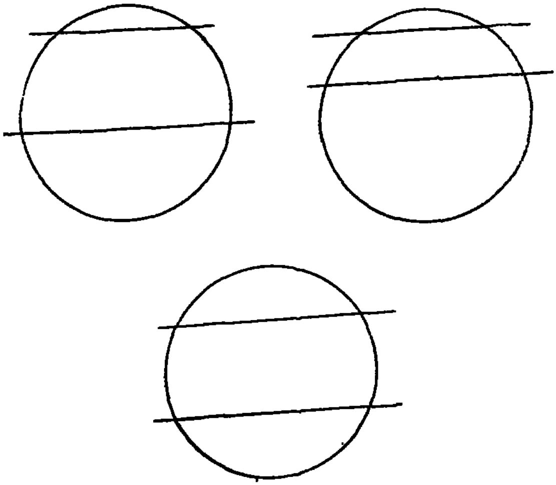
Къ № 442г



Къ № 442д

442д. Начертить окружность, взять на ней точку, чрезъ нея провести касательную, провести параллельную ей касательную и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ велика каждая изъ дугъ. заключенныхъ между точками касанія?

***443.** Начертить какой-нибудь острый уголъ, изъ точки, взятой на одной изъ его сторонъ, опустить перпендикуляръ на другую его сторону и найти отношеніе длины этого перпендикуляра къ длинѣ гипотенузы — Опустить перпендикуляръ изъ другой точки первой стороны угла на вторую его сторону и отдать себѣ отчетъ въ томъ, чему равно отношеніе длины второго перпендикуляра къ длинѣ соотвѣтствующей ему гипотенузы — Что для этого надо сдѣлать? (Либо найти общую мѣру перпендикуляра и гипотенузы и вычислить, сколько разъ эта мѣра содержится въ перпендикулярѣ и сколько разъ въ гипотенузѣ, а затѣмъ найти отношеніе перваго числа по второму, либо измѣрить какою-нибудь единицею длины катетъ и гипотенузу и найти отношеніе длины катета къ длинѣ гипотенузы) —Какимъ числомъ будетъ это отношеніе именованнымъ или отвлеченнымъ? (Отвлеченнымъ) —Если въ прямоугольномъ треугольникѣ взять катетъ, противолежащiи данному углу, и найти его отношенie къ гипотенузѣ, то полученное отношенie называется *синусомъ* этого угла — Начертить два подобныхъ прямоугольныхъ треугольника и найти синусы двухъ равныхъ между собою острыхъ угловъ этихъ треугольниковъ



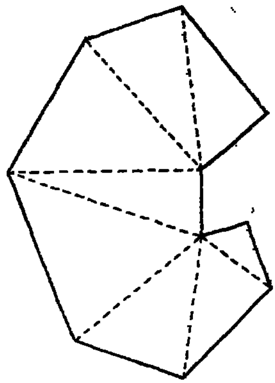
Къ № 442в

(Онi равны между собою) — Въ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ 3 вершк., а гипотенуза 8 вершкамъ Чему равенъ синусъ угла, противолежащаго этому катету? (Отвлеченной дроби $^3/_8$) — Въ другомъ прямоугольномъ треугольникѣ катетъ равенъ 3 футамъ, а гипотенуза—8 футамъ. Чему равенъ синусъ угла, противолежащаго катету? (Тоже отвлеченной дроби $^3/_8$)

***443а.** Построить острый уголъ, котораго синусъ равенъ $^3/_8$ — Построить уголъ, котораго синусъ равенъ $^5/_8$.

Понятie о синусѣ остраго угла и о томъ, что это число вполнѣ характеризуетъ острый уголъ, — т.-е что у всякаго остраго угла свой синусъ,—можетъ быть полезно во многихъ отношенiяхъ Можно воспользовзять внутри того же угла, между 4-ою и 3-ей точками, еще пятую точку, не лежащую на одной прямой ни съ какими двумя изъ прежнихъ четырехъ точекъ, и соединить прямыми четвертую со второю и пятою, а пятую съ третьею —Получимъ *замкнутую прямолинейную фигуру* —Сколько въ ней вершинъ?—Сколько сторонъ?—Сколько угловъ?—Какъ такая фигура называется? (Пятиугольникомъ) —Измѣрить периметръ этого пятиугольника —Найти сумму всѣхъ угловъ этого «многоугольника» —Разложить его на такіе треугольники, чтобы сумма всѣхъ угловъ этихъ треугольниковъ была равна суммѣ угловъ многоугольника

Нѣтъ надобности въ томъ, чтобы многоугольникъ былъ непремѣнно такъ наз «выпуклымъ» и чтобы всѣ діагонали его были проведены изъ одной вершины Необходимо только, чтобы контуръ многоугольника не пересѣкался съ самимъ собою —Скрывать отъ учащихся существованіе не выпуклыхъ многоугольниковъ, а равно многоугольниковъ съ пересѣкающимъ себя контуромъ, не слѣдуетъ, и этимъ вопросамъ посвящены ближайшіе нумера



Къ № 446 (прим).

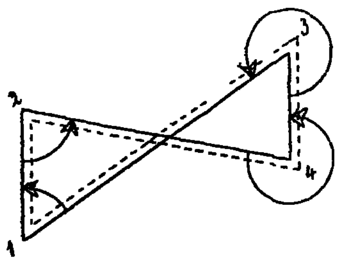
***448.** Взять 4 точки, изъ которыхъ никакія три не лежатъ на одной прямой, перенумеровать ихъ (см чертежъ на стр 153) и соединить прямыми, на одномъ чертежѣ, 1-ю со 2-й, 2-ю съ 3-й, 3-ю съ 4-й и 4-ю съ 1-ой —На другомъ чертежѣ соединить 1-ю со 2-й, 2-ю съ 4-и, 4-ю съ 3-й и 3-ю съ 1-й —Вь первомъ случаѣ получается четыреугольникъ, а во второмъ?—Будемъ и такую фигуру, какъ вторая, если она произошла указаннымъ образомъ, тоже называть *четыреугольникомъ* —Если она произошла такимъ образомъ, какъ описано выше, т.-е. если это не два треугольника, будемъ считать, что у этой фигуры только четыре вершины?—Какая у ней особенность? (У ней та особенность, что ея контуръ себя пересѣкаетъ въ пятой точкѣ)

Для того, чтобы ученики яснѣе поняли, въ чемъ дѣло, можно указать стрѣлками направленія сторонъ этой фигуры, и тогда имъ станетъ понятно, что пятая точка пересѣченія (прямыхъ 1—3 и 2—4) не представляетъ собою вершины этого четыреугольника. Тогда только будетъ возможенъ вопросъ о томъ, что въ такой фигурѣ называть угломъ ея.

***448а.** Какіе у второго четыреугольника углы (черт. 2-ой стр. 153)?—Какъ вы думаете?

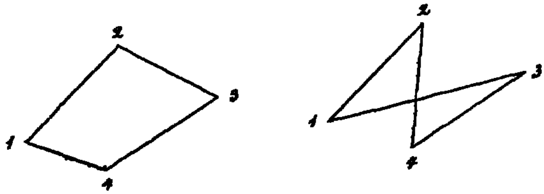
Прежде всего ученики пожелаютъ считать, что у этой фигуры шесть, а не четыре угла. Когда они вспомнятъ, что пятая точка пересѣченія (сторонъ 1—3 и 2—4) не представляетъ собою вершины четыреугольника, они отъ этой мысли могутъ, хотя и не сразу, отказаться. Но тогда они примутъ за углы фигуры остальные четыре угла образовавшихся треугольниковъ, и эта ошибка совершенно неизбѣжна.

***448б.** Возьмемъ первую фигуру (стр. 153) и представимъ себѣ, что наблюдатель идетъ отъ 1-й точки ко 2-й, лицомъ ко 2-й, тогда уголъ, котораго вершина въ первой точкѣ, будетъ лежать по правую руку наблюдателя, достигнувъ второй точки, наблюдатель повернется лицомъ къ третьей точкѣ. уголъ, вершина котораго во второй точкѣ, будетъ лежать опять по правую руку наблюдателя, и т. д.—



Къ № 448б

Теперь представимъ себѣ во второй фигурѣ наблюдателя, стоящаго въ первой точкѣ и обращеннаго лицомъ ко второй точкѣ, по правую руку его будетъ лежать уголъ, вершина котораго въ первой точкѣ —Представимъ себѣ, что наблюдатель правой рукой отмѣчаетъ съ правой стороны пункти-

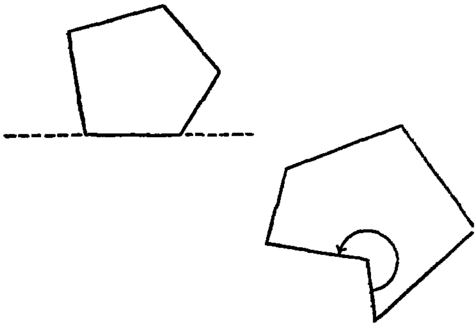


Къ №№ 448—448б

ромъ, что онъ имѣетъ въ виду этотъ уголъ —Онъ такимъ образомъ дойдетъ до второй точки, тогда онъ повернется лицомъ къ 3-й точкѣ, но опять отмѣтитъ пунктиромъ уголъ, лежащій по правую его руку, и т д, какъ это указано пунктиромъ —Условились считать углами этого многоугольники углы, отмѣченные на чертежѣ (стр 152) дугами

Ученики всегда даютъ невѣрный отвѣтъ на вопросъ о томъ, какіе углы у многоугольниковъ съ пересѣкающимся контуромъ —Лишь особенно развитые или совсѣмъ мало интересующіеся предметомъ ученики говорятъ, что они не знаютъ, какіе углы считать углами такого многоугольника Надо имъ выяснить, что это—дѣло условія, но что принято то условіе, которое изложено въ этомъ нумерѣ Чтобы сдѣлать это условіе еще болѣе обоснованнымъ, можно прибѣгнуть къ двусторонней лентѣ, одна сторона которой выкрашена въ какой-нибудь цвѣтъ или отмѣчена хотя бы только чертой, но достаточно замѣтной Изъ этой ленты можно образовать два четыреугольника, и договориться, что углами каждаго надо считать тѣ, у которыхъ стороны одного цвѣта (стр 155)

450. Многоугольники, у которыхъ контуръ не пересѣкаетъ себя, могутъ быть двухъ родовъ —Начертить многоугольникъ, въ которомъ нѣкоторые углы острые, нѣкоторые — тупые или прямые, но нѣтъ ни одного такого угла, который больше суммы двухъ прямыхъ угловъ —Начертить многоугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ больше суммы двухъ прямыхъ угловъ — Въ многоугольникахъ перваго рода мы продолжимъ одну изъ сторонъ въ



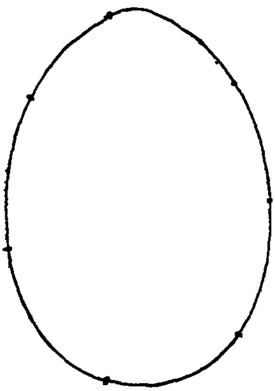
Къ № 450

обоихъ направленіяхъ, эти продолженія не пересѣкутъ контура многоугольника, какъ бы далеко мы сторону ни продолжали — Многоугольникъ весь цѣликомъ будетъ лежать по одну сторону каждой изъ продолженныхъ сторонъ — Пусть нѣкоторые изъ угловъ многоугольника больше суммы двухъ прямыхъ угловъ — У него есть такія стороны, что если ихъ продолжить въ извѣстномъ направленіи, то многоугольникъ раздѣлится этимъ продолженіемъ на двѣ части — Многоугольники перваго рода называются иногда *выпуклыми*

450а. Въ выпуклыхъ многоугольникахъ «изломъ» контура, если начать съ какой-либо вершины многоугольника, имѣетъ либо направленіе движенія часовой стрѣлки, либо направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки — Напр, на черт. I (стр 155) наблюдатель, идущій отъ 1-й точки до 2-й, представитъ себѣ, что изломъ совершается въ направленіи движенія часовой стрѣлки —Иначе дѣло представляется въ черт II (стр 155) —

450б. Начертить выпуклый многоугольникъ, въ плоскости его провести прямую, раздѣляющую его на двѣ части — Во сколькихъ точкахъ эта прямая пересѣкаетъ периметръ многоугольника? (Въ двухъ) —Можно ли провести такую прямую линію, которая пересѣкла бы периметръ выпуклаго многоугольника въ трехъ точкахъ? (Невозможно) —Начертите не выпуклый многоугольникъ, возможно ли провести такую прямую въ плоскости этого многоугольника, чтобы она пересѣкла многоугольникъ болѣе, чѣмъ въ двухъ точкахъ? (Возможно)

Это основное свойство невыпуклыхъ многоугольниковъ можетъ лечь и въ основу опредѣленія многоугольниковъ этого рода Но главное на этой ступени— твердый навыкъ въ сознательномъ вычерчиваніи многоугольниковъ разнаго рода

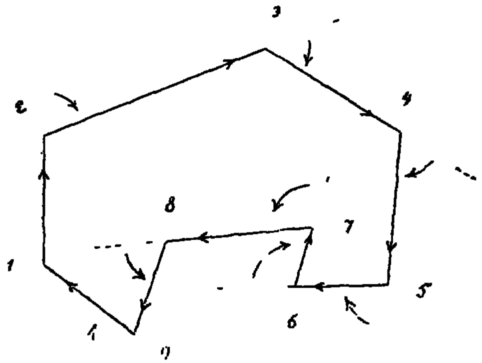


Къ № 456 (прим)

454. Начертить какой-нибудь треугольникъ, продолжить одну изъ его сторонъ, изъ вершины внѣшняго угла провести внутри его прямую, параллельную третьей сторонѣ, перенумеровать всѣ 5 угловъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, суммѣ какихъ двухъ внутреннихъ угловъ треугольника равенъ внѣшній его уголъ —Сдѣлать еще нѣсколько такихъ чертежей и выводъ —Разобраться въ томъ, чему равна сумма всѣхъ трехъ угловъ треугольника, и повторить упражненіе № 435

456. Взять выпуклый многоугольникъ, продолжить каждую его сторону только въ одномъ направленіи и вычислить, чему равна сумма внутреннихъ его угловъ и чему равна сумма внѣшнихъ

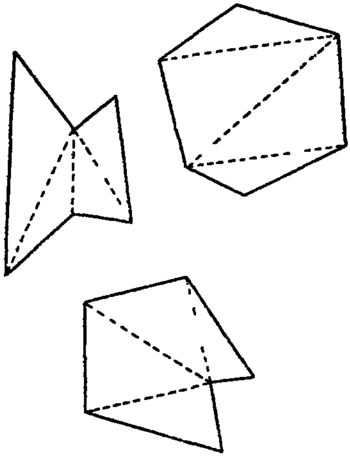
Чтобы ученикамъ быстро научиться вычерчивать выпуклые многоугольники, имъ полезно уяснить себѣ, что такое выпуклая замкнутая *кривая* линія Это — такая кривая линія, которую прямая линія можетъ пересѣчь только въ двухъ точкахъ и которая, такъ сказать, «изогнута» въ одномъ изъ направленій либо въ направленіи движенія часовой стрѣлки, либо въ направленіи противоположномъ Она можетъ быть также слѣдомъ точки, двигавшейся въ одномъ изъ этихъ двухъ направленій Если на выпуклой кривой взять рядъ точекъ, опять-таки въ одномъ изъ этихъ двухъ направленій, и соединить ихъ послѣдовательно, т.е. 1-ю со 2-й, 2-ю съ 3-й и т д до послѣдней, которую надо соединить съ первой, то получится выпуклый многоугольникъ



Къ № 450а черт III

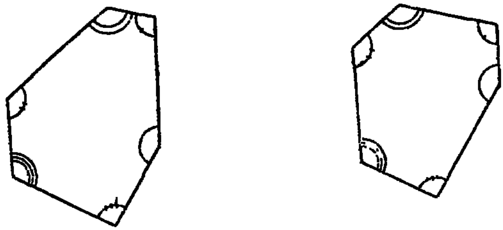
456а. Вычислить длину периметра даннаго многоугольника, измѣривъ всѣ его стороны

459. Начертить выпуклый пятиугольникъ и вычислить сумму его угловъ — Что это значитъ. «сумма угловъ выпуклаго пятиугольника равна суммѣ шести прямыхъ угловъ»?—Отъ сложенія одного прямого угла съ другимъ получается «уголъ», котораго обѣ стороны имѣютъ направъ чертежѣ —Послѣднихъ двухъ, на чертежахъ не отмѣченныхъ, угловъ строить не надо, равно какъ не надо откладывать послѣдней стороны они сами вполнѣ «опредѣляются» изъ чертежа Но къ нимъ можно прибѣгнуть для провѣрки построенія —Изъ упражненій этого рода у учениковъ появляется болѣе ясное пониманіе того, что для того, чтобы начертить фигуру, равную данной, не надо знать всѣхъ ея «элементовъ»



Къ № 461

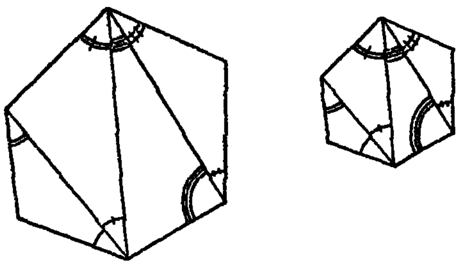
461б. Начертить многоугольникъ и еще одинъ, меньшихъ размѣровъ, но ему подобный, т -е на него совершенно похожій —Достаточно ли для этого подобія, чтобы углы одного многоугольника были порознь равны угламъ другого?—



Къ № 461б

Начертить два многоугольника, въ которыхъ стороны одного порознь параллельны сторонамъ другого и имѣютъ, взятыя соотвѣтственно, одно и то же направленіе —Многоугольники могутъ быть и не подобны въ этомъ случаѣ —Чего не хватаетъ? (Не хватаетъ пропорціональности сходственныхъ сторонъ)—Какъ этого достигнуть? (Этого можно достигнуть слѣдующимъ образомъ если одна сторона меньшаго многоугольника составляетъ $^3/_4$ соотвѣтственной стороны бо́льшаго, то слѣдующая, вторая, сторона меньшаго должна составлять тоже $^3/_4$ соотвѣтствующей, второй, стороны бо́льшаго, и т д)—А должны ли при этомъ углы второго многоугольника быть порознь равны угламъ перваго? (Должны непремѣнно)—А въ какомъ порядкѣ должно при этомъ брать углы? (Послѣдовательно, въ одномъ и томъ же порядкѣ въ обоихъ многоугольникахъ)—Надо при этомъ придать контуру какое-нибудь направленіе, напримѣръ, направленіе, обратное направленію движенія часовой стрѣлки, и углы брать послѣдовательно въ томъ же направленіи— Начертить два подобныхъ многоугольника

461в. Можно и иначе построить два подобныхъ многоугольника,—стоитъ первый разбить на треугольники—А



Къ № 461в

потомъ? (*А потомъ построить* треугольникъ, подобный первому, и затѣмъ послѣдовательно пристраивать треугольники, подобные и подобнымъ образомъ расположенные).

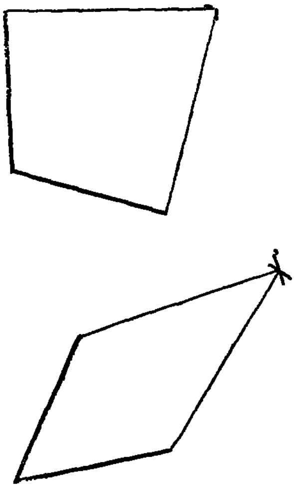
***461г.** Начертить «правильный» шестиугольникъ, раздѣлить два угла, прилежащихъ къ одной изъ его сторонъ *пополамъ*, и отдать отчетъ въ томъ, совпадаетъ ли центръ многоугольника съ точкой пересѣченія этихъ равнодѣлящихъ—Начертить правильный шестиугольникъ, изъ середины сторонъ одного и того же угла возставить перпендикуляры и убѣдиться въ томъ, что центръ многоугольника совпадаетъ съ точкой пересѣченія этихъ перпендикуляровъ —Дѣлится ли многоугольникъ на двѣ симметричныя части перпендикуляромъ, возставленнымъ изъ середины одной изъ его сторонъ?—А прямою, дѣлящею одинъ изъ его угловъ пополамъ?

***461д** Начертить «правильный» шестиугольникъ, изъ центра опустить перпендикуляры на его стороны и изъ этого центра радіусомъ, равнымъ одному изъ перпендикуляровъ, провести окружность —Она коснется всѣхъ сторонъ — Кругъ, касательный ко всѣмъ сторонамъ многоугольника, называется вписаннымъ въ этотъ многоугольникъ —Многоугольникъ этотъ называется описаннымъ около круга, а радіусъ круга, вписаннаго въ такой многоугольникъ,—*апоѳемой* правильнаго многоугольника —Что это значитъ «правильный» многоугольникъ?—Это—такой многоугольникъ, у котораго всѣ стороны одинаковы и у котораго *въ то же время* и всѣ углы одинаковы

№№ 461г—461е приведены для дополненія представленія о многоугольникѣ, и ихъ можно, какъ и другіе №№, снабженные звѣздочками, на-время опустить

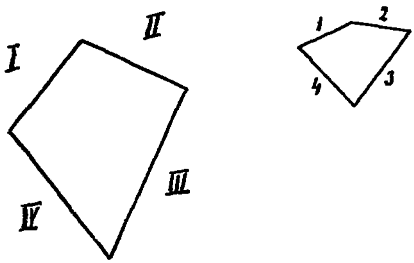
***461е.** Начертить два правильныхъ многоугольника,—одинъ побольше, другой поменьше,—съ одинаковымъ числомъ сторонъ —Подобны ли они?

462. Начертить два треугольника, изъ которыхъ во второмъ стороны порознь меньше сторонъ другого въ два раза,—въ три раза,—въ четыре раза —Начертить еще одинъ треугольникъ, въ которомъ каждая сторона составляла бы порознь $^3/_7$ соотвѣтствующей стороны перваго треугольника —Не подобны ли эти треугольники?—Замѣтьте если въ двухъ *треугольникахъ* стороны одного порознь пропорціональны сторонамъ другого, то эти треугольники *подобны* —А въ многоугольникахъ это тоже справедливо? (Нѣтъ).—Если стороны одного многоугольника порознь равны сторонамъ другого, то многоугольники могутъ быть или равны между собою, или не равны —Дѣйствительно возьмите вмѣсто перваго угла начертите меньшій, на его сторонахъ отложите стороны перваго угла, а потомъ проведите остальныя стороны — Возьмите еще одинъ многоугольникъ, стороны котораго вдвое меньше, чѣмъ стороны перваго, но одинъ изъ угловъ не равенъ соотвѣтственному, и новый многоугольникъ уже не будетъ подобенъ первому —Выполните этотъ чертежъ



Къ № 462

462а. Замѣтьте если стороны одного *многоугольника* порознь пропорціональны сторонамъ другого, то это еще не значитъ, что многоугольники подобны —Чтобы два



Къ № 462

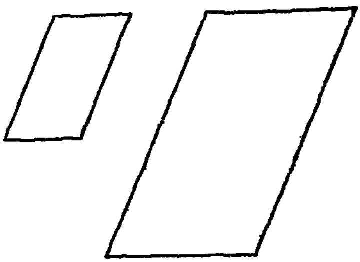
многоугольника были подобны, необходимы *два* условія: 1) стороны одного многоугольника, взятыя въ извѣстномъ порядкѣ, должны быть порознь пропорціональны *соотвѣтственнымъ* сторонамъ другого, и 2) углы, заключенные между нахъ, черезъ одну, сближаться и взаимно удаляться, и что онѣ могутъ служить, такъ сказать, «шарнирами» для сторонъ. При этомъ достойно вниманія, что въ треугольникѣ вершины не могутъ служить шарнирами для сторонъ треугольника и скрѣплять ихъ въ подвижную цѣпь подвижныхъ звеньевъ Эта механическая точка зрѣнія на многоугольникъ и треугольникъ приводитъ къ тому положенію, которое гласитъ форма треугольника вполнѣ «опредѣляется» его сторонами, а форма многоугольника однѣми сторонами не опредѣляется — Эти упражненія создадутъ довольно ясныя представленія и въ области вопросовъ о равенствѣ, и въ области вопросовъ о подобіи прямолинейныхъ фигуръ Благодаря имъ, перенесеніе понятія подобія на фигуры криволинейныя уже не представитъ особеннаго затрудненія, и ученики легко усмотрятъ, что, напр, всѣ круги подобны между собою, такъ какъ они не допускаютъ «сжатія» (такъ наз деформаціи) ни въ какомъ направленіи

462б Начертить два подобныхъ треугольника, взять въ одномъ изъ нихъ какую-нибудь точку и найти въ другомъ точку, ей «соотвѣтствующую» —Эти двѣ точки называются сходственными точками этихъ треугольниковъ —Чтобы найти сходственныя точки двухъ подобныхъ треугольниковъ, надо соединить точку, взятую въ первомъ, съ двумя вершинами того же треугольника, а затѣмъ? (А затѣмъ—построить при соотвѣтствующей сторонѣ второго треугольника треугольникъ, подобный получившемуся въ первомъ)

Главный трудъ и главнѣйшія упражненія, относящіяся къ этому пункту, отнесены къ самостоятельнымъ упражненіямъ учащихся къ книгѣ для учениковъ

466. Начертить двѣ взаимно-параллельныя прямыя, пересѣчь ихъ другими двумя взаимно-параллельными прямыми, отдать себѣ отчетъ въ сторонахъ четыреугольника, ими выдѣленнаго изъ плоскости, и стереть всѣ продолженія его сторонъ —Четыреугольникъ, въ которомъ двѣ стороны взаимно-параллельны, и остальныя двѣ — тоже взаимно-параллельны, называется *параллелограммомъ* —Какіе углы у начерченнаго параллелограмма? (Два острыхъ и два тупыхъ) —Могутъ ли всѣ углы параллелограмма быть прямыми?—Начертите параллелограммъ, въ которомъ всѣ углы прямые.—Какъ называется такой параллелограммъ, въ которомъ всѣ углы прямые? (Прямоугольнымъ параллелограммомъ) —Онъ называется также просто *прямоугольникомъ*.—Какъ называть параллелограммъ, въ которомъ углы не прямые?—Онъ называется *косоугольнымъ* параллелограммомъ

466a. Всѣ ли параллелограммы подобны? (Нѣтъ) — Всѣ ли прямоугольники подобны? (Нѣтъ) —Показать это на чертежѣ



Къ № 466a

468. Могутъ ли всѣ стороны параллелограмма быть равны между собою?— Начертите косоугольный параллелограммъ, въ которомъ всѣ стороны равны между собою —Такой параллелограммъ называется косоугольнымъ *ромбомъ* —Всѣ ли ромбы подобны? (Нѣтъ) —Какіе косоугольные ромбы подобны? (Тѣ ромбы, въ которыхъ острый (или тупой) уголъ одного равенъ одному изъ угловъ другого, стороны же всякаго ромба пропорціональны сторонамъ всякаго другого)

470. Начертите прямоугольный параллелограммъ, въ которомъ всѣ стороны одинаковы —Этотъ параллелограммъ— также ромбъ, притомъ прямоугольный —Какъ эта фигура иначе называется? (*Квадратомъ*) —Начертить нѣсколько квадратовъ равной величины —Возможно ли начертить нѣсколько квадратовъ разной величины?—Возможно ли начертить нѣсколько квадратовъ разной формы? (Не-

477. Начертить неравносторонній косоугольный параллелограммъ, провести одну его діагональ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, на какіе два треугольника раздѣляется этотъ параллелограммъ —То же сдѣлать съ неравностороннимъ прямоугольнымъ параллелограммомъ, съ косоугольнымъ ромбомъ и съ квадратомъ —Замѣтьте діагональ всякаго параллелограмма дѣлитъ его на два равныхъ треугольника

477а. Отъ чего зависитъ равенство двухъ треугольниковъ, на которые параллелограммъ раздѣляется діагональю?

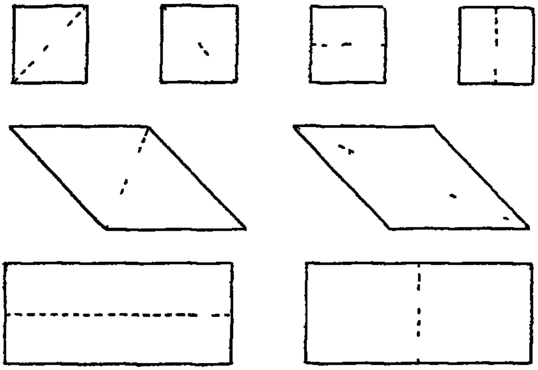
482. Начертить косоугольный ромбъ и квадратъ, провести въ нихъ по діагонали —Не симметричны ли треугольники, при этомъ полученные, въ каждой изъ этихъ фигуръ?

485. Начертить параллелограммы слѣдующихъ видовъ· одинъ косоугольный разносторонній, одинъ косоугольный ромбъ, одинъ неравносторонній прямоугольникъ, одинъ квадратъ —Провести въ каждой фигурѣ обѣ діагонали его и отдать себѣ отчетъ въ слѣдующемъ 1) дѣлятся ли діагонали взаимно пополамъ? 2) въ которыхъ фигурахъ онѣ не равны между собою, и въ которыхъ онѣ между собою равны? 3) въ которыхъ онѣ взаимно перпендикулярны, и въ которыхъ пересѣкаются не подъ прямымъ угломъ?

491. Начертить двѣ не равныя между собою, но взаимно-параллельныя, конечныя прямыя, и соединить концы этихъ двухъ прямыхъ прямыми линіями, взаимно одна другую не пересѣкающими —Такая фигура называется *трапецгей* —Начертить трапецію, въ которой непараллельныя двѣ стороны равны между собою («равнобочную» трапецію)

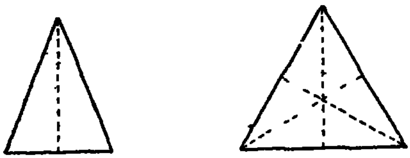
493 Начертить по одному параллелограмму главныхъ родовъ и двѣ трапеціи (одну неравнобочную, а другую равнобочную) и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какія изъ этихъ фигуръ можно раздѣлить на двѣ симметричныя части и какихъ нельзя раздѣлить на двѣ симметричныя части —

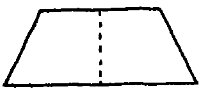
Сколько осей симметріи у неравносторонняго прямоугольника, сколько—у ромба, сколько—у квадрата, и сколько—у



Къ № 493

равнобочной трапеціи?—А сколько осей симметріи у разносторонняго треугольника? (Ни одной) —У равнобедреннаго? (Одна, если у него только двѣ стороны равны между собою) —У равносторонняго? (Три)



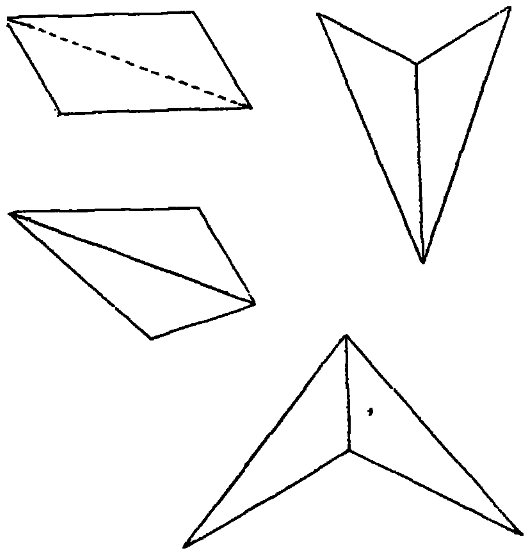


Къ № 493

На этой ступени затрагиваются уже такіе вопросы, что отъ нихъ переходъ къ вопросамъ о томъ, изъ какихъ частей состоитъ фигура, и о томъ, возможны ли фигуры разной формы, но состоящія изъ однѣхъ и тѣхъ же частей, уже вполнѣ естественен. Не стараясь исчерпать вопроса о площади прямолинейной фигуры, ближайшія упражненія можно направить къ удовлетворенію намѣченныхъ запросовъ Но если учитель не считаетъ возможнымъ ограничиться тѣмъ, что намѣчено ниже (№№ 501—505), то онъ можетъ, Полезно на этой ступени начертить прямолинейную фигуру, отъ нея «отрѣзать» часть, ее прибавить по-иному, потомъ — другую часть и ее прибавить по-иному и т д, послѣ чего должна получиться фигура совсѣмъ другой формы Благодаря этому, у учениковъ образуется вѣрное представленіе о «площади» фигуры

505 Квадратъ разрѣзать діагональю на два треугольника и изъ нихъ составить одинъ треугольникъ. — «Площадь» этого квадрата и площадь полученнаго отъ сложенія его частей треугольника одинаковы — *Площадь* квадрата, котораго сторона содержитъ одинъ аршинъ, называется *квадратнымъ аршиномъ* — А квадратнымъ вершкомъ называется *площадь* какого квадрата? — А квадратнымъ центиметромъ называется *площадь* какого квадрата?

Къ сожалѣнію, и въ учебникахъ, и еще чаще — въ учебной практикѣ, квадратнымъ аршиномъ называютъ не *площадь* квадрата, котораго сторона равна аршину, а самый квадратъ Это, конечно, не вполнѣ точно Квадратъ, какова бы ни была его сторона, есть только фигура, и квадратному аршину можетъ быть равна только его площадь, если сторона этого квадрата равна линейному аршину Съ другой стороны, квадратному аршину можетъ быть равна площадь фигуры какой угодно иной формы, а не только площадь квадрата Квадратъ же, сторона котораго равна одной единицѣ длины, представляетъ собою только фигуру, наиболѣе удобную для того, чтобы ея площадь принималась за единицу мѣры при измѣреніи площадей *Самая фигура* (а квадратъ есть фигура) не можетъ быть принимаема за единицу для *измѣренія площадей* — Затрудненія при усвоеніи учениками представленія о квадратныхъ единицахъ мѣры случаются (особенно у неопытныхъ учителей), когда у учениковъ смѣшиваются такія понятія, какъ периметръ фигуры и площадь ея Напримѣръ, учитель спрашиваетъ, какъ велика площадь квадрата, котораго сторона 3 аршина, а ученикъ отвѣчаетъ, что площадь равна 12 арш, принимая периметръ за площадь Поэтому ученикамъ не надо упускать изъ виду, что площадь квадрата—не квадратъ, что фигура—не площадь, а площадь вовсе—не фигура и отнюдь не периметръ Большую услугу при этомъ оказываетъ



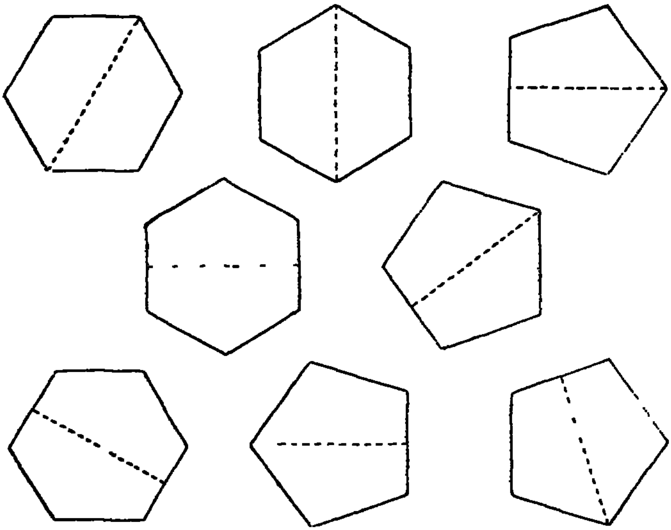
Къ № 501

установленіе понятія о квадратной сажени, о квадратномъ футѣ и т п , именно, какъ о нѣкоторыхъ площадяхъ, а не какъ о нѣкоторыхъ фигурахъ —Особенно вредно отзывается смѣшеніе понятія о площади съ понятіями о фигурѣ и о периметрѣ ея при изученіи длины окружности круга и площади круга

§ 7. Вычисленіе длины окружности

506. Раздѣлить данную окружность на 6 равныхъ частей —Запомните сторона правильнаго шестиугольника равна радіусу описанной «около» него окружности

506а. Начертить какой-нибудь правильный многоугольникъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, можетъ ли онъ быть раздѣленъ на двѣ симметричныя части —Раздѣлить одинъ изъ его угловъ пополамъ, продолжить эту равнодѣлящую до пересѣченія съ периметромъ многоугольника и отдать себѣ отчетъ въ томъ, въ какой точкѣ этого периметра она



Къ №№ 506—506в

его пересѣчетъ (Либо въ вершинѣ противолежащаго угла, либо въ срединѣ противолежащей стороны,—смотря по тому, четное ли число сторонъ у многоугольника или нечетное).

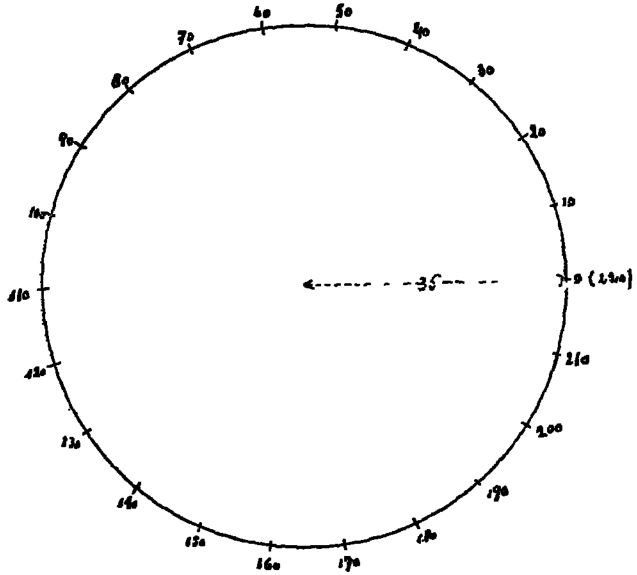
506б. Построить правильный многоугольникъ, раздѣлить одну изъ его сторонъ пополамъ, изъ этой середины возставить къ той же сторонѣ перпендикуляръ въ той же плоскости, продолжить его до пересѣченія съ периметромъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, черезъ какую точку периметра пройдетъ этотъ перпендикуляръ

506в. Сколько осей симметріи у правильнаго многоугольника съ четнымъ числомъ сторонъ? (*Столько же, сколько угловъ*) —Сколько осей симметріи у правильнаго многоугольника съ нечетнымъ числомъ сторонъ?—Сколько осеи симметріи у круга? (Безчисленное множество)

508. Начертить какой-нибудь многоугольникъ, измѣрить длину каждой изъ его сторонъ, число записать и *вычислить* длину его периметра.—Какое дѣйствіе надо было совершить? (Сложеніе) —Начертить равносторонній треугольникъ, измѣрить длину одной его стороны, записать число и *вычислить* длину периметра этого треугольника —Какое дѣйствіе надо было совершить надъ записаннымъ числомъ? (Помножить на 3) —Почему?—Начертить правильный шестиугольникъ, измѣрить его радіусъ и вычислить, чему равна длина его периметра —Начертить правильный двѣнадцатиугольникъ, измѣрить длину его стороны и вычислить длину его периметра — Замѣтьте периметръ всякаго правильнаго шестиугольника ровно въ шесть разъ больше его радіуса —Почему?—Сторона правильнаго треугольника приблизительно равна 1,732 долямъ его радіуса, сторона квадрата составляетъ приблизительно 1,414 долей его радіуса, сторона правильнаго пятиугольника — приблизительно 1,177 радіуса —Почему—вы узнаете впослѣдствіи

Важно, чтобы ученики поняли послѣдовательность операцій что сначала надо было начертить, что — потомъ измѣрить, затѣмъ что—записать, наконецъ, что—вычислить —Важно также, чтобы они поняли, что существуетъ нѣкоторая числовая (функціональная) зависимость между длиною стороны правильнаго многоугольника и длиной его радіуса

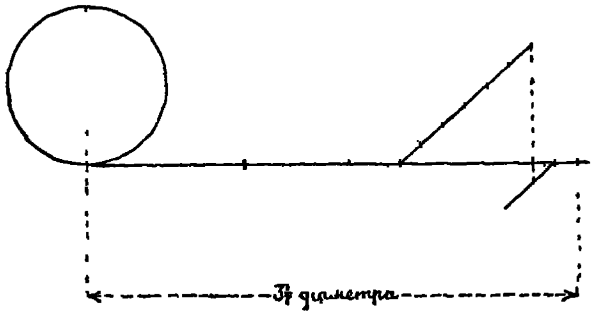
508а. Начертить какой-нибудь кругъ, измѣрить его радіусъ, записать его длину и *вычислить* длину окружности —Знаемъ ли мы, какое дѣйствіе надо совершить надъ числомъ, выражающимъ длину радіуса для того, чтобы *вычислить* длину окружности круга? (Нѣтъ, не знаемъ) — Значитъ, *вычислить* длину окружности мы не можемъ — Нельзя ли ее измѣрить аршиномъ, вершкомъ, футомъ, сакоторый опять надо измѣрить У насъ первый кусокъ былъ въ $^{16}/_4$ дюйма Посмотримъ, какую часть нашего остатка составляетъ $^{16}/_4$ дюйма Приблизительно половину Стало-быть, длина окружности 36 дюймовъ, да еще 8 дюймовъ, т-е



Къ № 508г

44 дюйма Найдемъ отношеніе—44 дюйма 14 дюймовъ и получимъ, что оно равно $^{22}/_7$ или $3^1/_7$.

508д. Начертить окружность, изъ точки, взятой на этой окружности, провести касательную и на ней отъ точки касанія отложить прямую, которой длина приблизительно равна длинѣ окружности круга.—Замѣтьте отношеніе длины окружности круга къ длинѣ его діаметра выражается точнѣе · 3,1416; съ той же точностью до 0,0001 это отношеніе выражается дробью $^{3927}/_{1250}$ —Запомнить первое число можно такъ сначала записать 3,1, затѣмъ сложить эти, двѣ цифры и приписать полученное. 3,14, затѣмъ приписать еще одну единицу и сложить послѣднія три цифры, — получимъ 3,1416 —Дробь $^{3927}/_{1250}$ запомнить тоже не трудно знаменатель 1250, а числитель 3, затѣмъ 3-жды 3 (т-е 9), затѣмъ 3-жды 9, т-е 27, всего 3927. — Очень удобна и весьма точна дробь $^{355}/_{113}$, которая даетъ шесть цифръ этого отношенія послѣ запятой, а запомнить ее тоже не трудно выписать три первыя нечетныя цифры (1,3,5), каждую по два раза (113355), послѣднія три цифры принять за числителя, а первыя три—за знаменателя —Точнаго значенія отношенія



Къ № 508д.

длины окружности къ діаметру нельзя выразить ни въ видѣ обыкновенной дроби, ни въ видѣ конечной десятичной, ни въ видѣ безконечной десятичной періодической Его поэтому только обозначаютъ буквою —Для этого обозначенія взята греческая буква (начальная буква греческаго слова «периферія») —Болѣе точное значеніе числа π слѣдующее: 3,1415927 Запомнить его тоже не трудно, если помнить четыре первыя цифры 3,1415, — сначала сложить 5 и 4, записать, затѣмъ сложить 1 и 1 записать (ужъ получили 3,141592), потомъ сложить 5 и 2,—получимъ 3,1415927.

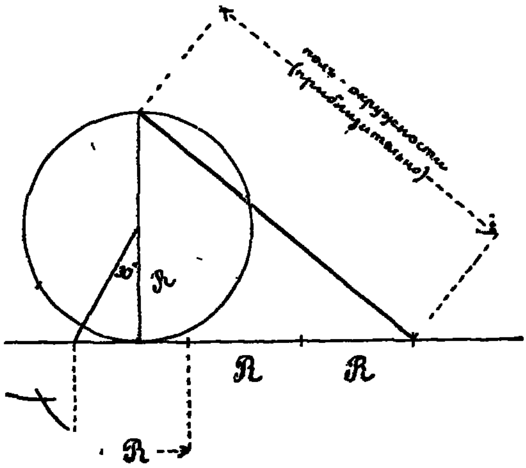
***508е.** Начертить окружность какого-нибудь круга, провести его вертикальный діаметръ, изъ конца его провести касательную вправо, изъ центра провести радіусъ налѣво подъ угломъ въ 30^0 съ радіусомъ, перпендикулярнымъ къ касательной, продолжить проведенный радіусъ до пересѣченія съ продолженіемъ касательной, отъ этого пересѣченія отложить на касательной прямую, равную утроенному радіусу и соединить верхнюю точку вертикальнаго діаметра съ концомъ отложенной прямой —Длина гипотенузы полученнаго прямоугольнаго треугольника равна (приблизительно, съ точностью до одной десятитысячной) длинѣ полуокружности начерченнаго круга[1]) —Замѣтьте себѣ *съ помощью линейки и циркуля никакими способами невозможно начертить такую прямую, которой длина* **точно** *равнялась бы длинѣ окружности* —Можно говорить и короче съ помощью линейки и циркуля не выпрямить окружности круга.

Подъ словами «никакими способами» ученики должны понимать слѣдующее какіе бы треугольники ни строить, какіе бы перпендикуляры ни проводить, какія бы параллельныя прямыя и какія бы окружности ни чертить,—все равно, окружности точно никакъ не «выпрямить» —Проволока, нитка, лента писчей бумаги, охватывающая аккуратно стаканъ или другой предметъ цилиндрической формы полезны въ рукахъ учениковъ Но они должны уразумѣть, что распрямленіе нитки, проволоки и т п —не геометрическій способъ построенія прямой, длина которой равна длинѣ окружности

***508ж.** Начертить окружность, вычислить сколько приблизительно градусовъ, минутъ и секундъ содержитъ дуга, длина которой равна длинѣ радіуса.—Предположимъ, что въ этой дугѣ x секундъ, но длина всей окружности равна $2R\pi$, а длина дуги въ одну секунду равна

$$\frac{2R.\pi}{360.60\ 60}$$

[1]) Это построеніе придумано Коханскимъ, жившимъ въ XVII вѣкѣ



Къ № 508е

Стало-быть, длина дуги въ x секундъ равна

$$\frac{2R\pi x}{360\ 60\ 60},$$

но, по условію, длина дуги въ x секундъ равна длинѣ R, а потому

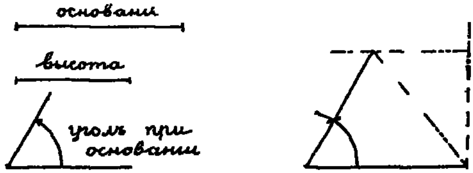
$$\frac{2R\pi x}{360\ 60\ 60}=R, \text{ откуда } x=\frac{2R\pi}{360\ 60\ 60\ R}.$$

Въ числителѣ и знаменателѣ R и R сократятся, и получимъ, что приблизительно

$$x=\frac{360\ 60\ 60}{2\ 3{,}1415927}$$

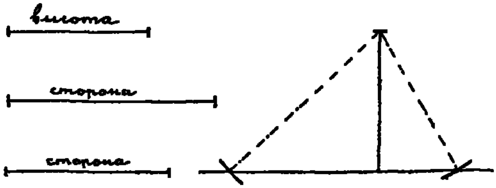
Послѣ всѣхъ вычисленій получимъ, что число секундъ у этой дуги, т-е $x=206264'',8$. Стало-быть, дуга эта равна $57^0 17' 44'',8$ —Центральный уголъ, въ которомъ длина дуги равна длинѣ радіуса, называется *радіаномъ*

***508з.** Вписать въ кругѣ и описать около него правильные 24-хъ-угольники —Чего можно достигнуть, удваивая дача разрѣшима? (Данная, сверхъ основанія, сторона должна быть больше высоты, потому что наклонная всегда должна быть больше перпендикуляра) —Можетъ ли третья сторона быть равна высотѣ? (Можетъ)



Къ № 525

525. Построить треугольникъ по основанію, высотѣ и одному изъ угловъ, противолежащихъ высотѣ —Всегда ли эта задача разрѣшима? (Данный уголъ долженъ быть острымъ, потому что ни тупой, ни прямой уголъ не могутъ лежать противъ высоты треугольника)

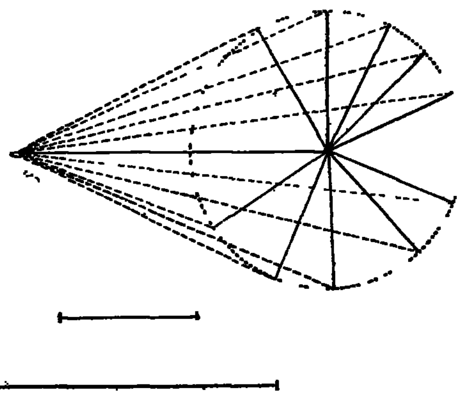


Къ № 525а

525а. Построить треугольникъ по двумъ сторонамъ и высотѣ, опущенной на третью —Всегда ли эта задача возможна? (Каждая изъ данныхъ сторонъ должна быть больше высоты) —Сколько рѣшеній? (Если данныя двѣ стороны равны между собою, одно, въ противномъ случаѣ—два: одинъ треугольникъ остроугольный, а другой — тупоугольный).

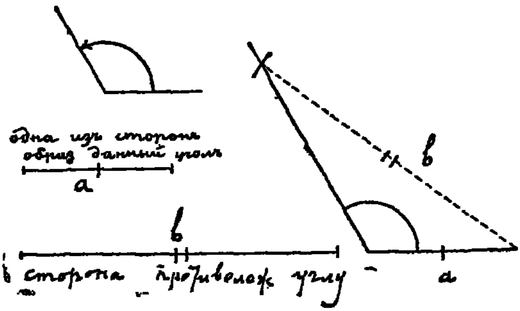
525б. Построить треугольникъ по двумъ неодинаковымъ его сторонамъ —Такихъ треугольниковъ, у которыхъ данныя двѣ прямыя были бы сторонами, безчисленное множество —

Какого еще элемента не хватаетъ для того, чтобы построенный треугольникъ былъ единственнымъ? (Угла между сторонами или третьей стороны) —Намъ же не даны ни тотъ, ни другая —Но если бы намъ дали, сверхъ этихъ двухъ неодинаковыхъ сторонъ, еще одинъ элементъ, а именно уголъ, но не тотъ уголъ, который образованъ этими сторонами, а уголъ, *противолежащій* одной изъ нихъ, что намъ надо было бы еще знать?—Необходимо *изслѣдовать,* не надо ли знать, какой изъ двухъ сторонъ этотъ уголъ противолежитъ большей или меньшей —Получаются, стало-быть, двѣ задачи



Къ № 525б

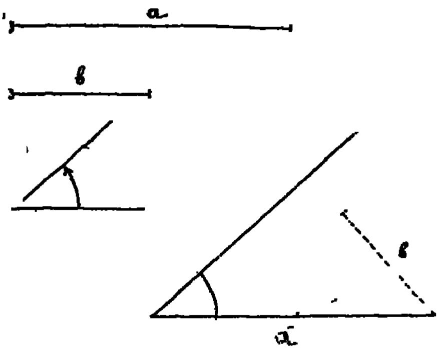
525в. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ неодинаковымъ сторонамъ и углу, противолежащему *большей* изъ нихъ —Что надо прежде всего построить? (Извѣстный намъ уголъ) —Потомъ? (На одной сторонѣ угла отложить меньшую изъ сторонъ требуемаго треугольника) —А затѣмъ, принявъ конецъ стороны *b* за центръ, описать радіусомъ, равнымъ прямой *a,* дугу, которая пересѣкла бы вторую сторону угла (сдѣлать засѣчку) и соединить конецъ прямой



Къ № 525в

b съ засѣчкой — Разсмотрѣть всѣ возможные случаи, какіе могутъ представиться при этомъ въ углахъ данный уголъ можетъ быть острымъ, прямымъ и тупымъ — Всегда ли задача разрѣшима? (Всегда) — Сколько рѣшеній въ каждомъ частномъ случаѣ? (Одно)

529. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ неодинаковымъ сторонамъ его и углу, противолежащему *меньшей* изъ нихъ — Что надо построить прежде всего? (Данный уголъ) — Потомъ? (Отложить бо́льшую сторону на одной изъ сторонъ угла) — Почему бо́льшую? (Потому что этотъ уголъ *противолежитъ* меньшей) — Далѣе надо сдѣлать

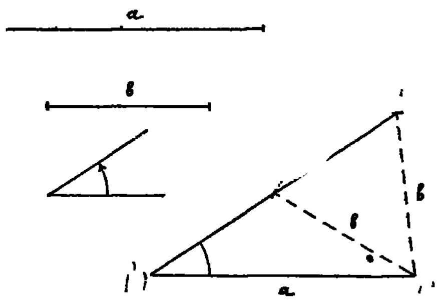


Къ № 529

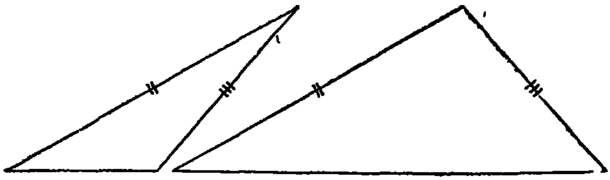
«засѣчку» изъ конца отложенной стороны радіусомъ, равнымъ прямой b, на второй сторонѣ даннаго угла.—Но этой засѣчки сдѣлать нельзя, и нѣтъ такого треугольника, въ которомъ стороны были бы порознь равны даннымъ прямымъ a и b, и уголъ, противолежащій сторонѣ b, былъ бы равнъ углу B.

Начинать можно и не съ невозможнаго случая. Но иногда онъ рѣзче другихъ двухъ случаевъ направляетъ вниманіе учениковъ на ту зависимость, которая существуетъ между рѣшеніемъ задачи и перпендикуляромъ, противолежащимъ данному углу и опущеннымъ изъ конца бо́льшей стороны треугольника на вторую сторону угла.

529а. Что необходимо для того, чтобы «засѣчка» была возможна? (Необходимо, чтобы меньшая изъ данныхъ двухъ сторонъ была больше перпендикуляра, противолежащаго данному углу).—Пусть сторона b больше этого перпендикуляра.—Тогда соединимъ обѣ засѣчки съ концомъ стороны a и получимъ два треугольника $BA'C$ и $BA''C$, которые удовлетворяютъ условіямъ задачи.—Возможенъ ли случай, когда перпендикуляръ, противолежащій данному углу и опущенный изъ конца большей стороны треугольника на вторую сторону угла, равенъ сторонѣ b? (Возможенъ).



Къ № 529а



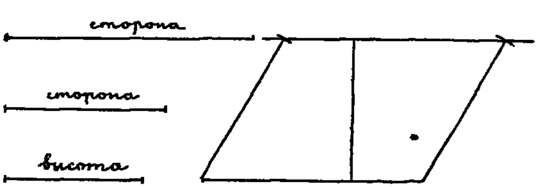
Къ №№ 529б и 531

изъ конца меньшей стороны искомаго треугольника на вторую сторону даннаго угла, больше меньшей стороны искомаго треугольника,—*либо разрѣшима* а) задача имѣетъ *два* рѣшенія тогда, когда упомянутый перпендикуляръ меньше меньшей стороны, и б) задача имѣетъ *одно* рѣшеніе тогда, когда упомянутый перпендикуляръ равенъ меньшей сторонѣ, и тогда требуемый тр—къ прямоугольный).

Эта задача требуетъ многократныхъ упражненій съ числовыми данными и многихъ чертежей, дѣйствительно соотвѣтствующихъ этимъ числовымъ даннымъ Въ противномъ случаѣ задача эта содержитъ слишкомъ много діалектическихъ трудностей и разъясненій, не опирающихся на непосредственный опытъ учащихся, въ основномъ курсѣ играющій особенно важную роль

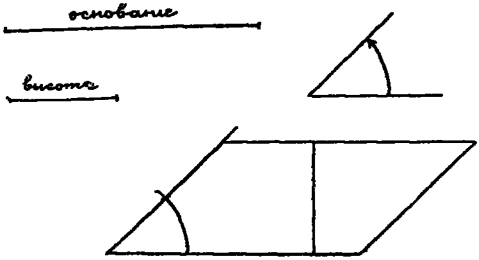
531. Построить треугольникъ по высотѣ и двумъ не одинаковымъ сторонамъ, выходящимъ изъ той же вершины, изъ которой опущена высота —Эта задача допускаетъ два рѣшенія Ср черт къ №№ 529б и 531

532. Построить параллелограммъ по высотѣ и взаимно не параллельнымъ двумъ его сторонамъ



Къ № 532

535. Построить параллелограммъ по основанію, одному изъ угловъ и высотѣ

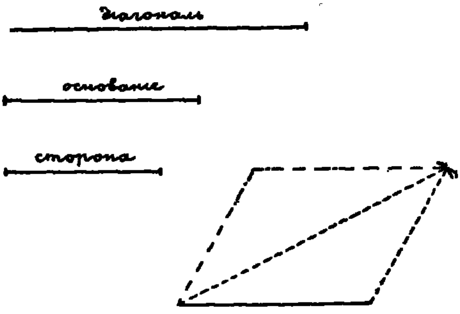


Къ № 535

537. Построить параллелограммъ по діагонали и двумъ не параллельнымъ сторонамъ

539. Построить параллелограммъ по сторонѣ, діагонали и углу между ними

541. Построить параллелограммъ по діагонали и двумъ угламъ къ ней прилежащимъ —Два случая

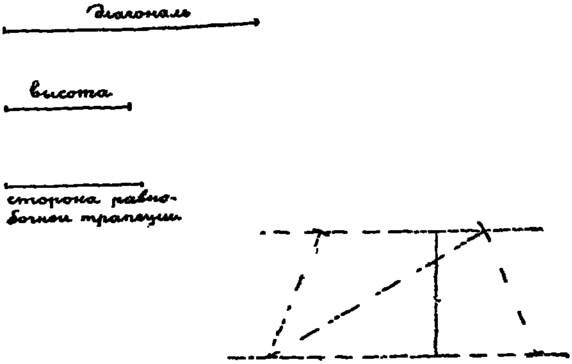


Къ № 537

543. Построить параллелограммъ по его діагонали, высотѣ и основанію —Прежде всего построить прямой уголъ, на одной его сторонѣ отложить основаніе, а на другой— отъ его вершины высоту параллелограмма, затѣмъ провести

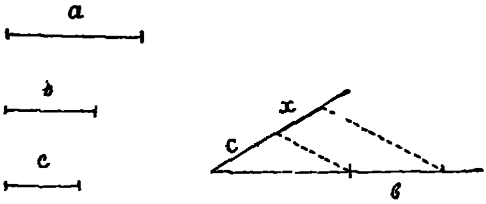
567. Даны высота и оба основанія равнобочной трапеціи Построить эту трапецію

568. Построить два подобныхъ треугольника по сторонѣ одного и по соотвѣтствующей сторонѣ другого —

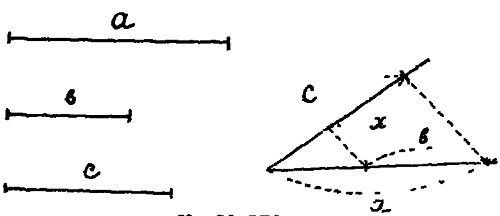


Къ № 563

Построить два подобныхъ треугольника по сторонѣ одного, по соотвѣтствующей сторонѣ другого и одному углу, прилежащему къ каждой изъ этихъ сторонъ —Построить два

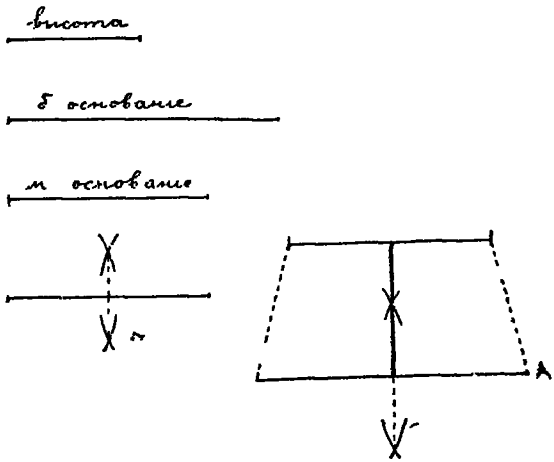


Къ № 576



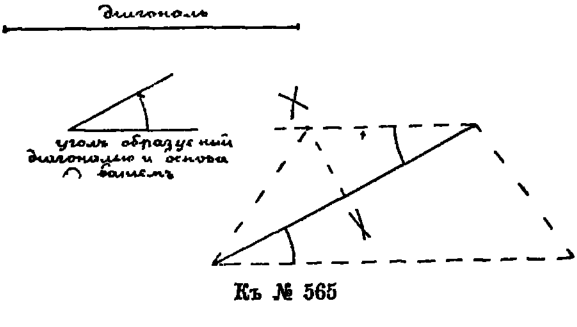
Къ № 576

подобныхъ тр—ка по сторонѣ одного изъ нихъ, по соотвѣтствующей сторонѣ другого и двумъ угламъ, прилежащимъ къ этимъ сторонамъ —Разобраться въ томъ, сколько рѣшеній у каждой изъ задачъ этого нумера



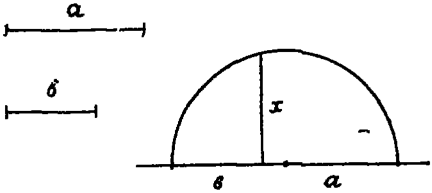
Къ № 567.

570. Построить два подобныхъ треугольника при условіи, что стороны одного изъ нихъ относятся къ соотвѣтствующимъ сторонамъ другого, какъ 5 3 —Построить еще два треугольника при тѣхъ же условіяхъ, подобны эти последніе треугольники прежнимъ двумъ?



Къ № 565

572. Построить два подобныхъ четыреугольника при условіи, что стороны одного изъ нихъ относятся къ соотвѣтственнымъ сторонамъ другого, какъ 4 7.



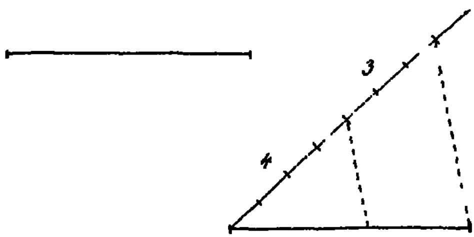
Къ № 578

574. Построить два подобныхъ пятиугольника при условіи, что стороны одного изъ нихъ относятся къ сходственнымъ сторонамъ другого, какъ 4 5. — Построить еще два подобныхъ многоугольника, удовлетворяющихъ тому же условію — Должны ли быть многоугольники первой пары порознь подобны многоугольникамъ второй пары?

576. Начертить четвертую пропорціональную даннымъ тремъ конечнымъ прямымъ a, b и c, т-е такую прямую x, которая въ пропорціи a $b=c$ x занимала бы четвертое мѣсто

578. Начертить среднюю пропорціональную между прямыми a и b, т-е такую прямую x, которая удовлетворяла бы пропорціи $a . x = x$ b

579. Раздѣлить данную прямую на двѣ части, которыхъ отношеніе было бы равно 4 3



Къ № 579

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

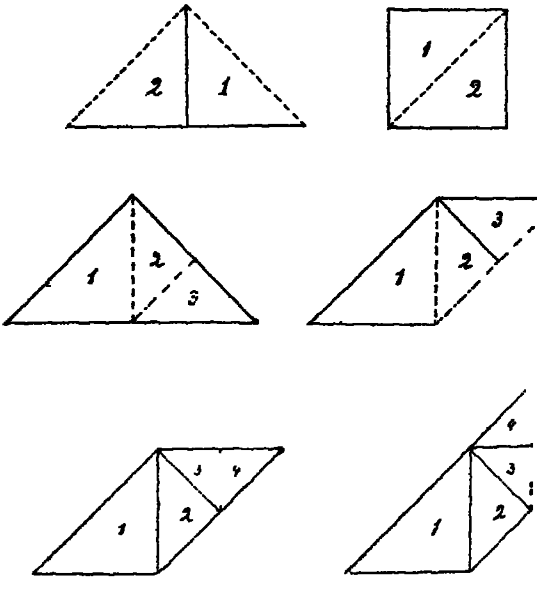
Площади прямолинейныхъ фигуръ и площадь круга.

§ 9. Площади прямолинейныхъ фигуръ

581. Начертите на доскѣ какой-нибудь многоугольникъ, раздѣлите его прямою линiей на двѣ неодинаковыя части и сложите эти двѣ части такъ, чтобы получилась фигура другой формы, но состоящая изъ тѣхъ же двухъ частей — *Не измѣнилась при этомъ площадь фигуры* —Разрѣжьте новую фигуру опять на двѣ части и ихъ сложите такъ, чтобы получилась фигура новой формы, но чтобы она состояла изъ тѣхъ же частей —Опять не измѣнилась *площадь* фигуры —Такимъ же образомъ можно получить еще одну новую фигуру и съ каждой новой фигурой повторить то же самое сколько угодно разъ —Будетъ ли измѣняться при этомъ площадь фигуры?—А что будетъ при этомъ измѣняться? (Форма фигуры, нѣкоторые углы, стороны ея) — Равны ли между собою площади одинаковыхъ фигуръ?

581a. Начертить два многоугольника разной формы; начертить такой третiй, чтобы онъ состоялъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ первая равна первому многоугольнику, а вторая—второму — О третьемъ многоугольникѣ говорятъ, что *площадь* его равна *суммѣ площадей* первыхъ двухъ

Въ распоряженіи класса должны быть или линейка съ подраздѣленіями на вершки, дюймы и сантиметры, или таблица съ начерченными единицами мѣры длины. Одно только словесное знаніе соотношеній единицъ мѣръ длины недостаточно для надлежащей выработки вѣрныхъ и примѣнимыхъ къ жизни и наукѣ представленій о площадяхъ и объемахъ



Къ № 582

585. Начертить на доскѣ «ленту»,—прямоугольникъ, въ которомъ длина высоты (или ширина) — одинъ футъ (одинъ вершокъ, одинъ дюймъ), а длина основанія (или просто длина) — 5 футовъ (вершковъ, дюймовъ), и разрѣзать его на квадраты, въ которыхъ длина стороны равна футу (вершку или дюйму) — Сколько получится такихъ квадратовъ?—Какъ велика площадь этого прямоугольника? (5 кв. футовъ, или вершковъ, или дюймовъ).

Когда говорятъ, что сторона прямоугольника *равна* 1 футу или 5 футамъ, то подъ этимъ надо разумѣть, что *длина* этой стороны равна одному футу или пяти футамъ Сторона есть конечная прямая *линія*, а футъ—единица длины, или длина нѣкоторой опредѣленной конечной прямой, принимаемая за единицу при измѣреніи *длины* И это — не такая тонкость, которая не заслуживаетъ вниманія подобная же тонкость лежитъ въ основѣ измѣренія значеній всякой величины, къ какому бы роду величинъ она ни принадлежала Дѣло въ томъ, что за единицу при измѣреніи вѣса принимается нѣкоторый вѣсъ, за единицу при измѣреніи скоростей—нѣкоторая скорость, за единицу при измѣреніи объемовъ—объемъ, за единицу при измѣреніи работы—нѣкоторая работа, и т д Точно *такъ же* за единицу при измѣреніи площадей должна быть принимаема нѣкоторая опредѣленная площадь, а за единицу при измѣреніи длинъ—нѣкоторая длина Такимъ образомъ аршинъ есть *длина* нѣкоторой опредѣленной прямой, а метръ—*длина* нѣкоторой другой опредѣленной прямой —Лучше исподоволь надъ этими вопросами поработать, чѣмъ обойти ихъ молчаніемъ

587. Начертить прямоугольникъ, котораго основаніе 6 вершковъ, а высота 4 вершка Какъ велика площадь этого прямоугольника? — Разрѣжемъ прямоугольникъ на 4 прямоугольника (полосы, «ленты»), у которыхъ въ каждомъ высота равна 1 вершку, и одну изъ этихъ «полосъ» — на квадраты, стороны которыхъ порознь равны вершку —Такихъ полосъ получится четыре, площадь каждой 6 кв вершковъ, а потому площадь всего прямоугольника·

$$6 \text{ кв вершк} \times 4 = 24 \text{ кв в}$$

Обратите вниманіе какое наименованіе у длины основанія? (Вершки) — Какіе вершки? (Линейные) — Какое наименованіе у множимаго? (Кв вершки) —Какое—у произведенія? (Кв вершки) — Какое наименованіе у множителя? (Никакого). — Онъ — отвлеченное число, выражающее, сколько въ квадратной сажени? (3 кв арш $\times 3 = 9$ кв арш) — Повторить всю «таблицу» квадратныхъ мѣръ — А что такое десятина? (Десятина — *площадь*, равная 2400 кв саж) — Какіе вы можете придумать прямоугольники, у которыхъ площадь каждаго равна одной десятинѣ? — Таковы, *напр*, *прямоугольники*, у которыхъ

основаніе	80	саж,	а	высота	30	саж		
„	60	„	„	„	40	„		
„	100	„	„	„	24	„		

и т. п) — Много ли можно придумать такихъ прямоугольниковъ съ основаніями и высотами, которыя выражаются въ цѣлыхъ числахъ? (Довольно много, но не безчисленное множество) — Сколько именно? (Не знаемъ) — Не только не безчисленное множество, а всего только 18.

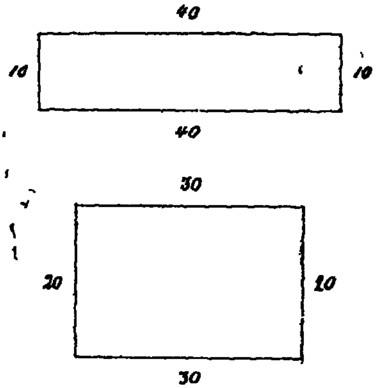
2400×1	800×3	480×5
1200×2	400×6	240×10
600×4	200×12	120×20
300×8	100×24	60×40
150×16	50×48	80×30
75×32	25×96	160×15

Чаще всего говорятъ о десятинѣ, какъ о площади прямоугольника, у котораго основаніе равно либо 80 саж, либо 60 саж., а высоты, соотвѣтственно, либо 30 саж, либо 40 саж — Но не надо думать, что такую площадь, которая равна одной десятинѣ, можетъ имѣть только участокъ земли прямоугольной формы: участокъ земли, котораго площадь равна одной десятинѣ, можетъ имѣть и иную форму.

596. А чему равенъ *периметръ* участка земли величиною съ десятину? — Смотря по тому, какая форма у участка если основаніе 80 саж, а высота 30 саж, то периметръ равенъ (80 саж $\times$2)$+$(30 саж $\times$2) или 160 саж $+$60 саж $=$ $=$220 саж, если же основанiе его 60 саж, а высота 40 сажъ, то периметръ равенъ

$$(60 \text{ саж} \times 2)+(40 \text{ саж} \times 2)=200 \text{ саж.}$$

—Какъ же это такъ площади одинаковы, а периметры разные? (Да, площади могутъ быть одинаковыя, а периметры разные, и наоборотъ периметры могутъ быть одинаковые, а площади—разныя) —Возьмите любой примѣръ пусть периметръ прямоугольника равенъ 100 дюймамъ,—два основанiя по 40 дм, остальныя двѣ стороны по 10 дм, площадь равна 400 кв дм, теперь положимъ, что взяты два основанiя по 30 дм, а остальныя двѣ стороны по 20 дм, площадь второго параллелограмма равна 600 кв дм —Придумайте еще по три примѣра двоякаго рода чтобы площадь была одна и та же, а периметры разные, и чтобы периметры были одинаковы, а площади—разныя



Къ № 596

Послѣ этихъ упражненiй въ вычисленiи площадей прямоугольниковъ и послѣ выясненiя ученикамъ тѣхъ вопросовъ, съ которыми они могутъ связать свои познанiя о площади прямоугольника, смѣло можно было бы обратиться къ вопросамъ вычисленiя объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ, которыми начинается § 16 этой книги Это тѣмъ дозволительнѣе, что въ курсѣ ариѳметики считается возможнымъ касаться вопроса о вычисленiи объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ и что такое изученiе вычисленiя объемовъ дастъ возможность лучшаго освѣщенiя общаго вопроса о вычисленiи геометрическихъ величинъ этихъ

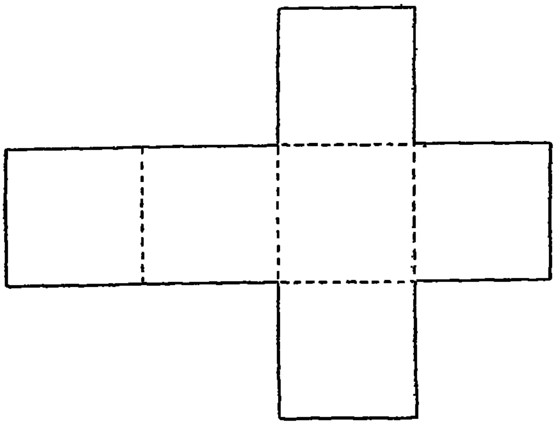
Очевидно, что съ уменьшенiемъ, начиная съ 25-ти, единицъ въ основанiи, увеличивается высота, но уменьшается площадь, уменьшается она также съ увеличенiемъ, начиная съ 25-ти, числа единицъ въ основанiи Такимъ образомъ изъ прямоугольниковъ, у которыхъ одинъ и тотъ же *периметръ*, наибольшая площадь у того квадрата, котораго сторона равна 25-ти дюймамъ Неудобство, если ученики не знаютъ извлеченiя квадратныхъ корней, представляетъ только вопросъ перваго рода, а именно, о минимумѣ периметра при данной площади прямоугольника — Во всякомъ случаѣ, вопросы эти могутъ быть полезны только тогда, когда ученики сами набредутъ на вопросы этого рода и когда они въ состоянiи самодѣятельно уяснить себѣ ихъ на наглядныхъ примѣрахъ,—притомъ вполнѣ, а не со словъ учителя При такомъ полномъ уясненiи вопроса, само собою разумѣется, что для учениковъ должно изъ вычисленiй выясниться также и то обстоятельство, что при «постоянномъ» (одномъ и томъ же) периметрѣ прямоугольниковъ съ разными площадями площадь имѣетъ *максимумъ*, но не имѣетъ минимума (если не считать таковымъ нуля, когда основанiе равно половинѣ периметра, а высота равна нулю), а при «постоянной» площади периметръ имѣетъ *минимумъ*, но не имѣетъ максимума —Если дѣло ставить на почву конкретныхъ упражненiй и задачъ, то эти вопросы оказываются гораздо проще и легче для учениковъ, чѣмъ это можетъ казаться съ перваго взгляда Такъ какъ все ученiе о площадяхъ основывается на ученiи о площади прямоугольника, то всѣ эти упражненiя весьма полезны Они вообще вносятъ въ это последнее ученiе больше сознательности и наглядности

601. Начертите какой-нибудь неправильный многоугольникъ на доскѣ и квадратъ, котораго площадь равна одному квадратному вершку, и постарайтесь узнать, сколько такихъ квадратовъ умѣщается въ многоугольникѣ.—При этомъ останутся части фигуры, на которыхъ квадратъ не укладывается, и надо квадратъ разрѣзать на опредѣленныя

части (половины, трети, десятыя) съ тѣмъ, чтобы ихъ уложить на остаткахъ —Удобно ли это?—Надо научиться *вычислять* площади фигуръ, измѣривши нѣкоторые «элементы» ихъ

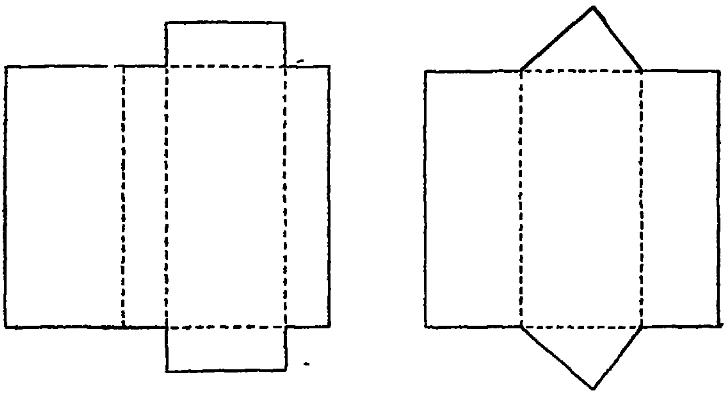
> Неудобства такого *измѣреңія* площадей ученики должны испытать на дѣлѣ, и тогда они поймутъ важность *вычисленія* площадей, избавляющаго насъ отъ неудобствъ измѣренія Понятіе объ «элементѣ» фигуры, по сравненію съ прежнимъ, *при этомъ* расширяется

601a. Какъ *вычислить* площадь прямоугольника? (Для этого надо прежде всего измѣрить длину основанія и длину высоты одною и тою же единицею мѣры, затѣмъ то число *квадратныхъ* «одноименныхъ» единицъ мѣры, которое содержится въ площади «полосы», имѣющей то же основаніе, что данный прямоугольникъ, а высоту, равную *одной единицѣ длины*, помножить на число «одноименныхъ» единицъ мѣры длины, содержащихся въ высотѣ даннаго прямоугольника) —Это говорятъ короче «надо помножить основаніе на высоту», хотя, конечно, умножать прямую линію на прямую линію, какъ умножаютъ числа, *невозможно* —Все это вѣрно, когда основаніе и высота содержатъ по цѣлому числу единицъ мѣры —А какъ быть въ случаѣ дробей, *т-е если*, напр, основаніе содержитъ $^3/_4$ вершка, а высота $^5/_8$ вершка? (То же самое) —Но это надо обслѣдовать хорошенько —Начертимъ прямоугольникъ, въ которомъ основаніе содержитъ $^3/_4$ вершка, а высота $^5/_8$ вершка, раздѣлимъ его на ленты шириною каждая въ $^1/_8$ долю вершка, одну ленту разрѣжемъ на одинаковыя части длиною въ $^1/_4$ вершка, ширина же ея будетъ $^1/_8$ доля вершка Сколько такихъ долей во всемъ нашемъ прямоугольникѣ? (15, такъ какъ въ каждой лентѣ 3 части, а лентъ 5) —Теперь спрашивается, какую долю цѣлаго квадратнаго вершка составляетъ площадь *одной* такой части —Что нужно сдѣлать для того, чтобы разрѣшить этотъ вопросъ? —Начертимъ и нарушенія дисциплины въ подобныхъ случаяхъ столь же неосновательно, какъ бояться этого на урокахъ физики или химіи



Къ № 602д

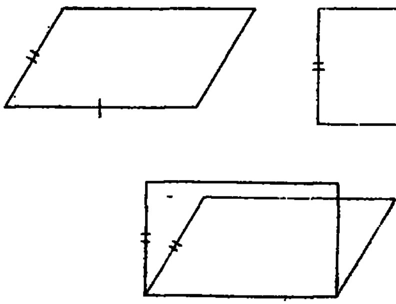
602д. Начертить и вырѣзать изъ бумаги совокупность всѣхъ граней, т.-е. такъ наз. «сѣтку» куба, сѣтку прямоугольнаго параллелепипеда, сѣтку прямой треугольной призмы.



Къ № 602д

«Сѣтку» косой (наклонной) призмы вычертить труднѣе, и опыты въ этомъ направленіи съ учениками надо сдѣлать —Изъ приведенныхъ на стр 219 чертежей два изображають сѣтки наклонныхъ параллелепипедовъ, принадлежащихъ къ числу простѣйшихъ этого рода, такъ какъ *двѣ* или *четыре* боковыя грани — *прямоугольники* Но если учитель желаетъ добиться сознательности въ работѣ учениковъ, отъ нихъ не надо этого скрывать. Поработавши и надъ косыми параллелепипедами, учащеся *увидятъ*, каковы грани такихъ параллелепипедовъ и каковы ихъ «сѣтки» Но эта работа умѣстнѣе впослѣдствіи, такъ какъ на этой ступени перейти къ № 608 болѣе естественно —Здѣсь, впрочемъ, можно сдѣлать перерывъ для ознакомленія съ «азбукой» проекціоннаго черченія (§ 15)

608. Возьмемъ косоугольный параллелограммъ Чему равна его площадь?



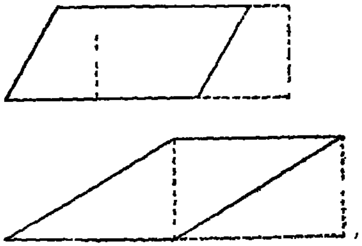
Къ № 608 (прим)

Обычная ошибка учениковъ, при такой постановкѣ вопроса, состоитъ въ томъ, что они готовы и здѣсь перемножить двѣ стороны параллелограмма между собою Какъ только они склоняются къ этой ошибкѣ, надо предложить имъ построить прямоугольникъ, котораго основаніе равно основанію, а высота—другой сторонѣ косоугольнаго параллелограмма, и переспросить ихъ, равны ли *площади* этихъ двухъ параллелограммовъ Если они будутъ на этомъ настаивать, т можно предложить имъ наложить косоугольный парал лелограммъ на прямоугольный такъ, чтобы нижнія их основанія совпали Благодаря этому наложенію, он убѣдятся, что площадь такого прямоугольника на пло щадь цѣлой «ленты» больше площади косоугольнаг параллелограмма съ тѣмъ же основаніемъ и периме тромъ Вырѣзанные изъ бумаги косоугольные паралле лограммы и прямоугольники съ одинаковыми основа ніями и периметрами, а равно и соотвѣтствующ чертежи, должны учениковъ привести къ мысли о не возможности равенства площадей такихъ фигуръ

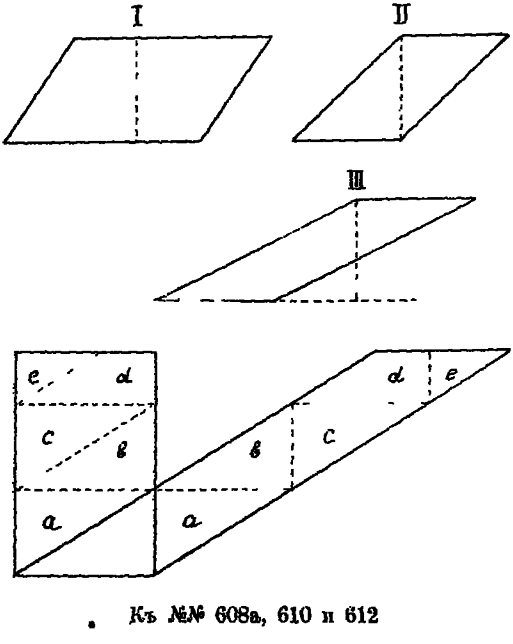
608а. Начертить косоугольный параллелограммъ опустить изъ какой-нибудь точки верхняго основанія пер пендикуляръ на нижнее, т-е провести его высоту.—В параллелограммѣ I такихъ перпендикуляровъ можно про вести безчисленное множество, во II только одинъ попа даетъ на основаніе, и то лишь въ томъ случаѣ, есл провести перпендикуляръ изъ вершины тупого угла, в параллелограммѣ III непремѣнно надо продолжить одно из его основаній, напр, нижнее, и только въ этомъ случа можно будетъ провести высоту параллелограмма —Въ пер вомъ случаѣ оба перпендикуляра, проведенные изъ вершин тупыхъ угловъ къ основаніямъ, находятся внутри параллело грамма, во второмъ—перпендикуляръ, опущенный изъ вер шины тупого угла на основаніе, попадаетъ въ вершин второго тупого угла, въ третьемъ же перпендикуляры опущенные изъ любой точки верхняго основанія на про долженіе нижняго частью или цѣликомъ (только одинъ—цѣ ликомъ) внѣ параллелограмма

610. Начертить косоугольный параллелограммъ, въ ко торомъ высота лежитъ внутри параллелограмма, провест эту высоту и сложить получившіяся части параллелограмм такъ, чтобы получился прямоугольникъ, съ нимъ «равнове ликій», съ тою же высотою и тѣмъ же основаніемъ

612. Начертить параллелограммъ, въ которомъ часть высоты лежитъ внѣ параллелограмма, провести эту высоту и разрѣзать параллелограммъ на такія части, чтобы изъ нихъ можно было составить прямоугольникъ, съ нимъ равновеликій, съ тою же высотою и тѣмъ же основаніемъ

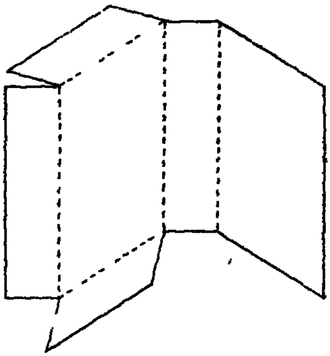


Къ № 610



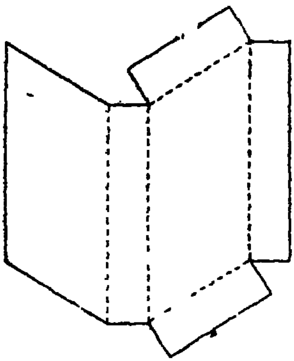
Къ №№ 608а, 610 и 612

Случай, когда одна діагональ параллелограмма перпендикулярна къ одной изъ сторонъ, оказываетъ, какъ видно изъ чертежа, въ послѣдней задачѣ неоцѣненныя услуги Ибо полное уразумѣніе площади параллело-ребро слѣдующей грани и т д — Что остается сдѣлать для того, чтобы вычислить площадь каждой изъ боковыхъ граней призмы и «боковую поверхность» призмы? (Надо измѣрить какой-либо единицей мѣры длину бокового ребра и длину каждой изъ сторонъ поперечнаго («перпендикулярнаго») сѣченія, вычислить площадь каждой грани и полученныя площади сложить)

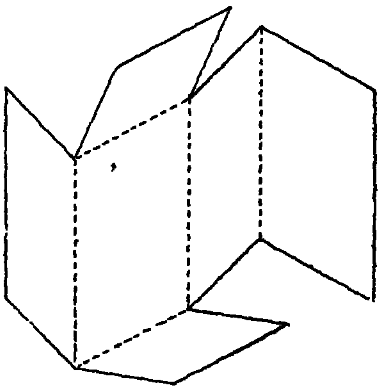


Къ № 615 (двѣ грани—прямоугольники)

Нѣтъ никакой надобности навязывать ученикамъ теорему и заставлять ихъ сразу складывать стороны периметра перпендикулярнаго сѣченія, съ тѣмъ, чтобы они непремѣнно эту сумму умножали на ребро Къ этому послѣднему сокращенію вычисленія они должны прійти сами, послѣ нѣкоторыхъ упражненій Но не въ этомъ сокращеніи суть дѣла, а только въ возмож-



Къ № 615а (прим) двѣ грани и оба основанія — прямоугольники

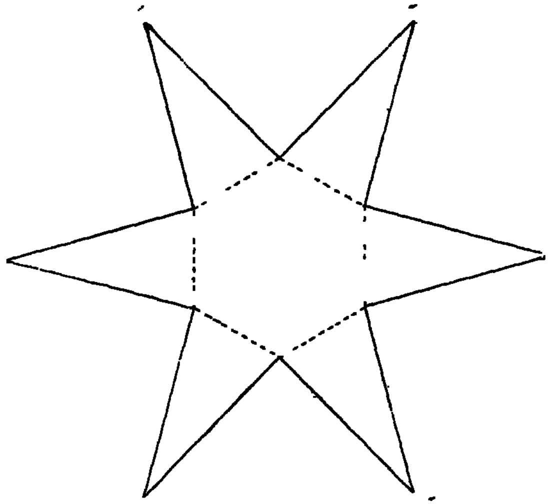


Къ № 615а (прим) всѣ грани—косоугольные параллелограммы ности *вычисленія* боковой поверхности наклонной призмы и въ своевременномъ приложеніи ученія о площади параллелограмма къ этому вычисленію

617. Можетъ ли основаніе прямой призмы быть правильнымъ многоугольникомъ?—Нарисуйте «правильныя призмы» съ одной и той же высотой треугольную, четыреугольную (прямоугольный параллелепипедъ съ квадратнымъ основаніемъ), пятиугольную и шестиугольную —Начертить ихъ «сѣтки», вырѣзать изъ бумаги совокупность всѣхъ ихъ граней —Вычислить боковыя поверхности этихъ призмъ — Какія призмы мы будемъ называть правильными?

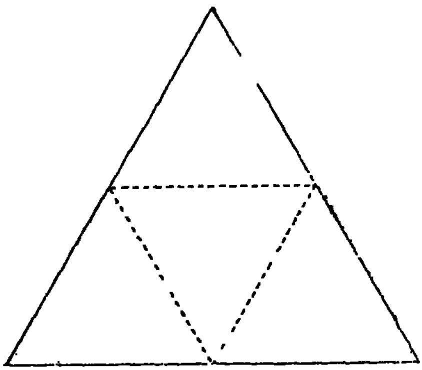
Первыя попытки свои въ рисованіи правильныхъ призмъ и пирамидъ учащіеся должны дѣлать при помощи наглядныхъ пособій и болѣе или менѣе интуитивно, т-е безъ установленныхъ правилъ Послѣднія можно ввести на любой ступени, но имъ отведенъ отдѣльный параграфъ, а именно § 15, посвященный элементамъ прямоугольной и косой проекцій Упражненія въ вычисленіи поверхностей введены на ступени, посвященной вычисленію площадей, исключительно въ томъ расчетѣ, что они будутъ вестись на наглядныхъ пособіяхъ, и съ той цѣлью, чтобы учащіеся видѣли примѣненіе усвоенныхъ ими свѣдѣній о вычисленіи площадей прямолинейныхъ фигуръ —Азбукѣ проекціоннаго черченія можно исподволь давать мѣсто при проработкѣ предыдущихъ нумеровъ, но это не можетъ считаться обязательнымъ

621 Обратимся теперь къ площади треугольника —Прежде всего зададимся вопросомъ данный треугольникъ разрѣзать на такія двѣ части, чтобы изъ нихъ можно было составить прямоугольникъ —Прямоугольный треугольникъ очень легко такъ разрѣзать, должна прійти въ голову мысль раздѣлить гипотенузу и одинъ изъ катетовъ пополамъ, соединить середины этихъ двухъ сторонъ, и получившійся такимъ образомъ новый треугольникъ надлежащимъ образомъ (гипотенузой) приложить къ наклонной сторонѣ получив-



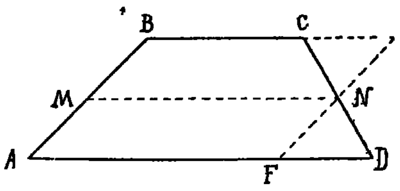
Къ №№ 628 и 628а.

Нѣтъ надобности насильственно вести учениковъ къ извѣстному сокращенію вычисленія боковой поверхности пирамиды Это сокращеніе должно явиться результатомъ многочисленныхъ упражненій, носящихъ характеръ преобразованія буквеннаго выраженія и не относящихся прямо къ геометріи этой ступени

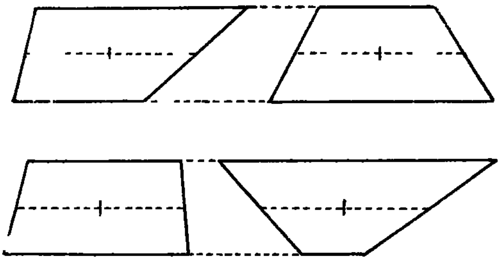


Къ № 628а.

631. Начертить трапецію и разрѣзать ее на такія двѣ части, чтобы изъ нихъ можно было составить параллелограммъ, имѣющій ту же высоту — Для этого надо отрѣзать нѣкоторый треугольникъ, напр., справа снизу, и его приставить справа же, но сверху — Какой именно треугольникъ? — Раздѣлимъ одну изъ не параллельныхъ сторонъ пополамъ и изъ средины этой стороны проведемъ прямую внутри трапеціи параллельно другой изъ не па-



Къ№№ 631 и 631а



Къ № 631б

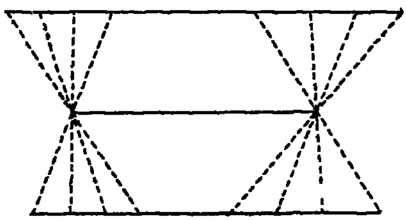
раллельныхъ сторонъ, полученный треугольникъ и есть тотъ, который вмѣстѣ съ остальной фигурой можетъ дать параллелограммъ — Вырѣзать это изъ бумаги

631а. Начертить трапецію $ABCD$, раздѣлить одну изъ не параллельныхъ сторонъ ея, а именно сторону AB, пополамъ и изъ середины второй стороны провести прямую, параллельную одному изъ основаній трапеціи — Далѣе отрѣзать тотъ треугольникъ NFD, чтобы его можно было приставить къ остальной фигурѣ и получить параллелограммъ — Площадь этого параллелограмма равна *его* основанію, помноженному на высоту — Но *у него* основаніе не то же, что основаніе трапеціи: оно меньше, чѣмъ основаніе AD и больше, чѣмъ ..?—Оно равно прямой MN, т.-е. равно «средней линіи» трапеціи.—Что такое средняя линія трапеціи? (Прямая, соединяющая середины не параллельныхъ сторонъ).—Итакъ, что надо сдѣлать для того, чтобы вычислить площадь трапеціи, не разрѣзая ея? (Надо сначала провести ея среднюю линію и высоту, потомъ измѣрить ту и другую одною и тою же единицей мѣры длины и, наконецъ, помножить основаніе на высоту).

Доказывать или не доказывать, что прямая, соединяющая середины не параллельныхъ сторонъ трапеціи, параллельна основаніямъ трапеціи — предоставляется такту учителя. То же относится и до теоремы, по которой прямая линія, проведенная изъ середины одной изъ не параллельныхъ сторонъ трапеціи параллельно ея основанію, есть «средняя линія» трапеціи. Но важны на этой ступени такія упражненія, которыя привели бы учениковъ къ тому, чтобы они всѣми доступными для нихъ способами пріобрѣли навыкъ въ обращеніи косоугольныхъ параллелограммовъ и всякихъ треугольниковъ и трапецій въ прямоугольники, равновеликіе съ ними, что съ помощью средней линіи треугольника и трапеціи такъ легко достигается.

631б. Начертить нѣсколько трапецій съ одинаковыми средними линіями и одинаковыми высотами и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ велики ихъ площади.

631в. Начертить нѣсколько трапецій *съ одной и той же* средней линіей и *одной и той же высотой* и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ велики ихъ площади.



Къ № 631в

631г. Можно вычислить площадь трапеціи и иначе —Проведемъ въ трапеціи одну діагональ, какъ раздѣлится трапеція?—Какъ вычислить площадь каждаго треугольника?—Какъ вычислить площадь трапеціи? (Сложить площади обоихъ треугольниковъ, изъ которыхъ состоитъ всякая трапеція) —Обозначимъ число единицъ длины, содержащееся въ основаніяхъ трапеціи буквами B и b, а число единицъ, содержащихся въ высотѣ, буквою h —Тогда

площ 1-го треугольника $= B$ кв ед $\times \frac{1}{2} h$.
„ 2-го „ $= b$ кв ед $\times \frac{1}{2} h$,

а площадь обоихъ треугольниковъ или площадь трапеціи $=(B$ кв ед $+ b$ кв ед$)$ $\frac{1}{2} h$

***631д.** Отсюда можно вывести, что средняя линія трапеціи равна половинѣ суммы обоихъ ея основаній —Дѣйствительно обозначимъ число единицъ длины средней линіи буквою M, тогда площ трапеціи $= M$ кв ед $\times h$,

но площ трапеціи $=(B$ кв ед $+ b$ кв ед$)\times \frac{1}{2} h$

Стало-быть, M кв ед $\times h = (B$ кв ед $+ b$ кв ед$)\times \frac{1}{2} h$

или $Mh = (B+b)\ \frac{1}{2} h$
или $Mh = (\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} b)\ h$
т-е $M = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} b = \frac{1}{2}(B+b)$

Примѣненіе алгебраическаго метода доказательства этой теоремы полезно въ смыслѣ образовательномъ, но, конечно, не обязательно на этой ступени

631е. Въ томъ же убѣдиться а) непосредственнымъ измѣреніемъ и б) начертивши полусумму основаній трапеціи.

636. Нарисовать какую-нибудь пирамиду и ея пересѣченіе съ плоскостью, которая была бы параллельна плоскости основанія —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, въ какихъ прямыхъ линіяхъ должна эта плоскость пересѣчь ея грани —Начертить «сѣтку» всей пирамиды и «сѣтки» каждой ея части. —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, какія фигуры составляютъ боковую поверхность каждой изъ этихъ частей —

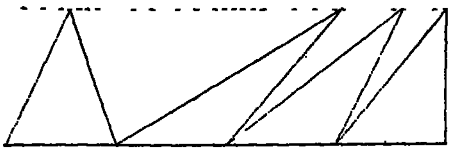
На основной ступени, однакоже, можно обращаться къ этому вопросу лишь послѣ достаточныхъ для того упражненій въ непосредственномъ вычисленіи величины боковой поверхности усѣченнаго конуса —Торопливое, хотя бы и обоснованное логически, доказательство не приведетъ къ той цѣли, которую преслѣдуетъ основной курсъ Здѣсь важно ясное представленіе о томъ, почему такъ, а не иначе, можно и слѣдуетъ *вычислять* величину поверхности усѣченной параллельно основанію пирамиды, такимъ же образомъ усѣченнаго прямого конуса

639. Высота каждаго треугольника, входящаго въ составъ боковой поверхности *правильной* пирамиды, называется *апоѳемою* правильной пирамиды —Высота каждой трапеціи, входящей въ составъ боковой поверхности усѣченной правильной пирамиды, тоже называется *апоѳемою,* но апоѳемою усѣченной правильной пирамиды —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, что надо сдѣлать съ длиною периметра средняго сѣченія усѣченной правильной пирамиды и съ ея апоѳемой для того, чтобы вычислить боковую поверхность правильной усѣченной пирамиды

Эти ученія требуютъ многочисленныхъ и наглядныхъ упражненій въ классѣ надъ моделями и сѣтками неправильныхъ, а затѣмъ правильныхъ пирамидъ, полныхъ и усѣченныхъ Что сѣченія пирамиды—многоугольники, подобные и гомотетичные основанію, очевидно

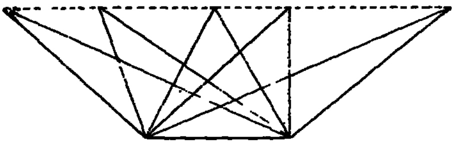
643. Вычислить площадь многоугольника, разбивъ его діагоналями на треугольники —Вычислить площадь многоугольника, предварительно взявъ внутри многоугольника точку и соединивъ ее съ вершинами многоугольника прямыми —Почему это удобно только для выпуклаго многоугольника?

645. Начертить двѣ параллельныя прямыя, на одной изъ нихъ взять рядъ точекъ, а на другой—рядъ равныхъ отрѣзковъ, первую точку соединить съ концами перваго отрѣзка, вторую — съ концами второго и т д, и отдаı себѣ отчетъ въ томъ, какъ велики площади каждаго изъ полученныхъ треугольниковъ, которыхъ основанія равны порознь данному отрѣзку, а вершины совпадаютъ съ данными точками



Къ № 645

647. Взять двѣ параллельныя прямыя, на одной изъ нихъ—какой-нибудь отрѣзокъ, а на другой—произвольный рядъ точекъ, соединить каждую изъ этихъ точекъ съ концами отрѣзка, взятаго на первой изъ параллельныхъ прямыхъ, и отдать отчетъ въ томъ, какъ велика площадь каждаго изъ треугольниковъ, у которыхъ взятый отрѣзокъ служитъ общимъ основаніемъ, а взятыя точки—вершинами



Къ № 647

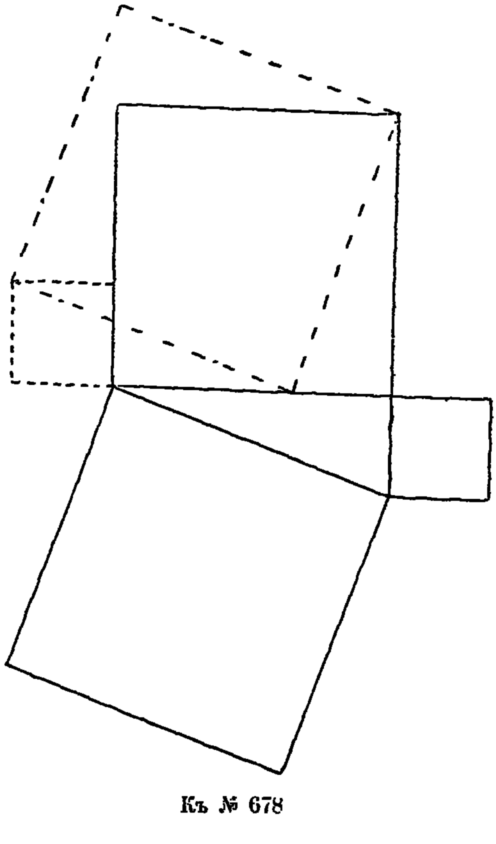
651. Взять двѣ параллельныя линіи, на одной изъ нихъ - нѣсколько равныхъ отрѣзковъ, отдѣленныхъ одинъ отъ другого какими-нибудь произвольными промежутками, и на другой—такіе же равные отрѣзки, отдѣленные тоже какими угодно промежутками, обозначить всѣ взятыя точки буквами, соединить концы каждаго изъ равныхъ отрѣзковъ на одной изъ параллельныхъ прямыхъ съ концами равныхъ сумма квадратовъ обращена —Чему равенъ одинъ катетъ треугольника? — Чему — другой?—Очевидно, что сторона бо́льшаго квадрата равна бо́льшему катету треугольника, сторона меньшаго квадрата—меньшему катету, а сторона квадрата, въ который обращена сумма двухъ квадратовъ, равна гипотенузѣ треугольника.

678. Построить разносторонній прямоугольный треугольникъ, а на сторонахъ его построить по квадрату и отдать себѣ отчетъ въ томъ, площади какого квадрата равна сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ

Если ученики не сразу отдадутъ себѣ отчетъ въ вопросѣ, то можно пристроить къ большему изъ квадратовъ, построенныхъ въ катетахъ, меньшій и удостовѣриться въ справедливости такъ называемой Пиѳагоровой теоремы Особенно удачно это построеніе приводитъ къ цѣли, когда построеніе приводитъ къ квадрату, стороны котораго параллельны сторонамъ квадрата, построеннаго на гипотенузѣ

678а. Замѣтьте *площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ какого угодно прямоугольнаго треугольника, равна суммѣ площадей обоихъ квадратовъ, построенныхъ на катетахъ его* — Эта истина извѣстна подъ именемъ *Пиѳагоровой теоремы*

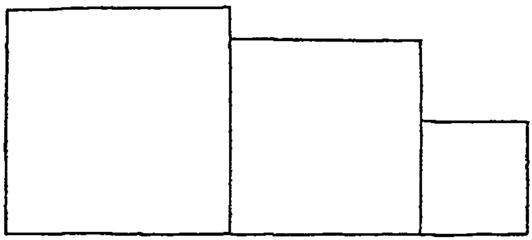
На этой ступени, да и ранѣе, смотря по усмотрѣнію учителя, смыслъ словъ «теорема» и «аксіома» можетъ быть выясняемъ на примѣрахъ, но въ связи не съ тѣмъ, что очевидно и что не очевидно, а въ связи съ тѣмъ, *можно ли* данную истину доказать или же *нельзя* Только та истина можетъ считаться аксіомой, которой съ помощью разсужденій «доказать» невозможно, а та — «теоремой», которую доказать возможно — Для упражненій въ доказательствѣ лучше всего изъ предшествующаго курса брать не слишкомъ очевидныя истины, и лишь съ большою осторожностью переходить къ доказательству истинъ очевидныхъ Но эти упражненія не должны прерывать курса на нѣсколько уроковъ, а только вноситься понемногу въ каждый урокъ, если учитель считаетъ это необходимымъ, а ученики къ такимъ упражненіямъ выказываютъ хоть нѣкоторый интересъ. Безъ этого послѣдняго усло-



Къ № 678

вія подобныя упражненія ничего, кромѣ вреда, не приносятъ. Они очень часто только понижаютъ любознательность учениковъ, вообще не направленную въ сторону діалектическихъ тонкостей Въ случаѣ недостаточнаго интереса учениковъ къ доказательствамъ болѣе или менѣе очевидныхъ по содержанію теоремъ, можно подождать появленія этого интереса Опытъ показываетъ, что этотъ интересъ въ дальнѣйшемъ курсѣ растетъ А педагогическія соображенія принуждаютъ по возможности не навязывать учащимся ничего такого, что въ состояніи значительно понизить ихъ интересъ къ образованію и вызвать въ нихъ чувство неудовлетворенности при процессѣ пріобрѣтенія знаній

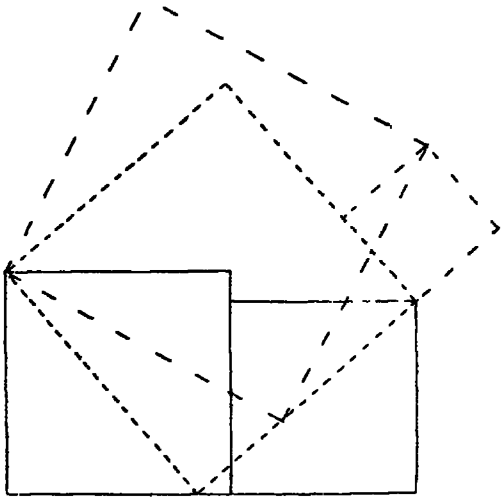
685. Обратить данную фигуру въ равновеликій съ нею квадратъ значитъ найти *квадратуру* данной фигуры —



Къ № 685

Найти квадратуру суммы трехъ различныхъ квадратовъ — Дѣлается это такъ. сначала обращаютъ въ равновеликій квадратъ сумму двухъ квадратовъ, а потомъ къ полученному квадрату прибавляютъ третій и находятъ квадратъ, равновеликій суммѣ полученнаго и третьяго квадратовъ — Найти квадратуру суммы 4-хъ квадратовъ

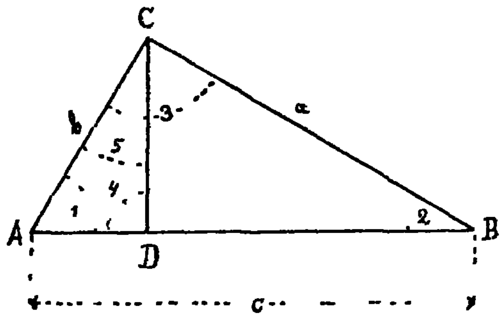
Совершенно избѣгнуть иностранныхъ терминовъ, конечно, невозможно Но, употребивъ разъ данный терминъ, его ужъ надо употреблять всегда въ тѣхъ случаяхъ, когда онъ можетъ быть полезенъ —Къ числу мало у насъ употребляемыхъ, но весьма выразительныхъ, иностранныхъ терминовъ принадлежатъ «ректификація» (выпрямленіе) линіи, «компланація» (обращеніе неплоской замкнутой фигуры въ равновеликую плоскую фигуру) и «кубатура» (обращеніе даннаго тѣла въ равновеликій кубъ) Термины эти незамѣнимы достаточно выразительными краткими, въ одно слово, русскими терминами А, между тѣмъ, такой терминъ хорошъ тѣмъ, что сосредоточиваетъ вниманіе на сущности вопроса и даетъ этому вопросу быструю харак-



Къ № 685

теристику Въ текстѣ этой книги термины эти даются, конечно, не для того, чтобы сдѣлать ихъ обязательными, а только для того, чтобы учитель, при желаніи, на нихъ обратилъ вниманіе Важнѣе другихъ терминъ «квадратура» фигуры .

689. Построить прямоугольный треугольникъ, изъ вершины прямого угла опустить перпендикуляръ на гипотенузу и отдать себѣ отчетъ въ томъ. 1) подобенъ ли какой-нибудь изъ полученныхъ треугольниковъ данному? 2) подобны чи тѣ два треугольника, на которые раздѣлился данный треугольникъ? 3) какія пропорціи вытекаютъ изъ того, что каждый изъ полученныхъ треугольниковъ подобенъ данному? 4) какія—изъ того, что оба треугольника подобны одинъ другому? 5) о какихъ прямоугольникахъ можно утверждать, что они равновелики, если принять во вниманіе, что произведеніе крайнихъ членовъ каждой изъ полученныхъ пропорцій равно произведенію ея среднихъ членовъ?—Треугольникъ ACD составляетъ часть треугольника ACB, а треугольникъ BCD—другую его часть —Обозначимъ углы даннаго треугольника цифрами 1, 2 и 3 (цифрою 3 прямой уголъ), вершины буквами A, B и C, а длину сторонъ соотвѣтственно буквами a, b и c —Обозначимъ углы тр—ка



Къ № 689

ADC цифрами 4 и 5 (цифрой 4 прямой уголъ) —Разсмотримъ треугольники ABC и ADC· какіе углы у этихъ треугольниковъ равны между собою? (1-ый общій, 3-ій=4-му, а 2-ой=5-му) —Подобны ли треугольники?—Какую мы составимъ пропорцію?—Возьмемъ углы $\angle$ 2 даннаго треугольника=$\angle$ 5-му новаго, $\angle$ 3-ій даннаго=$\angle$ 4-му новаго, противолежащія имъ стороны составляютъ пропорцію

$$b\ x = c\ b \text{ (гдѣ } x \text{ длина прямой } AD)$$

Какія получаются изъ этой пропорціи равныя произведенія? (Произведеніе крайнихъ членовъ пропорціи равно произведенію среднихъ) —Т-е

$$b^2 = x\ c.$$

Какіе два прямоугольника въ такомъ случаѣ равновелики? (Если построить такой квадратъ, чтобы сторона его была равна катету, котораго длина b ед, и прямоугольникъ, основаніе котораго равно проекціи катета на гипотенузу, а высота—гипотенузѣ, то эти два прямоугольника равновелики) —Справедлива ли подобная же пропорція также и для другого катета?—Доказать, что

$$a \; y = c \; a \quad (\text{гдѣ } y \text{ длина прямой } DB)$$

Какіе два прямоугольника равновелики?—Переставьте въ обѣихъ пропорціяхъ

$$b \; x = c \; b$$

и

$$a \; y = c \; a$$

первыя отношенія на мѣсто вторыхъ, а вторыя отношенія на мѣсто первыхъ —Замѣтьте *катетъ прямоугольнаго треугольника есть средняя пропорціональная между всей гипотенузою и проекціей этого катета на гипотенузу*

689a. Подобны ли треугольники ADC и BDC? (Подобны) —Почему?—Какія пропорціи вытекаютъ изъ этого подобія?—Изъ этого подобія вытекаютъ пропорціи

$$x \; h = h \; y$$

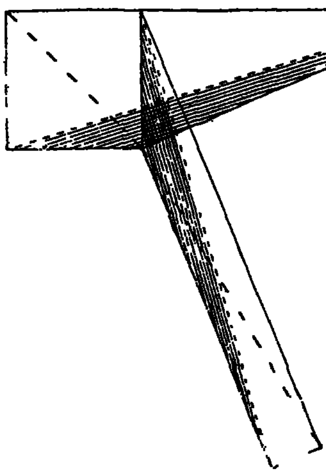
$$a \; b = y . h$$

и

$$a \; b = h \; x$$

Какія прямоугольники равновелики? ($xy = h^2$, $ah = by$ и $ax = bh$)—Замѣтьте *высота прямоугольнаго треугольника есть средняя пропорціональная между проекціями катетовъ на гипотенузу*

Эти теоремы требуютъ многочисленныхъ упражненій Приложенія этихъ теоремъ тоже многочисленны, а потому время, на нихъ затраченное, окупится впослѣдствіи —Дабы подобіе занимающихъ насъ треугольниковъ было по возможности наглядно усвоено, не должно ограничиваться только чертежомъ въ родѣ приведеннаго выше, но слѣдуетъ также прибѣгать къ строго говоря, четыре задачи, изъ которыхъ одна требуетъ хотя и не сложнаго, но все-таки преобразованія буквеннаго выраженія.—Особенной надобности въ чисто-геометрическомъ, Евклидовомъ, доказательствѣ равновеликости занимающихъ насъ прямоугольника и квадрата нѣтъ. Но если къ нему обращаться, то его надо сдѣлать предметомъ отдѣльныхъ упражненій, тоже весьма многочисленныхъ.—Особенно затруднительно



Къ № 689б (прим.).

для учащихся усвоить, какія вершины надо соединить для этого доказательства. Если не вычерчивать и другого квадрата,—что вполнѣ возможно,—то для облегченія учениковъ можно прибѣгнуть къ слѣдующему указанію: найти такую вершину даннаго треугольника и такую вершину квадрата, которыя наиболѣе отдалены одна отъ другой, и ихъ соединить прямою, затѣмъ вершину прямого угла прямоугольнаго треугольника соединить прямою съ вершиною прямоугольника. Остальная часть доказательства требуетъ тоже нѣкоторыхъ вспомогательныхъ пріемовъ: 1) треугольники, которые нужны, можно заштриховать;

2) для того, чтобы очевиднѣе была равновеликость,— если она не достаточно очевидна, — одного изъ нихъ съ половиною квадрата, а другого—съ половиною прямоугольника, лучше взять діагонали, пересѣкающіяся съ наибольшими сторонами треугольниковъ, чѣмъ не пересѣкающіяся съ ними, 3) для той же цѣли можно обратиться и къ цѣлесообразнымъ формуламъ площадей этихъ треугольниковъ, и къ сравненію полученныхъ выраженій съ подходящими выраженіями для площадей квадрата, построеннаго на катетѣ, и прямоугольника, построеннаго на проекціи катета

696. Умѣемъ ли мы строить треугольникъ, равновеликій данному «обыкновенному» (т-е съ контуромъ, себя не пересѣкающимъ) многоугольнику?—Умѣемъ ли мы строить прямоугольникъ, равновеликій данному косоугольному параллелограмму?—Умѣемъ ли мы строить прямоугольникъ, равновеликій данному треугольнику?—Умѣемъ ли мы строить квадратъ, равновеликій суммѣ данныхъ двухъ квадратовъ?—Умѣемъ ли мы строить квадратъ, равновеликій данному прямоугольнику? (Еще не умѣемъ)

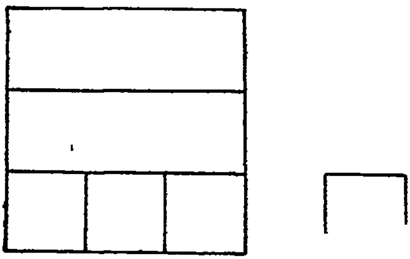
На этотъ послѣдній вопросъ можетъ и не послѣдовать надлежащаго отвѣта. Однакоже эти вопросы не только должны быть предложены, но разрѣшены на чертежѣ, для приведенія всего, относящагося до нихъ, въ систему Это—первый вопросъ о *квадрактурѣ* фигуръ Если не привести въ систему всѣ относящеся сюда вопросы, то вопросъ о квадратурѣ круга будетъ болѣе или менѣе празднымъ вопросомъ Все дѣло въ томъ, что квадратуру всякой прямолинейной фигуры можно найти съ помощью линейки и циркуля

697. Дана точка въ плоскости, не возставляя перпендикуляровъ и не пользуясь чертежнымъ треугольникомъ, изъ данной точки провести двѣ прямыя взаимно-перпендикулярныя, пользуясь циркулемъ, линейкой и свойствами вписаннаго угла —Вспомните, сколько градусовъ во вписанномъ углѣ, опирающемся на діаметръ' (Ср №№ 493 и 439).

единяется съ началомъ меньшеи стороны прямою линіею; эта прямая и есть сторона искомаго квадрата — Почему?

701. «Найти квадратуру» данной фигуры значить *построить* квадратъ, равновеликій съ данной фигурой — Найти квадратуру даннаго треугольника (Намекъ сначала надо построить прямоугольникъ, равновеликій съ даннымъ треугольникомъ) — Всякую ли замкнутую прямолинейную фигуру съ не пересѣкающимъ себя контуромъ мы умѣемъ, съ помощью линейки и циркуля, обращать въ треугольникъ, съ нею равновеликій? — Всякій ли треугольникъ мы умѣемъ, съ помощью линейки и циркуля, обращать въ прямоугольникъ? — Для всякаго ли прямоугольника мы умѣемъ находить его квадратуру съ помощью линейки и циркуля? — Для всякой ли замкнутой обыкновенной прямолинейной фигуры мы умѣемъ находить ея квадратуру съ помощью линейки и циркуля? — Найти квадратуру какого-нибудь замкнутаго многоугольника съ не пересѣкающимъ себя контуромъ

Почему не надо брать многоугольниковъ съ пересѣкающимъ себя контуромъ, учащіеся на этой ступени понять не могутъ Но, что ихъ брать не надо, они должны знать



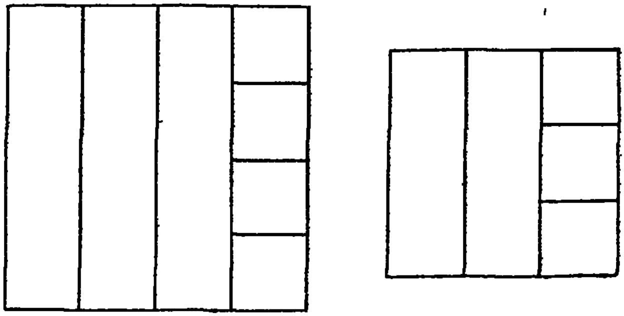
Къ № 704

704. Начертить два «одноименныхъ» правильныхъ многоугольника — Подобны ли они между собою? — Начертить два квадрата, подобны ли они между собою? — *Построить два квадрата, въ одномъ изъ которыхъ сторона больше стороны другого въ три раза.* — Подобны ли эти два квадрата? — У котораго площадь больше? — Во сколько разъ? (Не въ 3 раза, а въ 9 разъ)

Большинство учащихся на этотъ вопросъ отвѣчаютъ болѣе или менѣе необдуманно. Только чертежи ихъ предупреждаетъ о необходимости подумать и не рѣшать вопроса «съ плеча» Чертежи поэтому обязательны на этой ступени

704a. Построить два квадрата, изъ которыхъ въ одномъ сторона больше стороны другого въ 5 разъ —Площадь перваго квадрата въ 25 разъ больше площади второго!

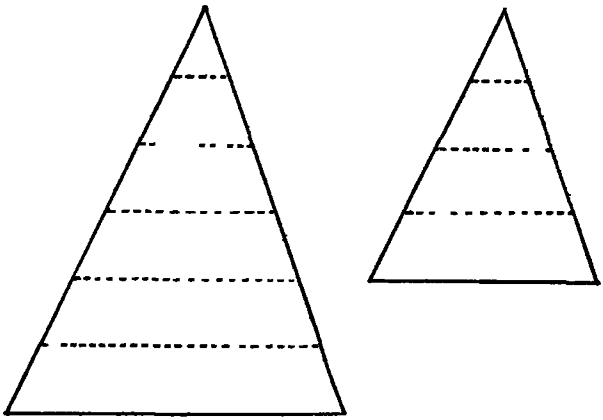
706. Построить два квадрата, изъ которыхъ въ одномъ сторона содержитъ 4 единицы мѣры, а во второмъ 3 единицы мѣры —Во сколько разъ площадь перваго больше площади второго? (Во столько разъ, во сколько разъ квадратъ 4-хъ единицъ больше квадрата 3-хъ единицъ, т-е во столько разъ, во сколько разъ 16 больше 9-ти) —Замѣтьте *площадь* всякаго квадрата относится къ площади всякаго другого квадрата, какъ *квадратъ* числа единицъ длины, содержащагося въ сторонѣ перваго изъ нихъ, относится къ *квадрату* числа такихъ же единицъ длины, содержащагося въ сторонѣ второго квадрата —Это выражаютъ и короче говорятъ, что площади двухъ квадратовъ относятся между собой, какъ квадраты ихъ сторонъ



Къ № 706

Упражненій надъ квадратами, въ родѣ приведенныхъ въ № 706, надо продѣлать столько, чтобы теорема

(Не во столько разъ, во сколько разъ 7 больше 4, т.-е. не въ $1^{3}/_{4}$ раза, а во столько разъ, во сколько разъ квадратъ 7-ми больше *квадрата* 4-хъ, т.-е. во столько разъ, во сколько 49 больше 16, или въ $3^{1}/_{16}$ раза, а не $1^{3}/_{4}$ раза)



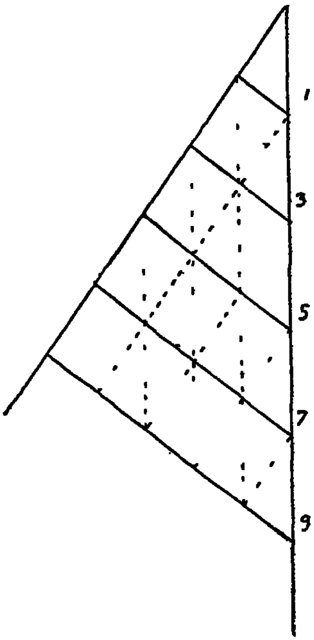
Къ № 706в

706г. Начертите треугольникъ, въ одной сторонѣ котораго нѣкоторый отрѣзокъ содержится 5 разъ, раздѣлите этотъ треугольникъ прямыми, параллельными къ одной изъ остальныхъ сторонъ, на части, имѣющія одну и ту же высоту, и отдайте себѣ отчетъ въ томъ, сколько разъ получившійся при этомъ у вершины треугольникъ содержится въ каждой изъ полученныхъ трапецій?—Окажется, что

въ	треугольникѣ	онъ	содержится	1	разъ	Это — рядъ нечетныхъ чиселъ, начиная съ единицы.
„	1-ой трапеціи	„	„	3	раза	
во	2-ой „	„	„	5	разъ	
въ	3-ей „	„	„	7	„	
„	4-ой „	„	„	9	„	
и „	5-ой „	„	„	11	„	

Теперь узнаемъ, сколько разъ этотъ треугольникъ содержится въ треугольникѣ и первой трапеціи, въ треугольникѣ и первыхъ двухъ трапеціяхъ и т д

Въ первыхъ двухъ фиг	4 раза			Все квадраты числа взятыхъ фигуръ
„ трехъ	„	9 разъ		
„ четырехъ	„	16	„	
„ пяти	„	25	„	



Къ № 706і

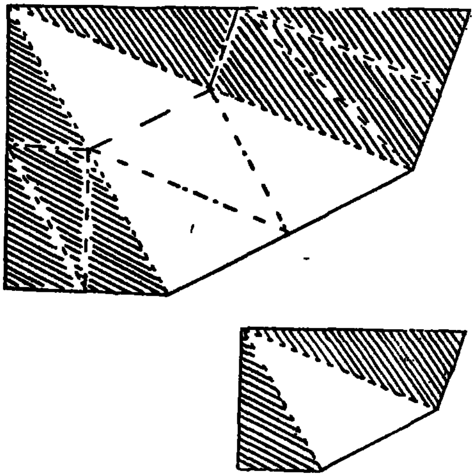
Это—замѣчательное свойство суммы членовъ слѣдующей «ариѳметической прогрессіи»

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,

первый членъ которой — единица, а разность — 2, т-е свойство послѣдовательнаго *ряда* нечетныхъ чиселъ, начиная съ единицы Оно не только своевременно, но цѣлесообразно на этой ступени, и само по себѣ, и въ приложеніи къ пропорціональности площадей двухъ подобныхъ треугольниковъ квадратамъ сходственныхъ ихъ сторонъ — Послѣ этого перейти къ площадямъ двухъ подобныхъ многоугольниковъ ужъ не представляетъ никакихъ затрудненій.

708. Начертить два подобныхъ параллелограмма и два подобныхъ пятиугольника, изъ которыхъ въ одномъ сторона больше сходственной стороны другого въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, во сколько разъ площадь одного больше площади другого —Меньшій параллелограммъ укладывается въ бо́льшемъ —А меньшій пяти-ныхъ между собою параллелограммовъ, г) изъ одинаковыхъ равнобочныхъ трапецій, д) изъ одинаковыхъ трапецій вообще, е) изъ правильныхъ шестиугольниковъ —Упражненія эти весьма полезны

710. Можно ли раздѣлить многоугольникъ на треугольники, а подобный ему многоугольникъ — на порознь подобные имъ треугольники? — Во сколько разъ площадь каждаго треугольника первой фигуры больше площади подобнаго ему треугольника второй фигуры, если сторона



Къ № 710

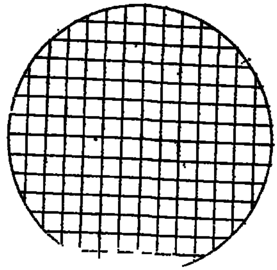
первой фигуры больше соотвѣтствующей стороны второй фигуры въ два раза? (Не въ 2, а въ 4 раза) —Построить два подобныхъ многоугольника, изъ которыхъ сторона одного содержить 8 единицъ мѣры, а сходственная сторона другого 5 единицъ мѣры, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, во сколько разъ площадь перваго больше площади второго (Не во столько разъ, во сколько разъ 8 больше 5-ти, а во столько разъ, во сколько разъ 8^2, т-е 64, больше чѣмъ 5^2, т.-е. чѣмъ 25, или — въ $2^{14}/_{25}$ раза

На этой ступени учащіеся часто ошибаются въ слѣдующемъ пунктѣ они склонны чертить многоугольники, болѣе или менѣе близкіе къ правильнымъ, и чаще всего склонны принимать, что *всѣ* треугольники, на которые разбились оба многоугольника, равны между собою На дѣлѣ же равны между собою только треугольники, на которые разбился каждый изъ большихъ треугольниковъ — Дабы избѣгнуть этой ошибки, надо брать такіе подобные многоугольники, чтобы ошибки глазомѣра и сужденія были невозможны, а потомъ перейти къ правильнымъ многоугольникамъ, въ которыхъ тоже не всѣ треугольники, на которые ихъ можно разбить, равны между собою

710а. Начертить отрѣзокъ прямой, на немъ построить квадратъ, на основаніи и высотѣ взять по одной точкѣ, дѣлящей ихъ на двѣ части, изъ которыхъ одна равна a, а другая равна b, изъ этихъ точекъ провести прямыя, соотвѣтственно параллельныя основанію и высотѣ построеннаго квадрата — Показать, что площадь построеннаго квадрата равна суммѣ площадей квадрата, построеннаго на a, квадрата, построеннаго на b, и двухъ прямоугольниковъ, у которыхъ взаимно параллельныя стороны порознь равны a и b

710б. Начертить два отрѣзка прямой a и b, сложить ихъ, на полученной суммѣ построить квадратъ, на отрѣзкахъ a и b тоже построить по квадрату, далѣе — построить два прямоугольника, которыхъ основанія порознь равны a, высоты же — порознь равны b, и отдать себѣ на чертежѣ отчетъ въ томъ, что квадратъ, построенный на $a+b$ состоитъ изъ четырехъ частей квадрата, построеннаго на a, квадрата, построеннаго на b, и двухъ прямоугольниковъ, у которыхъ основанія порознь равны a, а высоты порознь равны b

710в. На суммѣ данныхъ трехъ прямыхъ построить квадратъ, на высотѣ его отложить тѣ же прямыя, изъ кон-частью окружности, на-глазъ составить приблизительно цѣлые квадраты, при этомъ маленькія части зачеркнуть, а записать только близъ большихъ частей соотвѣтствующія цифры — Такимъ образомъ мы приблизительно, притомъ на-глазъ, узнаемъ, сколько кв ед мѣры содержится въ площади круга — Опредѣлить, во сколько разъ это число больше площади квадрата, построеннаго на радіусѣ — Если это отношеніе близко къ 3,14, то чертежъ выполненъ отлично, и глазомѣръ вѣренъ — Но замѣтьте съ помощью циркуля и линейки найти *квадратуру* круга, т-е построить квадратъ, котораго площадь навѣрное и *точно* равняется площади круга, *невозможно* — Мы умѣемъ находить квадратуру всякаго треугольника и всякаго многоугольника



Къ № 713а

Ученики должны сами додуматься до того, что лучше продѣлать упражненіе этого нумера только надъ одной четвертью круга Равнымъ образомъ они должны понять, что чѣмъ меньше квадраты, на которые разбился кругъ, тѣмъ ближе сумма площадей этихъ квадратовъ къ площади круга Это должно быть принимаемо учениками во вниманіе также въ домашнихъ ихъ работахъ

715. Найти квадратуру круга съ помощью линейки и циркуля невозможно — Это надо помнить — Но возможно *приблизительно вычислить* площадь круга — Построить квадратъ, котораго площадь *приблизительно* равна площади круга, тоже возможно — Прежде всего научимся разсматривать кругъ, какъ фигуру, состоящую изъ секторовъ — Замѣтьте «секторомъ круга» называется часть его, ограниченная двумя радіусами и заключенною между ними дугою — Раздѣлить кругъ на возможно большее число равныхъ между собою секторовъ (Намекъ сначала раздѣлить кругъ пополамъ, потомъ половину круга на два равныхъ сектора, и т д)

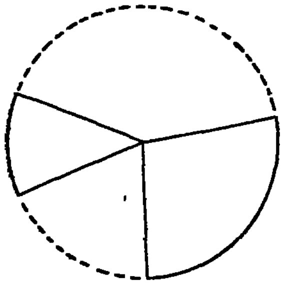
717. Начертить кругъ даннаго радіуса, отложить на окружности, начиная съ нѣкоторой отмѣченной точки, дугу, по возможности близкую къ своей небольшой, сравнительно съ радіусомъ, хордѣ —На доскѣ чертежъ слишкомъ неточенъ, но мы все-таки попробуемъ это сдѣлать, отмѣчая концы откладываемой дуги —Когда мы занимались *длиной окружности,* мы считали, сколько разъ дуга, незначительно бо́льшая, чѣмъ единица мѣры длины, содержится въ окружности, теперь же мы считать не будемъ, а будемъ только аккуратно откладывать —Если въ концѣ-концовъ останется дуга меньшая, чѣмъ откладываемая дуга, то это не должно насъ смущать

717а. Соединимъ центръ круга съ отмѣченными концами отложенныхъ дугъ —Что мы получимъ? (Получимъ довольно много секторовъ) —Значительно ли отличаются эти секторы отъ тѣхъ воображаемыхъ равнобедренныхъ треугольниковъ, у которыхъ каждая изъ равныхъ между собою сторонъ равна радіусу, а третья—невидимой хордѣ отложенной дуги? (Незначительно) —Чѣмъ эта дуга меньше, тѣмъ меньше каждый секторъ отличается отъ соотвѣтствующаго ему равнобедреннаго треугольника —Если бы мы пожелали разсматривать эти секторы, какъ треугольники, то это было бы недозволительно —Кто думаетъ, что секторъ—треугольникъ?—На чертежѣ мы, правда, скоро дойдемъ до такой небольшой дуги, что ея хорда не будетъ видна для нашего глаза —Но мы имѣемъ въ виду не чертежъ, а «идеальную» окружность —Считать, что секторы—треугольники, нельзя —Но можно ли считать, что они, при незначительныхъ дугахъ,—*почти* треугольники, что они незначительно отличаются отъ треугольниковъ? —Что площади ихъ незначительно больше, чѣмъ площади соотвѣтствующихъ имъ треугольниковъ?

мѣрой угла —Зависитъ ли отвлеченная мѣра угла отъ длины ея радіуса? — Убѣдиться въ томъ, что отвлеченная мѣра угла не зависитъ отъ длины радіуса, съ помощью формулы

$$x=\frac{2\pi R\ n}{360}\ R,$$

гдѣ буква x обозначаетъ отвлеченную мѣру угла въ n^0, буква R—длину радіуса, а буква π — отношеніе длины всей окружности къ длинѣ ея радіуса — Вычислить отвлеченную мѣру угла въ 37^0 при радіусѣ въ 20 центим и при радіусѣ въ 5 верстъ



Къ № 736а

***736б.** Сколько градусовъ содержитъ центральный уголъ, въ которомъ длина дуги равна длинѣ радіуса?—Пусть въ этой дугѣ y градусовъ,—здѣсь y обозначаетъ не то же число, что буква x въ предыдущемъ нумерѣ, — тогда

$$\frac{2\pi R\ y}{360}=R,$$

$$\text{откуда } y=R\ \frac{2\pi R}{360},\ \text{или } y=360\ 2\pi,$$

$$\text{т - е } y=57^0\,17',7 \text{ (приблизительно).}$$

Какъ велика отвлеченная мѣра этого угла?—Отвлеченная мѣра этого угла, какъ и всякаго другого, равна длинѣ его дуги, раздѣленной на длину радіуса, стало-быть, равна

$$R \text{ ед дл } R \text{ ед. длины,}$$

или одной отвлеченной единицѣ —Центральный уголъ, въ которомъ длина его дуги равна длинѣ ея радіуса, называютъ *радіаномъ* —Отвлеченная мѣра центральнаго угла выражаетъ не только отношеніе длины его дуги къ длинѣ радіуса дуги, но и отношеніе угла къ радіану. Дѣйствительно первое отношеніе равно отвлеченной дроби

$$\frac{2\pi n}{360},$$

ı отношеніе угла въ n^0 къ числу градусовъ въ радіанѣ равно

$$n\frac{360}{2\pi}=\frac{2\pi n}{360},$$ т.-е той же отвлеченной дроби

Содержаніе №№ 736а и 736б отличается большою отвлеченностью Оно поэтому доступно учащимся только въ случаѣ значительнаго ихъ математическаго развитія и при многочисленныхъ, *на частныхъ примѣрахъ*, упражненіяхъ —Значеніе отвлеченной мѣры угла (или отношенія угла къ радіану) очень велико въ теоріи тригонометрическихъ функцій, такъ какъ разложеніе синуса и косинуса въ ряды дается только въ функціи этого отвлеченнаго числа, а не въ функціи числа градусовъ —Буква π, обозначающая отношеніе длины окружности къ длинѣ ея радіуса, является также обозначеніемъ отвлеченной мѣры угла въ 180^0, а соотвѣтственно съ тѣмъ $\frac{\pi}{2}$ обозначеніемъ угла въ 90^0, и т п —

Не надо только увлекаться бѣглымъ внесеніемъ этихъ вопросовъ въ основной курсъ геометріи Если они внесены, то ихъ надо проработать основательно, на численныхъ примѣрахъ, и къ нимъ часто возвращаться

738. Вычислить площадь сектора, радіусъ котораго имѣетъ въ длину 5 вершковъ, а дуга содержитъ 38^0 —Можно вычислить площадь всего круга она равна

$$25 \text{ кв вершк} \times 3\,{}^1/_7 = 78\,{}^4/_7 \text{ кв вершка},$$

далѣе вычислить площадь сектора въ 1^0, — она равна

$$78\,{}^4/_7 \text{ кв вершк } 360,$$

ı потомъ вычислить площадь сектора въ 38^0, помноживъ полученное число кв вершк на 38 —Можно сдѣлать нѣкоторыя сокращенія въ вычисленіяхъ, написавъ, что число кв. вершк въ площади сектора, дуга котораго содержитъ 38^0, равно

$$\frac{25 \times 22 \times 38}{7 \times 360}.$$

—Нельзя ли на вопросъ посмотрѣть иначе? — Пусть данный секторъ разбить на безчисленное множество секторовъ, которые можно разсматривать, какъ треугольники, основанія которыхъ совпадаютъ съ дугами секторовъ, а высоты равны радіусу — Тогда получимъ, что площадь сектора равна *такому* числу квадратныхъ вершковъ, сколько линейныхъ вершковъ содержится въ длинѣ дуги, помноженному на половину числа единицъ длины, содержащагося въ длинѣ радіуса, но длина дуги въ 38^0 равна

$$\frac{2\pi R\ 38}{360},$$

а длина радіуса равна 5 вершкамъ, а потому площадь этого сектора равна

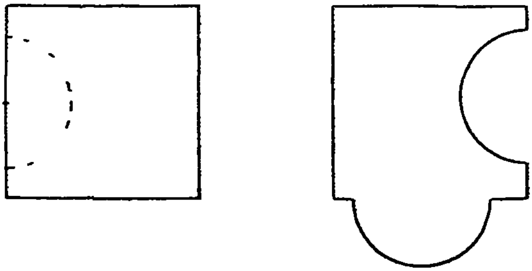
$$\frac{2\ 22\ 5\ 38}{7\ 360} \text{ кв вершк} \times \frac{5}{2},$$

откуда число кв вершк, содержащихся въ площади даннаго сектора равно

$$\frac{2\ 22\ 5\ 38\ 5}{7\ 360\ 2} \text{ или } \frac{25\ 22\ 38}{7\ 360},$$

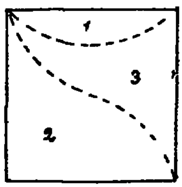
— результатъ, совершенно тожественный съ вычисленнымъ ранѣе —Замѣтьте площадь сектора составляетъ такую же часть площади круга, какую часть трехсотъ шестидесяти градусовъ составляетъ число градусовъ дуги этого сектора — Но можно говорить и иначе площадь сектора равна также *длинѣ* его дуги, помноженной на половину длины его радіуса

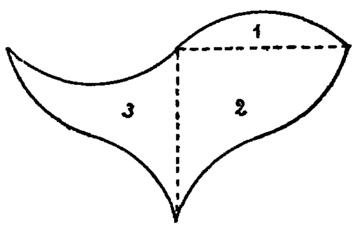
Упражненій въ вычисленіяхъ площадей секторовъ необходимо довольно много, если учитель желаетъ, чтобы это ученіе принесло ученикамъ пользу и было ими усвоено вполнѣ — Что касается той краткой формулировки теоремы о площади, при которой для вычисленія *площади* говорится, будто одна *длина* *умножается на другую длину*, то къ подобнымъ формулировкамъ надо приучить Но ученики должны вполнѣ понимать, что это только краткая формулировка, а не истинная характеристика существа дѣла; это существо дѣла никогда не должно быть забываемо ни учениками, ни учителемъ Они должны умѣть вы-



Къ № 738 (прим.).

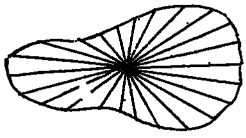
числение площади плоской фигуры представлять себѣ въ видѣ вычисленія площади нѣкотораго прямоугольника, который раздѣленъ на полосы, при чемъ площадь одной изъ этихъ полосъ приходится помножить на нѣкоторое отвлеченное (цѣлое, дробное или смѣшанное) число — Что касается квадратуры круга и ея невозможности, то эта невозможность можетъ учениковъ навести на нѣкоторыя мысли, которымъ учитель долженъ пойти навстрѣчу Первую мысль, могущую з а р о д и т ь с я особенно у интересующихся математикою учениковъ, можно формулировать такъ. до сихъ поръ никому *не удалось* найти ква-





Къ № 738 (прим.)

дратуру круга, — надо попробовать, — «можетъ-быть, мнѣ удастся это сдѣлать» Ссылки на то, что это не удавалось и ученымъ людямъ, не убѣдительны надо указать, что невозможность квадратуры круга *неопровержимо доказана* —То же относится до такъ наз трисекціи угла съ помощью линейки и циркуля —Вторая мысль сводится къ тому, что квадратура круга невозможна, можетъ-быть, только вслѣдствіе того, что окружность круга — кривая линія Эта мысль должна быть отвергнута такими фигурами, которыя хотя и ограничены кривыми линіями, но могутъ быть обращены въ квадраты Таковы, напримѣръ, фигуры, составленныя изъ квадратовъ, разрѣзанныхъ на такія части, что изъ нихъ можно составить одну криволинейную фигуру, площадь которой точно



Къ № 738 (прим).

равна площадямъ взятыхъ нами для этой операціи квадратовъ. — Еще одна мысль заслуживаетъ вниманія учителя и учениковъ только кругъ можно разсматривать, какъ *правильный* многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ и какъ сумму безчисленнаго множества *равныхъ между собою* равнобедренныхъ треугольниковъ, и только для вычисленія площади круга длина элементовъ его «периферіи» умножается на одно и то же число Во всякой же другой криволинейной фигурѣ «треугольники», на которые она разбивается прямыми, проведенными изъ какой бы то ни было точки, не равны между собою, и высоты всѣхъ этихъ треугольниковъ тоже между собою не равны —Учащіеся должны смотрѣть на разсматриваемыя свойства круга, какъ на свойства, *характерныя* для круга, а не какъ на случайныя и не какъ на свойства, общія еще съ какими-либо другими криволинейными фигурами Это знаніе значительно углубляетъ мѣру разумѣнія учениковъ и крайне полезно въ образовательномъ отношеніи Незаконченность же знанія въ этомъ пунктѣ, наоборотъ, вредно отзывается въ тѣхъ же отношеніяхъ Для этой цѣли могутъ служить не только неправильныя, но также правильныя кривыя замкнутыя фигуры

742. Подобны ли всѣ круги между собою?—Какъ относятся между собою длины двухъ окружностей разной величины? (Какъ длины ихъ радіусовъ) —Какъ относятся площади двухъ круговъ съ разными радіусами? (Какъ *квадраты* длинъ радіусовъ) —Если радіусъ одного круга болѣе радіуса другого круга въ два раза, то спрашивается, во сколько разъ площадь перваго больше площади второго? (Не въ 2 раза, а въ 4 раза) —Радіусъ одного круга больше радіуса другого въ 100 разъ, а площадь перваго во сколько разъ больше площади второго?

После того, какъ ученики по книгѣ для учениковъ разрѣшили эти вопросы на численныхъ примѣрахъ, для нихъ уже не трудно понять, что площади двухъ круговъ относятся между собою, какъ квадраты длинъ ихъ радіусовъ Но надобно продѣлать довольно много численныхъ упражненій, прежде чѣмъ это будетъ вполнѣ усвоено учениками Къ общимъ же формуламъ

$$K_1 = \pi R_1^2 \text{ и } K_2 = \pi R_2^2,$$

откуда для лицъ, уже владѣющихъ математическими выкладками, съ величайшей очевидностью явствуетъ, что

$$K_1 : K_2 = R_1^2 : R_2^2,$$

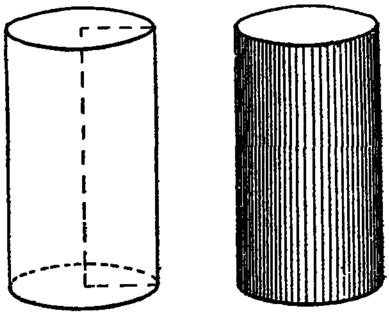
обращаться можно только съ большой осторожностью. Для учениковъ важнѣе убѣдиться въ этомъ законѣ путемъ вычисленій, въ которыхъ вмѣсто буквы π взято одно и то же приближенное значеніе для обоихъ круговъ Для нихъ важнѣе то соображеніе, что всѣ круги подобны, что для круговъ законъ отношенія площадей такой же, какъ для площадей двухъ подобныхъ прямолинейныхъ фигуръ, что въ двухъ кругахъ ихъ радіусы—сходственные элементы двухъ подобныхъ фигуръ, и т п Обработка учебнаго матеріала исключительно съ помощью формулъ не можетъ быть ни цѣлью, ни средствомъ основного курса Она можетъ быть только завершающимъ результатомъ всего курса математики.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

Поверхности круглыхъ тѣлъ.

§ 11. Боковыя поверхности прямыхъ цилиндровъ и конусовъ.

745. Пусть какой-нибудь прямоугольникъ вращается въ какомъ-нибудь одномъ направлении вокругъ своей вертикальной высоты, какъ неподвижной оси —Что при этомъ про-



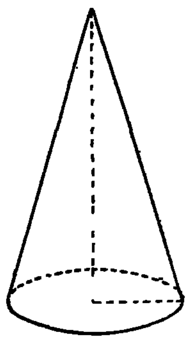
Къ № 745

изойдетъ, т.-е какую фигуру опишетъ верхнее основанiе прямоугольника, какую—нижнее основанiе, какую—каждая точка движущейся высоты?—Вращающаяся высота опишетъ поверхность, которую называютъ *цилиндрической*.—Тѣло, ограниченное двумя кругами, описанными при этомъ основанiями прямоугольника вокругъ его неподвижной высоты, и цилиндрической поверхностью, называется *прямымъ ци-*

линдромъ вращенія, или просто прямымъ цилиндромъ —Прямая, которая при своемъ вращеніи вокругъ параллельной ей неподвижной прямой описываетъ цилиндрическую поверхность, называется *образующей* этой поверхности, или образующей цилиндра —Неподвижная высота прямоугольника въ этомъ случаѣ называется *высотою прямого цилиндра*, *осью* цилиндрической поверхности прямого цилиндра, или просто *осью цилиндра* —Равна ли высота прямого цилиндра его образующей?—Круги, описанные основаніями прямоугольника, называются основаніями прямого цилиндра, «слѣдъ» подвижной высоты—*боковою поверхностью* цилиндра.—Изъ какой-нибудь точки *окружности* верхняго основанія прямого цилиндра опустить перпендикуляръ на плоскость нижняго основанія —Всѣми ли своими точками онъ совпадетъ съ однимъ изъ промежуточныхъ положеній образующей, и можно ли его называть образующей этого цилиндра?—У цилиндра—безчисленное множество образующихъ — Если провести плоскость перпендикулярно къ образующей прямого цилиндра, то линія ея пересѣченія съ боковою поверхностью цилиндра будетъ окружностью нѣкотораго круга, равнаго любому изъ основаній цилиндра и раздѣляющаго цилиндръ на двѣ части —Каждая изъ этихъ двухъ частей—тоже цилиндръ —Если провести плоскость, перпендикулярную къ основанію прямого цилиндра, то линія пересѣченія поверхности цилиндра съ этой плоскостью есть контуръ нѣкотораго прямоугольника, котораго основанія суть хорды основаній цилиндра, а высоты—двѣ его образующія

Такое описаніе свойствъ цилиндра можетъ быть легко и съ пользой для дѣла проведено на наглядномъ пособіи и на рисункѣ, и этому описанію можно придать вопросоотвѣтную форму Цѣль его—такое ознакомленіе учащихся съ цилиндромъ, въ основу котораго положенъ не рядъ теоремъ, а рядъ совершенно наглядныхъ представленій

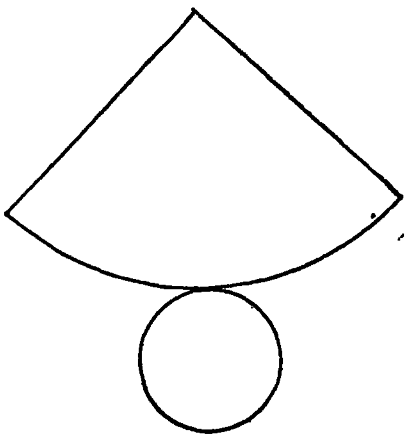
755. Начертите прямоугольный треугольникъ и представьте себѣ, какое тѣло образуется, если принять одинъ его катетъ за неподвижный и вращать треугольникъ вокругъ этого катета —Конецъ второго катета опишетъ окружность круга, каждая точка гипотенузы—также окружность нѣкотораго круга —Точка, болѣе отдаленная отъ подвижного катета треугольника, опишетъ меньшую окружность круга, чѣмъ точка, менѣе отдаленная отъ подвижнаго катета —Гипотенуза опишетъ часть поверхности, называемои *коническою* —Каждая точка внутри треугольника опишетъ тоже окружность нѣкотораго круга —Тѣло это, ограниченное кругомъ и тою поверхностью, которая описана гипотенузою, представляетъ собою *прямой конусъ* вращенія, поверхность, описанная гипотенузою — *боковую поверхность* конуса —Какъ называется кругъ, описанный подвижнымъ катетомъ? — Какъ называется часть поверхности прямого конуса, описанная гипотенузою? (Боковою поверхностью) — Неподвижный катетъ? (*Высотою* или *осью* конуса) —Какъ называется неподвижная вершина треугольника? (Вершиной конуса) —Соедините вершину конуса съ какою-нибудь точкою окружности основанія прямою, будетъ ли эта прямая лежать всѣми своими точками на поверхности конуса?— Сольется ли она съ однимъ изъ промежуточныхъ положеній образующей?—Сколько образующихъ у прямого конуса? (Безчисленное множество) —Пересѣчемъ конусъ плоскостью, перпендикулярною къ его высотѣ, какое получится «сѣченіе»? (Кругъ) —На сколько частей оно раздѣлитъ конусъ? (На двѣ) —Часть прямого конуса, ограниченная двумя кругами и частью боковой его поверхности, заклю-



Къ № 755

ченною между ихъ окружностями, называется *усѣченнымъ*, параллельно основанію, прямымъ *конусомъ*, или просто усѣченнымъ конусомъ.—Что называется образующею конуса?

756. Отдѣлимъ основаніе прямого конуса, «разрѣжемъ» боковую поверхность конуса по его образующей, «распластаемъ» ее на плоскости и приложимъ къ ней полученный кругъ.—Получимъ нѣкоторую фигуру.—Отдадимъ себѣ отчетъ въ томъ, какую.—Одна часть фигуры—кругъ, другая—касающійся окружности этого круга круговой секторъ, котораго радіусъ равенъ образующей конуса. Какова длина дуги этого сектора? (Длина дуги этого сектора равна длинѣ окружности основанія даннаго конуса).—Нужно ли знать, сколько градусовъ содержится въ углѣ этого кругового сектора, для того, чтобы вычислить длину дуги его? (Нѣтъ, не нужно).—Почему? (Потому что длина дуги этого сектора равна длинѣ окружности основанія, и если мы знаемъ



Къ № 756

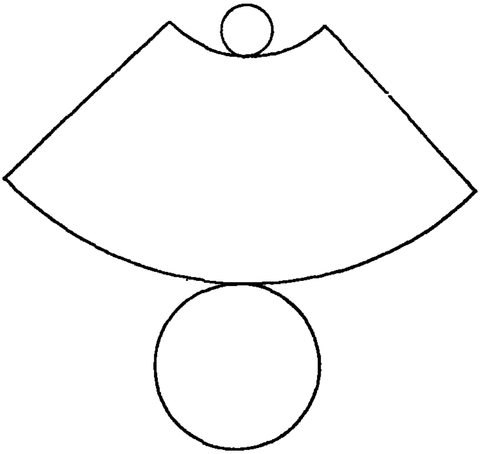
радіусъ основанія конуса, то мы легко вычислимъ длину окружности его основанія, и тѣмъ самымъ—длину дуги сектора).—Можемъ ли мы узнать площадь сектора? (Надо длину его дуги помножить на половину его радіуса, т.-е. длину окружности основанія помножить на половину образующей).

757. Вычислить боковую поверхность конуса, въ которомъ длина образующей 10 вершковъ, а длина радіуса основанія—4 вершка.—Длина окружности основанія равна

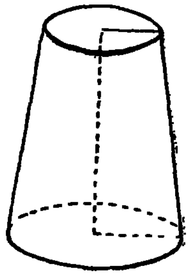
$$8 \text{ вершк.} \times \frac{22}{7} \text{ (приблизительно)},$$

фигура, ограниченная двумя прямыми и двумя дугами нѣкоторыхъ двухъ «концентрическихъ» круговъ —Какіе у этихъ круговъ радіусы?—(Одинъ равенъ образующей всего конуса, другой — образующей отсѣченной части конуса).

771. Нарисовать полный конусъ, пересѣчь его плоскостью, параллельною его основанію, и провести нѣкоторое количество образующихъ полнаго конуса —Что при



Къ № 770

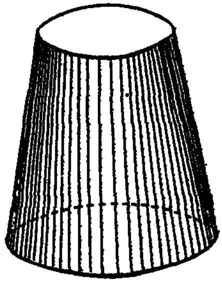


Къ № 770

этомъ случится съ поверхностью усѣченнаго конуса? (Она тоже раздѣлится на части).—Если взять такихъ образующихъ достаточно много, то поверхность конуса напомнитъ намъ какую поверхность? (Поверхность правильной усѣченной пирамиды)

Торопиться со сближеніемъ боковой поверхности прямого усѣченнаго конуса съ боковой поверхностью правильной усѣченной пирамиды — не для чего Лучше выждать момента, когда ученики, благодаря вопросамъ учителя и выполненію соотвѣтствующихъ рисунковъ на доскѣ, доберутся до нужной на этой ступени мысли.

772. Усѣченный параллельно основанію конусъ можно разсматривать какъ правильную усѣченную пирамиду съ безконечнымъ множествомъ боковыхъ граней —Боковыя ребра совпадаютъ съ чѣмъ?—Параллельныя стороны каждой боковой грани — съ чѣмъ?—Вывести на этомъ основаніи, чему равна боковая поверхность прямого усѣченнаго конуса, въ которомъ длина радіусовъ основаній равна 7 вершкамъ и 10 вершкамъ, а длина образующей равна 12 вершкамъ —Площадь каждой изъ «трапецій», на которыя разбилась боковая поверхность усѣченнаго конуса, равна полусуммѣ ея основаній, помноженной на высоту трапеціи, а вся боковая поверхность усѣченнаго конуса приблизительно равна.



Къ № 772

$$\left[\left(20 \text{ кв вершк} \times \frac{22}{7} + 14 \text{ кв вершк} \times \frac{22}{7}\right) 2\right] \times 12,$$

т -е

$$\left(\frac{440}{7} \text{ кв вершк.} + 44 \text{ кв вершк}\right) \times 6,$$

или

$$\left(\frac{440 \text{ кв вершк} + 308 \text{ кв. вершк}}{7}\right) \times 6,$$

т -е

$$748 \text{ кв вершк} \times \frac{6}{7} = \frac{4488}{7} \text{ кв вершк}$$

Такимъ образомъ боковая поверхность нашего усѣченнаго конуса равна $641^1/_7$ кв вершка

Выписывать наименованіе единицъ мѣры, въ которыхъ должны выразиться боковая поверхность, объемъ какого-нибудь тѣла или площадь какой-нибудь фигуры, на первыхъ порахъ не только полезно, но и необходимо,—особенно, въ основномъ курсѣ планиметріи и стереометріи Т н. «потеря времени», которой можно въ этомъ случаѣ опасаться, окупается многими такими выгодами въ пониманіи и въ истинныхъ, а не словесныхъ только, познаніяхъ учащихся, что бояться какой-то потери времени въ этомъ случаѣ прямо не слѣдуетъ —Общихъ формулъ въ буквахъ въ началѣ не надо давать, по возможности не торопясь сообщеніемъ этихъ формулъ не въ нихъ сила —Когда требующіеся для вычисленія элементы фигуры выражены именованными числами, то надо въ формулахъ, служащихъ для вычисленія искомой величины (насъ занимаютъ площади и поверхности), надлежащимъ образомъ писать наименованія Для площади квадрата, напримѣръ

$$a \text{ кв ед} \times a = a^2 \text{ кв ед.}$$

Для площади прямоугольника и вообще параллелограмма a кв ед $\times h$, гдѣ a число одноименныхъ единицъ длины въ основаніи, а h — число тѣхъ же единицъ длины въ высотѣ Для площади треугольника

$$a \text{ кв ед} \times \frac{h}{2}$$

Для площади трапеціи:

$$(a \text{ кв ед} + b \text{ кв ед}) \times \frac{h}{2},$$

гдѣ a — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ одномъ основаніи, b—число ихъ въ другомъ основаніи, h—число такихъ же единицъ въ высотѣ Для площади трапеціи. m кв. ед $\times h$, гдѣ m — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ средней линіи трапеціи Для площади правильнаго многоугольника·

$$p \text{ кв ед} \times \frac{r}{2},$$

гдѣ p — число одноименныхъ единицъ въ периметрѣ многоугольника, а r — число такихъ же единицъ въ апоѳемѣ многоугольника Для площади круга:

$$C \text{ кв ед.} \times \frac{R}{2},$$

гдѣ C — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ длинѣ окружности, при чемъ $C = R \times 2\pi$, гдѣ R —

число линейныхъ единицъ въ радіусѣ Для площади сектора

$$S \text{ кв ед} \times \frac{R}{2},$$

гдѣ S — число линейныхъ единицъ въ длинѣ дуги сектора Для площади круга также R^2 кв ед $\times \pi$, а для площади сектора:

$$\frac{R^2 \text{ кв ед} \times \pi \times n}{360},$$

гдѣ n — число градусовъ его дуги. Для боковыхъ поверхностей параллелепипедовъ и вообще призмъ

$$P \text{ кв ед.} \times L,$$

гдѣ P — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ длинѣ периметра сѣченія, перпендикулярнаго къ боковому ребру, а L — число ихъ въ длинѣ ребра. Для боковыхъ поверхностей правильныхъ пирамидъ

$$P \text{ кв ед} \times \frac{1}{2}L,$$

гдѣ P — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ длинѣ периметра, а L — число такихъ же единицъ въ длинѣ апоѳемы пирамиды Для боковой поверхности прямого цилиндра C кв ед $\times L$, а для боковой поверхности конуса

$$C \text{ кв ед} \times \frac{L}{2},$$

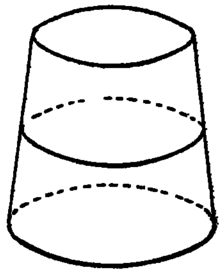
гдѣ C — число одноименныхъ единицъ въ длинѣ окружности основанія, а L — число такихъ же единицъ въ длинѣ образующей Наконецъ, для боковой поверхности усѣченнаго параллельно основанію конуса:

$$(C \text{ кв. ед.} + c \text{ кв. ед.}) \times \frac{L}{2},$$

гдѣ C — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ длинѣ окружности большаго, c — число такихъ же единицъ въ длинѣ окружности меньшаго основанія, а L — число этихъ единицъ въ образующей усѣченнаго конуса — Общія же формулы въ отвлеченномъ видѣ (въ родѣ: $q = ah$, $q = \frac{ah}{2}$, $C = 2\pi R$, $S = 2\pi(R + r)\ \frac{L}{2}$ и т. п) умѣстны только какъ окончательное и крат-

778. Показать на чертежѣ, чему равна боковая поверхность пирамиды, усѣченной параллельно основанію.

779. Нарисовать усѣченный параллельно основанію прямой конусъ и пересѣчь его плоскостью, параллельною основанію и находящеюся на одинаковомъ разстояніи отъ плоскостей основаній. — Какъ провести такую плоскость? — Это сѣченіе — кругъ, и окружность этого круга называется окружностью средняго сѣченія конуса, усѣченнаго параллельно основаніямъ — Длина этой окружности равняется полусуммѣ длинъ окружностей верхняго и нижняго основаній — *Вспомните среднюю линію трапеціи!* — Вспомните периметръ средняго сѣченія усѣченной параллельно основанію пирамиды — Вспомните длину средняго сѣченія треугольника!



Къ № 779

781. Почему боковая поверхность прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса равна длинѣ окружности средняго его сѣченія, помноженной на длину образующей?

Учащіеся должны вполнѣ усвоить способы сближенія а) длины окружности круга съ длиною периметра правильнаго многоугольника съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ, б) площади круга—съ площадью такого же многоугольника, в) боковой поверхности прямого цилиндра—съ боковой поверхностью правильной призмы, г) боковой поверхности конуса — съ боковой поверхностью правильной пирамиды, д) боковой поверхности усѣченнаго (параллельно основанію) конуса — съ боковою поверхностью усѣченной (параллельно основанію) правильной пирамиды Для этой цѣли полезно продѣлать повторительныя упражненія въ родѣ приведенныхъ въ ближайшемъ нумерѣ Это окажется полезнымъ и для усвоенія учениками тѣхъ вопросовъ дальнѣйшаго курса, которые соприкасаются съ вопросами о вычисленіи *объемовъ* круглыхъ тѣлъ.

781а. Въ правильной призмѣ мы различаемъ два основанія, ребра, боковыя грани —Какія фигуры служатъ основаніями? (Правильные многоугольники) —Какія фигуры—боковыми гранями? (Прямоугольные параллелограммы) —Изъ какихъ площадей слагается боковая поверхность правильной призмы?—Какъ *вычислить* боковую поверхность правильной призмы? (Сначала вычислить длину периметра основанія, а полученное помножить на длину высоты) —Что въ прямомъ цилиндрѣ соотвѣтствуетъ основаніямъ правильной призмы? — Что — ребру призмы? — Что— периметру основанія?—Какъ вычислить боковую поверхность прямого цилиндра?—Въ правильной пирамидѣ мы различаемъ. основаніе, боковыя грани, апоѳему, периметръ основанія —Изъ какихъ площадей слагается боковая поверхность правильной пирамиды?—Какъ *вычислить* боковую поверхность правильной пирамиды? (Сначала вычислить длину *периметра* основанія, потомъ помножить полученное на половину длины *апоѳемы*) —Что въ прямомъ конусѣ соотвѣтствуетъ основанію правильной пирамиды?—Что—апоѳемѣ?—Что — периметру основанія?—Какъ вычислить боковую поверхность прямого конуса? — Въ правильной, усѣченной параллельно основанію, пирамидѣ мы различаемъ два основанія, боковыя грани, апоѳему, периметръ основанія —Изъ какихъ площадей слагается боковая поверхность правильной, усѣченной параллельно основанію, пирамиды? (Изъ площадей трапецій, составляющихъ боковыя грани этой пирамиды) — Какъ *вычислить* боковую поверхность правильной, усѣченной параллельно основанію, пирамиды? (Сложить длины периметровъ основаній пирамиды и полученное помножить на половину длины апоѳемы, или, что — то же, половину суммы длинъ периметровъ основаній помножить на всю апоѳему).—Что въ прямомъ, усѣченномъ параллельно основанію, конусѣ соотвѣтствуетъ основаніямъ правильной пирамиды, усѣченной параллельно основанію? (Основанія конуса). —

ныхъ кв. единицъ содержится въ боковой поверхности прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса. — Тогда

$$\text{(I)}\ C = 2R\ \ \pi = 2\pi R,$$

$$\text{(II)}\ K = C\ \frac{R}{2} = R^2\ \ \pi = \pi R^2,$$

$$\text{(III)}\ S_ц = 2\pi R\ \ L;$$

$$\text{(IV)}\ S_к = 2\pi R\ \ \frac{L}{2},$$

$$\text{(V)}\ S_{ус\ к} = 2\pi R'\ \ L$$

Эти формулы легко запоминаются, если онѣ не сопоставляются съ формулами объемовъ въ нихъ есть общее множимое $2\pi R$ (такъ какъ $2\pi R'$ — только частный случай), и только въ поверхности конуса есть дробный множитель, а въ остальныхъ — множитель тоже общій, а именно L — Чтобы учащіеся не забывали, что для вычисленія поверхности прямого конуса необходимо брать *половину* образующей, полезно находить *треугольники*, равновеликіе съ секторами круга и равновеликіе съ поверхностями прямыхъ конусовъ — Это сдѣлано въ книгѣ для учащихся. — Если время для формулъ почему-либо не приспѣло, то надо старательно повторить словесныя формулировки относящихся сюда теоремъ

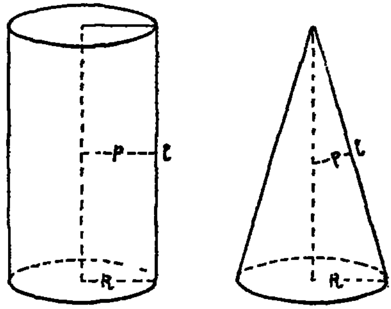
***796.** Напишите формулы для поверхностей прямыхъ цилиндра, конуса и усѣченнаго параллельно основанію прямого конуса — Эти формулы гласятъ

$$S_{ц.} = 2\pi R \, . \, L \text{ (для цилиндра)},$$

$$S_к = 2\pi R \, . \, \frac{L}{2} \text{ (для конуса)},$$

$$S_{ус\ к} = 2\pi R' \, . \, L \text{ (для усѣч кон)}$$

Ихъ можно преобразовать въ другія —Нарисуемъ прямые цилиндръ, конусъ и прямой, усѣченный параллельно основанію, конусъ, и изъ середины одной изъ образующихъ каждаго изъ этихъ тѣлъ проведемъ перпендикуляръ (внутрь тѣла) до пересѣченія съ осью тѣла, обозначимъ длину этого перпендикуляра буквою p и будемъ его, для краткости, называть вспомогательнымъ перпендикуляромъ —Вспомогательный перпендикуляръ поможетъ передѣлать въ болѣе удобныя,—или, какъ говорятъ въ такихъ случаяхъ, — *преобразовать* формулы для $S_{ц}$, $S_{к}$ и $S_{ус.к}$ въ болѣе удобныя



Къ № 796

№№ 796—803 и § 12, относящіеся до вывода поверхности шара можно и совсѣмъ отложить, если нужныя буквенныя преобразованія не достаточно ясны учащимся — Въ § 18 данъ иной выводъ поверхности шара въ связи съ выводомъ, по способу Кавальери (XVII в), формулы объема шара. Но лучше, при малѣйшей къ тому возможности, упомянутыхъ нумеровъ и параграфа 12 не опускать. — Терминъ «вспомогательный перпендикуляръ» введенъ для краткости

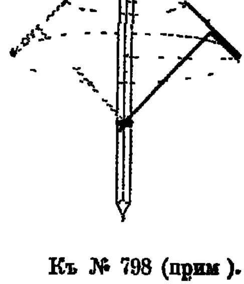
***798.** Чему равняется боковая поверхность цилиндра?— Отвѣтъ въ отвлеченныхъ числахъ $S_{ц} = 2\pi R \,.\, L$, но въ цилиндрѣ вспомогательный перпендикуляръ образующей равенъ радіусу основанія, а образующая равна высотѣ, поэтому $S_{ц} = 2\pi p\; h$, т-е боковая поверхность равна произведенію длины окружности, у которой радіусъ равенъ вспомогательному перпендикуляру образующей, на длину высоты цилиндра —Чему равняется боковая поверхность прямого конуса? — Въ отвлеченныхъ числахъ $S_{к} = 2\pi R \,.\, \frac{L}{2}$, но изъ подобія прямоугольныхъ треугольниковъ, въ одномъ изъ которыхъ катетами служатъ высота конуса и радіусъ его основанія, а въ другомъ—половина образующей и вспомогательный перпендикуляръ, слѣдуетъ, что $R \cdot h = p\,\frac{L}{2}$, от-частью, представляющеи собою прямую линію со вспомогательнымъ перпендикуляромъ. Приведя карандашъ во вращеніе вокругъ его оси, получимъ отъ вращенія прямой линіи, перпендикулярной къ вспомогательному перпендикуляру, поверхность усѣченнаго конуса На карандашѣ можно отмѣтить концы проекціи этой прямой на ось вращенія Придавая образующей усѣченнаго конуса различный наклонъ къ оси вращенія, учащійся можетъ прочно усвоить себѣ общую формулу

$$S = 2\pi p\ h.$$

и частныя формулы

$$S_ц = 2\pi R.\ L,\ S_к = 2\pi R\ \frac{L}{2}\ \text{и}\ S_{ус\ к} = 2\pi R'\ L,$$

и понять общность первои изъ приведенныхъ формулъ и частное значеніе каждои изъ остальныхъ Безъ наглядныхъ пособій преобразованія, подобныя приведенному въ предыдущемъ нумерѣ, обращаются въ игру буквами, имѣющую весьма малое образовательное значеніе.—Учитель, не сочувствующій такой наглядности на этой ступени, долженъ иллюстрировать вопросы занимающаго насъ содержанія многочисленными чертежами и рисунками, которые приведены въ слѣдующемъ нумерѣ Но должно помнить, что одни чертежи и рисунки не для всѣхъ учениковъ достаточны, въ виду неизбѣжныхъ индивидуальныхъ различій въ развитіи пространственнаго воображенія у различныхъ учениковъ. Развитію же пространственнаго воображенія особенно способствуютъ именно пространственныя и тѣлесныя наглядныя пособія, взамѣнъ которыхъ въ книгахъ, по неволѣ, прибѣгаютъ къ чертежамъ и рисункамъ Послѣдніе поэтому являются не чѣмъ-то исключительно допустимымъ при изученіи геометріи, а только неизбѣжнымъ средствомъ *книжнаго* изложенія, котораго пріемы отнюдь не должны счи-



Къ № 798 (прим.).

таться обязательными при изученіи предмета учениками подъ руководствомъ учителя

800. Начертить прямую и внѣ ея ломаную о нѣскольких звеньяхъ, опустить изъ концовъ ломаной перпендикуляры къ начерченной прямой и принять послѣднюю за ось вращенія всей фигуры вокругъ этой прямой —Получится нѣкоторое тѣло вращенія («ваза»)

***800а.** Опредѣлить, какія измѣренія и вычисленія надо выполнить, чтобы узнать боковую поверхность вазы, ограниченной коническими поверхностями, въ которыхъ длины образующихъ по порядку содержатъ L_1, L_2, L_3, L_4, и L_5 единицъ мѣры длины —Для этого можно измѣрить радіусы всѣхъ среднихъ сѣченій и составить формулу

$$2\pi R'_1\ L_1 + 2\pi R'_2\ L_2 + 2\pi R'_3\ L_3 + 2\pi R'_4\ L_4 + 2\pi R'_5\ L_5$$

Можно также измѣрить проекціи образующихъ на ось вращенія h_1, h_2, h_3, h_4 и т д и вспомогательные перпендикуляры образующихъ p_1, p_2, p_3 и т д и составить формулу

$$2\pi p_1\ h_1 + 2\pi p_2\ h_2 + 2\pi p_3 . h_3 + 2\pi p_4 h_4 + 2\pi p_5\ h_5$$

Въ каждой изъ этихъ формулъ сомножитель 2π является общимъ множителемъ во всѣхъ слагаемыхъ, а потому можно вычислять боковую поверхность S всей вазы по любой изъ слѣдующихъ двухъ формулъ

$$S = 2\pi\ (R'_1\ L_1 + R'_2\ L_2 + R'_3\ L_3 + R'_4\ L_4 + R'_5 . L_5$$

или

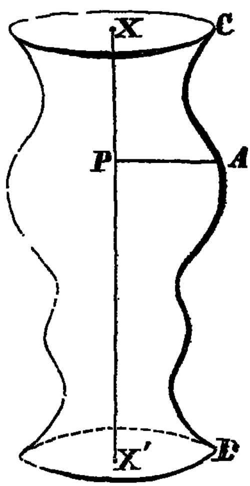
$$S = 2\pi\ (p_1\ h_1 + p_2\ h_2 + p_3\ h_3 + p_4\ h_4 + p_5\ h_5)$$

***800б.** Чему равна длина окружности, если длина радіуса равна R единицамъ длины?—Съ увеличеніемъ длины радіуса въ нѣсколько разъ, какъ увеличивается длина окружности? (Во столько же разъ) —Замѣтьте длина окружности прямо пропорціональна длинѣ ея радіуса.—Чему равна площадь круга?—Съ увеличеніемъ длины радіуса въ нѣсколько разъ, какъ увеличивается площадь круга? (Не во столько же порціональны длинѣ радіуса основанія и длинѣ *образующей* —Поверхность же прямого усѣченнаго параллельно основанію конуса пропорціональна длинѣ радіуса средняго сѣченія и длинѣ образующей —Боковыя поверхности прямыхъ цилиндра, конуса и усѣченнаго параллельно основанію конуса прямо пропорціональны высотѣ тѣлъ и длинѣ ихъ вспомогательныхъ перпендикуляровъ

Весьма полезно на этой ступени обращать вниманіе на то, что всякое произведеніе двухъ независящихъ одинъ отъ другого сомножителей прямо пропорціонально каждому изъ этихъ множителей Оговорка относительно того, что сомножители должны не зависѣть одинъ отъ другого, можетъ быть выяснена на примѣрѣ площади круга Хотя площадь круга выражается въ видѣ *произведенія* длины окружности на половину радіуса, но съ увеличеніемъ радіуса въ n разъ площадь круга увеличивается въ n^2 разъ Равнымъ образомъ съ увеличеніемъ длины окружности въ n разъ площадь круга тоже увеличивается въ n^2 разъ, и причина этого кроется въ томъ, что, съ увеличеніемъ длины радіуса въ n разъ, и длина окружности увеличивается въ n разъ и что длина одной окружности не можетъ увеличиться въ n разъ, если при этомъ длина радіуса не увеличивалась тоже въ n разъ Этотъ пунктъ, при малѣйшей къ тому возможности, заслуживаетъ вниманія учителя и учащихся Въ противномъ случаѣ, истинная зависимость площади круга отъ длины его окружности и отъ длины его радіуса будетъ для учениковъ только формально, а не по существу понятной Что же касается поверхностей тѣлъ вращенія, которыхъ образующая—прямая линія, то каждая изъ этихъ поверхностей прямо пропорціональна двумъ величинамъ, которыя другъ отъ друга не зависятъ либо длинѣ окружности средняго сѣченія и длинѣ образующей, либо длинѣ проекціи образующей на ось и длинѣ вспомогательнаго перпендикуляра Достойно при этомъ вниманія и то, что коэффиціенты пропорціональности для дѣлимаго и дѣлителя слѣдующихъ частныхъ C R, $S_{ц.}$ CL, $S_к$ CL и $S_{ус\ к}$ CL, а также коэффиціентъ пропорцiональности для дѣлимаго и дѣлителя слѣдующихъ частныхъ $S_ц$ ph, $S_к$ ph и $S_{с.к}$ ph равенъ 2π Для площади K круга K $R^2 = \pi$

§ 12. Поверхность шара.

802. Кромѣ прямого цилиндра, прямого конуса, прямого, усѣченнаго параллельно основанiю, конуса и «вазы», ограниченной коническими и цилиндрическими поверхностями, есть безчисленное множество тѣлъ вращенiя, которыя можно разсматривать, какъ тѣла, произошедшiя отъ вращенiя нѣкоторой плоской *кривой* линiи около нѣкоторой неподвижной оси — Возьмемъ въ плоскости чертежа кривую линiю CAD и нѣкоторую прямую XX', опустимъ изъ концовъ этой кривой перпендикуляры на прямую; примемъ эту прямую за ось вращенiя всеи фигуры $XX'DACX$ вокругъ этой оси — Получимъ нѣкоторое тѣло вращенiя, «вазу», ограниченную двумя кругами, у которыхъ радiусами служатъ прямыя $X'D$ и XC и нѣкоторою кривою поверхностью. — Какую линiю при этомъ



Къ № 802

вращенiи описываетъ каждая точка кривой линiи DC? (Окружность нѣкотораго круга) —Какую фигуру получимъ, если разсѣчемъ вазу плоскостью, перпендикулярною къ оси вращенiя? (Нѣкоторый кругъ) Какая линiя является образующей этого «тѣла вращенiя»? (Кривая линiя CAD) — Представимъ себѣ рядъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ оси вращенiя, онѣ разрѣжутъ тѣло вращенiя на «слои», или «пласты», а боковую поверхность тѣла—на «пояса».— Представимъ себѣ множество плоскостей, перпендикулярливо также для вычисленія объемовъ этихъ тѣлъ вращенія Знаніе этой ихъ особенности въ состояніи внести въ дѣло значительный интересъ и объединить познанія учениковъ весьма важной руководящей идеей —Полезно обратить вниманіе учениковъ на то, что изъ дерева и металла тѣла вращенія приготовляются на токарномъ станкѣ съ помощью стамески, рѣжущій край которой представляетъ собою *прямую* линію, и что только тѣмъ или инымъ наклономъ этого края относительно оси вращенія достигается та или иная форма выточенной фигуры Примѣры колонки, шахматныя фигуры, точеныя металлическія части машинъ, ножки стола и т п. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что въ тѣлахъ вращенія вообще только сѣченія, перпендикулярныя къ оси вращенія, круги Только въ шарѣ всякое сѣченіе плоскостью — кругъ

806. Начертить полуокружность, принять вертикальный діаметръ за ось ея вращенія и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какое получится при этомъ тѣло вращенія —Какъ называется такое тѣло?—Какъ называется его поверхность? (Шаровой, или сферической поверхностью) —Если шаръ пересѣчь плоскостью, то какая фигура будетъ ея сѣченіемъ? (Кругъ) —Какая точка называется центромъ шара, или шаровой поверхности?—Провести плоскость черезъ центръ шара и плоскость, не проходящую черезъ центръ шара — Который кругъ больше?—То сѣченіе шара, которое проходитъ черезъ центръ шара, наз *большимъ кругомъ* шара — Сколько большихъ круговъ у шара?

807. Какая прямая называется діаметромъ, или поперечникомъ, шара или шаровой поверхности?—Какая прямая называется радіусомъ (или полупоперечникомъ) шара или шаровой поверхности?—Концы діаметра шаровой поверхности, служившаго осью вращенія, называются *полюсами* шара, или шаровой поверхности —Какъ называется окружность большого круга, плоскость котораго перпендикулярна къ оси шара? (Экваторомъ) —Провести на поверхности шара рядъ окружностей, плоскости которыхъ параллельны плоскости экватора, какъ называются эти круги? (Параллельными кругами) —Какъ называются ихъ окружности? (Параллелями) —Какъ называется часть сферической (шаровой) поверхности, заключенная между двумя параллелями? (Поясомъ шаровой поверхности, или, просто, шаровымъ поясомъ).—Часть шаровой поверхности, заключенная между полюсомъ шара и одною изъ параллелей, мы будемъ тоже называть шаровымъ поясомъ, но это — шаровой поясъ объ одной параллели —Всякій другой шаровой поясъ ограниченъ двумя параллелями или экваторомъ и параллелью

Здѣсь чрезвычайно полезно сдѣлать небольшую экскурсію въ область географическихъ координатъ, климатическихъ поясовъ, координатъ на небесной сферѣ, и т п

***809.** Начертить «правильный полумногоугольникъ» съ четнымъ числомъ сторонъ —Для этого начертимъ полукругъ, раздѣлимъ полуокружность его на 8 одинаковыхъ частей и послѣдовательно соединимъ конецъ діаметра съ первой точкой дѣленія, первую—со второй и т д —Представимъ себѣ, что мы привели этотъ полумногоугольникъ во вращеніе вокругъ діаметра, какое тѣло вращенія опишетъ каждая изъ сторонъ полумногоугольника?—Чему равна поверхность всего тѣла вращенія? $S = 2\pi R'_1\ L_1 + 2\pi R'_2\ L_2 + 2\pi R'_3\ L_3 +$ или

$$S = 2\pi p_1 h_1 + 2\pi p_2 h_2 + 2 p_3 h_3 +$$

Что обозначаютъ R'_1, R'_2, R'_3, R'_4, и т д? Что—L_1, L_2, L_3 и т д, что — p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, и т д, что, наконецъ, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 и т д? (Всѣ R обозначаютъ длины радіусовъ среднихъ сѣченій коническихъ поверхностей, составляющихъ поверхность нашего тѣла вращенія, всѣ L — длину образующихъ, всѣ p — длины вспомогательныхъ перпендикуляровъ, всѣ h—длины проекцій образующихъ на ось) —Какія величины равны между собою въ первой формулѣ? (Всѣ L) —Какія—во второй? (Всѣ p)

въ «стопочку» такой высоты, чтобы эту высоту можно было измѣрить, сжать эту стопочку и полученную высоту раздѣлить на число листковъ въ «стопкѣ» —Вычислить толщину стального пера —Для этого надо имѣть въ своемъ распоряжении нѣсколько перьевъ —Имѣетъ ли поверхность, какъ мы ее понимаемъ, то свойство, которое въ любой оболочкѣ называется ея толщиной? (Нѣтъ, не имѣетъ) —Что такое поверхность? (Поверхность тѣла—граница, отдѣляющая его отъ остального пространства) —Поверхность не имѣетъ толщины —Что такое линія? (Линія на поверхности—граница части этой поверхности) —Имѣетъ ли линія то свойство, которое въ проволокѣ, ниткѣ или тончайшемъ волоскѣ называется толщиною проволоки, нитки или волоска?—Линія имѣетъ только длину —Что такое точка? (Точка на линіи—начало или конецъ части этой линіи или ея отрѣзка —Имѣетъ ли точка то свойство, которое въ горошинкѣ, песчинкѣ, пылинкѣ называется ихъ величиною?—Точка не имѣетъ ни длины, ни ширины, ни толщины —Въ этомъ смыслѣ говорятъ тѣло есть *протяженіе* о трехъ «измѣреніяхъ», поверхность — протяженіе о двухъ измѣреніяхъ, линія—протяженіе объ одномъ измѣреніи, а точка не имѣетъ измѣреній —Замѣтьте о точкѣ не говорятъ, что она—протяженіе —Почему этого не говорятъ?—Она занимаетъ только мѣсто въ пространствѣ, но не имѣетъ ни длины, ни ширины, ни высоты

860. Мы знаемъ о трапеціи, что это—четыреугольникъ, въ которомъ двѣ стороны взаимно параллельны, а остальныя двѣ стороны другъ другу не параллельны —Это *опредѣленіе* трапеціи —Скажите опредѣленіе правильнаго многоугольника' (Если въ многоугольникѣ всѣ стороны равны между собою, и углы тоже между собою равны, то этотъ многоугольникъ называется правильнымъ) —Знаете ли вы опредѣленія параллелограмма? круга? многоугольника? діагонали многоугольника? и т д

Надо перебрать, по возможности, опредѣленія всѣхъ геометрическихъ фигуръ и ихъ элементовъ Не надо требовать отъ учащихся опредѣленій прямой линіи, направленія, угла, площади, величины, фигуры, формулы Эти понятія принадлежатъ къ числу основныхъ понятій, не допускающихъ опредѣленія, либо къ числу понятій, не нуждающихся въ опредѣленіи, либо къ числу понятій, опредѣленіе которыхъ затруднительно

***860а.** Что вы знаете о квадратахъ, построенныхъ на сторонахъ прямоугольнаго треугольника? (Пиѳагорову *теорему*) —Теоремой называютъ истину, которая не принимается безъ доказательства —Какія вы знаете теоремы?— Нѣкоторыя истины принимаются безъ доказательства· напр, если одна прямая больше другой, а эта послѣдняя больше третьей то первая больше третьей —Истина ли это «предложеніе»?—Ея не доказываютъ, такая истина называется *аксіомой*

Надо перебрать нѣсколько теоремъ и нѣсколько аксіомъ, и тогда эта работа будетъ не безполезна для учениковъ —Мѣсто отведено этимъ упражненіямъ въ концѣ этой части основного курса геометріи, такъ какъ начинать курсъ съ нихъ представляется не цѣлесообразнымъ. Но само собой разумѣется, что если учитель пожелаетъ раньше ознакомить учениковъ съ раздѣленіемъ «предложеній», встрѣчающихся въ геометріи, на задачи, теоремы и аксіомы, то онъ это можетъ сдѣлать нѣсколько раньше — Что такое задача— объяснять не стоитъ. — Термины «лемма» и «слѣдствіе» на первыхъ порахъ не принадлежатъ къ числу сколько-нибудь необходимыхъ въ основномъ курсѣ

***860б.** Умѣете ли вы *доказывать* какія-нибудь теоремы?—Какія теоремы вы умѣете доказывать?—Чему равна сумма угловъ треугольника?—Докажите!—Въ чемъ состоитъ Пиѳагорова теорема?—Докажите!—Чему равна площадь прямоугольника?—Что вы знаете о внѣшнемъ углѣ треугольника?—Сколько градусовъ содержитъ каждый изъ угловъ равносторонняго треугольника?—Какіе вы знаете признаки равенства треугольниковъ?—Чему равна боковая поверхность правильной призмы? И т д.

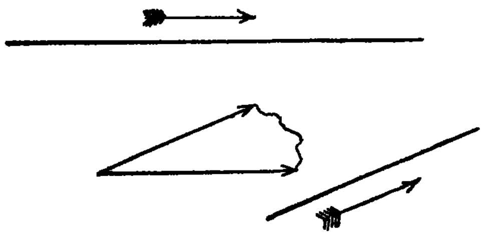
Теоремы взяты въ произвольномъ порядкѣ, и сдѣлано это умышленно Дѣло въ томъ, что въ пройденномъ курсѣ учащіеся доказывали не тѣ очевидныя теоремы, которыми обыкновенно начинается систематическій курсъ этого предмета —Полезно предложить учащимся на-домъ работу отдать себѣ, съ книгою для учениковъ въ рукахъ, отчетъ въ томъ, какія теоремы они умѣютъ доказывать —Что дѣлать съ остальными теоремами, зависитъ отъ программы курса, отъ вкусовъ учителя и — самое главное — отъ склонности учащихся къ доказательству *очевидныхъ* истинъ Во всякомъ случаѣ, въ интересахъ дальнѣйшаго курса, не слѣдуетъ увлекаться доказательствами слишкомъ очевидныхъ теоремъ (о равенствѣ прямыхъ угловъ, о равенствѣ треугольниковъ, о неравенствѣ перпендикуляра и наклонной, о возможности возстановить перпендикуляръ и опустить его, и т п) —Систематизація курса въ этомъ направленіи можетъ быть отложена до полнаго усвоенія курса основного Но она можетъ быть проводима на-ряду съ изученіемъ фактовъ основного цикла, конечно, послѣ усвоенія учащимися извѣстнаго комплекса фактическихъ познаній Особенно легко такая постановка дѣла осуществима въ средней школѣ прямыми, имѣющими одню и то же направленіе, равенъ 0^0 — Это допустимо —Дѣйствительно начертить въ плоскости прямую и взять въ той же плоскости точку внѣ прямой, соединить съ данной точкой рядъ точекъ, взятыхъ на данной прямой по одну сторону перпендикуляра, опущеннаго изъ этой точки на данную прямую —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе острые углы меньше и какіе больше изъ числа тѣхъ, которые образованы при точкахъ, взятыхъ на данной прямой —Съ удаленіемъ вершины угла отъ проекціи данной точки на данную прямую, уголъ все уменьшается, и вторая сторона все подвигается къ прямой, параллельной къ данной прямой, и этому уменьшенію не положено никакихъ препятствій — Поэтому говорятъ, что уголъ этотъ «*стремится*» все больше и больше къ 0^0 —Когда же прямыя параллельны и имѣютъ одно и то же (а не прямо противоположное) направленіе, то *говорятъ*, что уголъ, ими образованный, равенъ нулю —Чему равенъ «уголъ», образованный двумя параллельными прямыми, имѣющими прямо-противоположныя направленія? (О такихъ прямыхъ можно говорить, что онѣ образуютъ уголъ, равный 180^0)

862. Какое положеніе могутъ имѣть прямая и плоскость въ пространствѣ?—Троякое 1) прямая можетъ «лежать» въ данной плоскости или, что—то же, плоскость можетъ «проходить» черезъ прямую, 2) прямая можетъ «пересѣкать» плоскость, и 3) прямая и плоскость могутъ быть взаимно-параллельны —Примѣры изъ жизни —Карандашь и плоскость чертежа —И т п.

862a. Когда говорятъ, что прямая перпендикулярна къ плоскости?—Тогда, когда прямая перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной въ плоскости черезъ точку ея пересѣченія съ этой плоскостью —Какова проекція этой прямой на плоскость?—Проекцію перпендикуляра къ данной плоскости на эту плоскость представляетъ собою точка, а именно, точка пересѣченія перпендикуляра съ плоскостью.—

въ то же время не параллельны одна другой) —Укажите въ классѣ прямыя послѣдняго рода

861б. Даны двѣ прямыя, которыя, не пересѣкаясь, въ то же время не параллельны одна другой и имѣютъ данныя направленія —Возьмемъ какую-нибудь, лежащую внѣ ихъ, точку, изъ нея проведемъ двѣ прямыя, порознь параллельныя каждой изъ нихъ, и черезъ эти двѣ прямыя проведемъ плоскость —Когда говорятъ объ углѣ, образован-



Къ № 861б

номъ двумя «перекрещивающимися въ пространствѣ» прямыми, т.-е такими, которыя, никогда не пересѣкаясь, въ то же время не параллельны одна другой, то за уголъ между ними принимаютъ уголъ, образованный двумя прямыми, проведенными изъ какой-либо точки пространства параллельно даннымъ прямымъ и имѣющими порознь тѣ же направленія, что данныя прямыя.

861в. Отдать себѣ отчетъ въ томъ, можно ли такъ же понимать уголъ, образованный двумя прямыми, проведенными на плоскости —Можно если эти прямыя не параллельны одна другой, то уголъ, образованный новой парой прямыхъ, равенъ углу, образованному данными прямыми; если же данныя двѣ прямыя взаимно-параллельны и имѣютъ одно и то же направленіе, то можно *условиться* въ этомъ случаѣ поступать такъ же, но тогда придется считать, что уголъ, образованный двумя взаимно-параллельными которой лежатъ первыя двѣ прямыя — Перемѣщеніе третьей прямой при этомъ произвольно — Оно могло происходить такъ, чтобы каждое положеніе прямой было параллельно первоначальному — Это будетъ одинъ взглядъ на плоскость, какъ на слѣдъ движенія нѣкоторой прямой въ пространствѣ параллельно самой себѣ — Можно посмотрѣть на плоскость и иначе — Представимъ себѣ три прямыя въ пространствѣ, изъ которыхъ первая пересѣкаетъ вторую и третью, а вторая и третья тоже взаимно пересѣкаются, о такихъ трехъ прямыхъ говорятъ, что онѣ взаимно пересѣкаются — Возьмемъ на первой прямой точку A, а на второй — точку B, и черезъ нихъ проведемъ безконечную въ обоихъ направленіяхъ прямую и станемъ вращать эту четвертую прямую въ какомъ-нибудь одномъ направленіи вокругъ точки A съ тѣмъ, чтобы точка A осталась на своемъ мѣстѣ, а нѣкоторая вторая точка прямой оставалась на второй прямой — Тогда четвертая прямая опишетъ въ пространствѣ нѣкоторую плоскость, притомъ ту, въ которой лежатъ прямыя I, II и III

Наглядными пособіями могутъ служить карандаши, проволоки, вязальныя спицы и т п — Брать въ послѣднемъ случаѣ три прямыя линіи удобнѣе, чѣмъ двѣ, и это ученики должны понять Неудобство двухъ прямыхъ въ этомъ случаѣ состоитъ въ слѣдующемъ когда прямая AB, проходя черезъ точку A первой прямой и черезъ нѣкоторую точку второй прямой, описываетъ при вращеніи своемъ вокругъ точки A плоскость, все ладно, но стоитъ взять прямую, параллельную ко второй прямой, и тогда прямая AB не можетъ принять положенія прямой AK, такъ какъ у прямой AK и второй прямой нѣтъ общей точки А потому прямая AB не будетъ въ состояніи описать ту часть плоскости, которая лежитъ направо отъ прямой AK. Въ случаѣ же трехъ пересѣкающихся прямыхъ линій прямая AB постоянно проходитъ черезъ неподвижную точку A прямой I-ой и либо черезъ двѣ точки пря-

ГЛАВА ПЯТАЯ.

Прямыя и плоскости въ пространствѣ.

§ 13. Прямая линія и плоскость [1]).

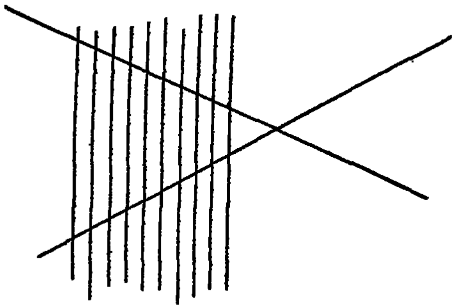
861. Какое положенiе могутъ имѣть двѣ прямыя въ пространствѣ?—Троякое 1) онѣ могутъ взаимно пересѣкаться, 2) онѣ могутъ быть параллельны одна другой, и 3) онѣ могутъ, не пересѣкаясь, въ то же время не быть взаимно-параллельны.—Примѣры

861a. *Можно ли черезъ всякія двѣ прямыя провести плоскость?* (Нѣтъ, не черезъ всякія двѣ прямыя можно провести, «проложить» плоскость) —Когда черезъ двѣ прямыя можно провести плоскость? (Когда онѣ взаимно пересѣкаются и когда онѣ взаимно-параллельны) —Когда нельзя? (Когда онѣ не пересѣкаясь, какъ бы далеко ихъ ни продолжали,

---

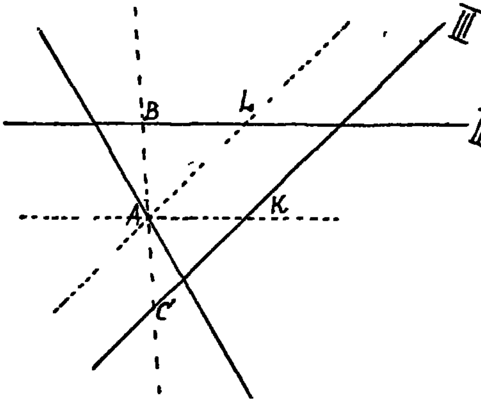
[1]) Этому параграфу можно предпослать § 16, въ которомъ предложены задачи и упражненія въ вычисленiи объемовъ параллелепипедовъ, или же только часть § 16, посвященную объемамъ куба и прямоугольнаго параллелепипеда Это тѣмъ дозволительнѣе, что даже въ той части курса ариѳметики, которая посвящена преобразованiямъ именованныхъ чиселъ и дѣйствiямъ надъ ними, предлагаются основныя задачи на вычисленiе объема кубовъ и иныхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ. Въ случаѣ надобности, проработку § 13 можно отложить на нѣкоторое время, если учитель найдетъ его содержанiе недостаточно занимательнымъ для учениковъ или, что—то же, учениковъ—недостаточно развитыми для интереса къ полной систематизацiи пространственныхъ представленій, лежащихъ въ основѣ многихъ упражненій этого параграфа

точка которой лежитъ на первой изъ данныхъ прямыхъ, а другая—на второй, далѣе представимъ себѣ, что третья



Къ № 865

прямая перемѣщается въ пространствѣ, оставаясь, однакоже, въ такомъ положеніи, что какія-нибудь двѣ точки (не



Къ № 865

прежнія) лежатъ одна на одной изъ данныхъ прямыхъ, другая—на другой.—Тогда третья прямая опишетъ въ пространствѣ часть нѣкоторой плоскости, притомъ той, на

Типографія Т-ва И. Д. Сытина. Пятницкая ул
Москва.—1913.

Для низшей ступени геометрическаго знанія мною подготовлена къ печати другая (небольшая) книга, содержащая въ себѣ тотъ матеріалъ, знакомство съ которымъ и усвоеніе котораго необходимо и возможно для учащихся низшихъ учебныхъ заведеній, приготовительнаго и первыхъ двухъ классовъ средней школы, независимо отъ того, включенъ ли въ учебный планъ тотъ курсъ, который разработанъ въ **„Геометріи на задачахъ“**. Безъ этого матеріала почти невозможны надлежащія занятія по географіи, начаткамъ естествознанія и даже ариѳметикѣ Для тѣхъ среднихъ и другихъ школъ, въ курсъ которыхъ можетъ быть, по тѣмъ или инымъ условіямъ ихъ существованія, введенъ этотъ низшій циклъ курса геометріи, курсъ основной только сократится во многихъ пунктахъ, но въ цѣломъ, конечно, явится вторымъ необходимымъ цикломъ Въ среднихъ школахъ за ними послѣдуетъ третій, систематизаціонный и дополнительный, въ послѣднихъ классахъ. Въ техническихъ же школахъ или курсахъ и т. п учебныхъ заведеніяхъ и въ элементарныхъ школахъ съ повышенной программой основной курсъ можетъ представлять собою, въ то же время, высшій циклъ.

Въ посильной работѣ моей подъ заглавіемъ „Начальная математика“, напечатанной въ одномъ изъ томовъ („Методы первоначальнаго обученія“) „Педагогической академіи въ очеркахъ и монографіяхъ“ (выходящей въ Москвѣ подъ редакціей А П Нечаева), первый, низшій, циклъ геометрическаго знанія намѣченъ въ болѣе или менѣе общихъ чертахъ То же сдѣлано въ первой статьѣ моей подъ заглавіемъ „Къ реформѣ преподаванія математики“, напечатаной въ декабрьскомъ нумерѣ „Русской Школы“ за 1911 годъ.

„Геометрія на задачахъ“ предназначена для второго, полнаго, но конкретнаго цикла курса геометріи. Несмотря на многіе недосмотры и ошибки, вкравшіеся въ первое изданіе этой книги, и на то, что она не примѣнена къ требованіямъ офиціальныхъ программъ и учебныхъ плановъ, она встрѣтила нѣкоторое сочувствіе не только въ педагогической прессѣ, но и среди практиковъ-учителей.

Можетъ - быть, неизлишне будетъ отмѣтить, что курсъ, разработанный въ „**Геометріи на задачахъ**", мнѣ удалось провести не въ одномъ, а въ нѣсколькихъ учебныхъ заведеніяхъ, и что при наличности основного курса въ среднихъ классахъ, начиная, примѣрно, съ третьяго, курсъ систематическій, по одному изъ принятыхъ въ Россіи учебниковъ, учащимся удавалось усвоить въ теченіе одного учебнаго года безъ всякихъ затрудненій и, насколько я могу о томъ судить, вполнѣ основательно

Въ заключеніе выражаю свою сердечную признательность преподавателю Варшавскаго Суворовскаго кадетскаго корпуса Б П. Винокурову и преподавателю Первыхъ политехническихъ курсовъ въ Спб. В И. Синакевичу за тотъ трудъ, который они понесли при изготовленіи „Алфавитнаго указателя" этой книги и за цѣнныя ихъ указанія разнаго рода. В. И Синакевичу приношу благодарность также за его помощь при чтеніи корректуръ этой книги. Равнымъ образомъ выражаю свою признательность авторамъ рецензій и отзывовъ объ этой книгѣ за ихъ вниманіе къ моимъ посильнымъ трудамъ и за указанія, сдѣланныя ими по поводу недосмотровъ и ошибокъ въ этой книгѣ моей.

С Шохоръ-Троцкій.

Спб Нижегородская 23а
Сентябрь 1912 г

ВНИМАНІЮ УЧИТЕЛЯ.

Діалектическій методъ въ преподаваніи.

Многіе думаютъ, что вообще учить математикѣ надобно такъ, чтобы ученикъ *съ первыхъ же шаговъ своихъ* въ чуждой ему области геометрическихъ и вообще математическихъ вопросовъ сталъ усваивать себѣ исключительно діалектическія и строго логическія точки зрѣнія на математическіе вопросы Сторонники этого взгляда требуютъ, чтобы ученикъ шелъ всегда по возможности, дедуктивнымъ путемъ. чтобы ему при самомъ вступленіи его въ область математическаго знанія было привито пониманіе разницы между аксіомой и теоремой, между теоремою, слѣдствіемъ и леммою, чтобы онъ сразу постигъ, какъ важны точность опредѣленій, строгость доказательствъ и систематическая послѣдовательность въ развитіи всѣхъ частностей даннаго ученія, и т п Сторонникамъ этого взгляда дороже всего исключительно логическія и діалектическія точки зрѣнія на *изложеніе* даннаго отдѣла учебнаго курса математики. Для нихъ образцомъ, поэтому. являются чаще всего „Начала" Евклида, которыя впрочемъ, нынѣ уже не могутъ, послѣ обнародованныхъ въ XIX вѣкѣ работъ по вопросамъ объ основахъ геометріи и ариѳметики, считаться безупречными даже съ діалектической точки зрѣнія

Психологическая точка зрѣнія.

Другіе, наоборотъ, считаютъ, что при *обученіи* математикѣ надо, въ продолженіе весьма значительнаго промежутка времени, опираться преимущественно на непосредственное усмотрѣсклонныхъ къ отвлеченному мышленію и къ дедуктивному методу, не много на свѣтѣ Эта склонность — привилегія лишь исключительныхъ натуръ Только тщательное и продолжительное воспитаніе въ этомъ направленіи, притомъ непремѣнно согласное съ психологическими требованіями всякаго воспитанія, можетъ привить каждому человѣку нѣкоторый (иногда, впрочемъ, лишь весьма незначительный) интересъ или вкусъ къ отвлеченному мышленію. Даже тѣ дѣти, которыя имѣютъ нѣкоторую склонность къ отвлеченному мышленію, не могутъ на первыхъ порахъ совершенно обойтись безъ необходимаго для нихъ запаса чувственныхъ воспріятій и опирающихся на нихъ представленій Паскаль, какъ говорятъ, еще въ дѣтскомъ возрастѣ самостоятельно открылъ первыя предложенія Евклидовыхъ „Началъ", но то былъ Паскаль Да и относительно этого геніальнаго человѣка нельзя сомнѣваться въ томъ, что онъ такъ же, какъ и всѣ люди на свѣтѣ, прежде чѣмъ сдѣлать приписываемое ему открытіе, предварительно запасся нужными для того чувственными воспріятіями и пространственными представленіями И запасъ этотъ имъ былъ сдѣланъ, конечно, благодаря его, необычайной въ дѣтскомъ возрастѣ, самодѣятельности на поприщѣ накопленія именно математическихъ представленій того или иного содержанія

Математика въ готовомъ видѣ.

Поэтому предлагать ученикамъ данный отдѣлъ математики въ готовомъ видѣ, — въ томъ видѣ, котораго онъ достигъ путемъ долгихъ и многихъ колебаній и вѣковой надъ нимъ работы со стороны людей науки и учителей, значитъ итти въ разрѣзъ съ основными требованіями обученія и воспитанія, какъ такихъ процессовъ, которые подчиняются законамъ психологіи и теоріи познанія То же относится къ такъ наз „систематическому" курсу геометріи Ему долженъ непремѣнно предшествовать тотъ курсъ, который я въ первомъ изданіи этой книги и въ нѣкоторыхъ друіихъ своихъ работахъ позволилъ себѣ назвать *основнымъ* курсомъ геометріи

Основной курсъ геометріи — отрасль естествознанія

Основной (онъ же—предварительный или приготовительный въ полномъ смыслѣ этого послѣдняго слова) курсъ геометріи долженъ и можетъ быть только тою отраслью *естествознанія*, въ которой болѣе, чѣмъ во всякой другой его отрасли, можно примѣнять измѣреніе и вычисленіе Важнѣйшую роль въ основномъ курсѣ геометріи должны играть именно опытъ и наблюденіе, а также планомѣрный экспериментъ —Въ дошкольной и внѣшколной жизни учащійся уже сдѣлалъ и постоянно дѣлаетъ много *наблюденій* надъ пространственными формами. Школа должна только направить его вниманіе на исправленіе и дополненіе этихъ наблюденій новыми. Съ помощью надлежащихъ задачъ ученикъ можетъ не только усвоить себѣ важный въ практическомъ отношеніи навыкъ въ употребленіи чертежныхъ инструментовъ, но и прійти къ мысли о необходимости доказательствъ и набрести (въ случаѣ, если задача преслѣдуетъ эту цѣль) на самый способъ доказательства нѣкоторой геометрической истины. Задачи надо понимать въ обширномъ смыслѣ этого слова: начертить сѣтку куба, составить изъ равныхъ между собою равностороннихъ треугольниковъ правильный шестиугольникъ, вырѣзать изъ бумаги квадратъ, — все это — задачи, наложить вырѣзанный изъ бумаги треугольникъ на другой, тоже вырѣзанный изъ бумаги или только начерченный — тоже задача, и т д Задачи въ этомъ смыслѣ слова, а не изложеніе и „*объясненія*“ учителя какъ бы послѣднія ни были совершенны, должны быть въ школѣ исходнымъ пунктомъ и двигательнымъ моментомъ всякой работы надъ математическими вопросами Таково было значеніе задачъ и въ самомъ процессѣ развитія математическихъ наукъ въ ихъ прошломъ Таково значеніе задачъ вообще въ прогрессѣ математическихъ знаній и въ настоящее время, и ленія, другая (книга для учащихся) — тѣ упражненія, которыя ученики должны и могутъ проработать болѣе самостоятельно, въ классѣ или на-дому. Такое раздѣленіе учебнаго матеріала чрезвычайно упорядочиваетъ и дѣлаетъ планомѣрною всю работу учителя и учениковъ

Особенности курса.

„Геометрія на задачахъ" содержитъ въ себѣ *полный* курсъ геометріи, отличающійся отъ практикующагося въ школѣ до настоящаго времени въ слѣдующихъ отношеніяхъ а) въ этомъ основномъ курсѣ господствуютъ не исключительно діалектическія точки зрѣнія, б) главное вниманіе въ немъ обращается на чувственныя пространственныя воспріятія, на непосредственное усмотрѣніе (т.-е на интуицію) и на ясныя геометрическія представленія, в) поэтому доказательства теоремъ появляются не съ первыхъ же шаговъ учащагося въ области геометрическихъ знаній, а по мѣрѣ возникновенія у учащихся истиннаго къ нимъ интереса, г) благодаря этому основному курсу, ученики могутъ пріобрѣсти совершенно сознательные навыки въ геометрическомъ черченіи при рѣшеніи посильныхъ геометрическихъ задачъ на построеніе, д) благодаря ему же, они должны выработать себѣ вполнѣ точныя геометрическія понятія, усвоить себѣ доказательства такихъ теоремъ, которыя относятся къ разряду не слишкомъ очевидныхъ истинъ, е) они могутъ добраться также и до нѣкоторыхъ плодотворныхъ геометрическихъ идей и до нѣкоторой потребности въ діалектической систематизаціи всего пріобрѣтеннаго ими геометрическаго знанія. Эта потребность, благодаря основному курсу, можетъ и должна возникнуть естественнымъ, а не искусственно навязываемымъ ученику путемъ

Книга и программы.

„Геометрія на задачахъ" можетъ при извѣстныхъ условіяхъ, оказаться полезной также при теперешнемъ строѣ программъ учебныхъ плановъ. Учитель можетъ въ ней найти планомѣрно расположенный рядъ такихъ упражненій, которыя могутъ оказаться полезными въ качествѣ предварительныхъ или попутныхъ при прохожденіи обычнаго курса геометріи Опытъ показываетъ, что подобныя предварительныя или попутныя упражненія являются могущественнымъ методическимъ подспорьемъ при прохожденіи курса геометріи по учебнику Въ низшихъ же учебныхъ заведеніяхъ, въ *профессіональныхъ школахъ*, на курсахъ для взрослыхъ основной курсъ геометріи можетъ иногда играть роль курса, единственно доступнаго или единственно нужнаго учащимся

Опредѣленія. Въ **„Геометріи на задачахъ“** опредѣленія геометрическихъ понятій часто строятся на способѣ возникновенія каждаго изъ этихъ понятій въ умѣ учениковъ, т.-е строятся генетически Поэтому каждому опредѣленію предшествуетъ задача или рядъ ихъ, изъ которыхъ учащійся убѣждается въ существованіи требующагося геометрическаго образа

Добавочныя статьи Вообще, по сравненію съ практикуемыми у насъ курсами, въ **„Геометріи на задачахъ“** есть добавленія напримѣръ, симметріи относительно прямой линіи отведено нѣкоторое мѣсто въ книгѣ для учителей, симметріи относительно точки и плоскости—въ книгѣ для учениковъ, нѣкоторое мѣсто отведено также рѣшенію треугольниковъ съ помощью нѣсколькихъ теоремъ изъ тригонометріи и съ помощью таблицъ натуральныхъ величинъ нѣкоторыхъ тригонометрическихъ чиселъ, § 15 посвященъ начаткамъ проекціоннаго черченія, въ книгѣ для учениковъ приведены нѣкоторыя задачи изъ области „новой“ (такъ наз синтетической или проективной) геометріи, и т п

Предѣлъ и безк малая величина. Сколько-нибудь полной *теоріи* предѣловъ и безконечно-малыхъ величинъ въ **„Геометріи на задачахъ“** не отведено опредѣленнаго мѣста Но съ этими идеями и методами ученики знакомятся при всякомъ удобномъ случаѣ, притомъ по мѣрѣ возможности прямой линіи пополамъ, б) съ проведеніемъ перпендикуляра къ прямой и къ плоскости, и в) съ раздѣленіемъ угла пополамъ.—Ознакомленіе учениковъ съ упомянутыми выше правилами „кавальерной" проекціи вносить чрезвычайно цѣнные элементы въ курсъ стереометріи и въ пониманіе ими чертежей Изображеніе тѣлъ и др. фигуръ въ этой проекціи не представляетъ даже для малолѣтнихъ какихъ-либо затрудненій и можетъ быть ими усвоено, съ громадной пользой также для развитія ихъ пространственнаго воображенія, въ очень короткій срокъ Удобства же этой проекціи заключаются, между прочимъ, въ томъ, что она, не содержа въ себѣ ничего неопредѣленнаго, въ то же время даетъ изображенія, весьма близкія къ перспективнымъ Полезно при этомъ, сверхъ того, держаться правилъ такъ называемой „стержневой перспективы".

Методическія замѣчанія

Въ книгѣ для учителей, сверхъ методическаго подбора задачъ и упражненій разнаго рода и многочисленныхъ чертежей, указывающихъ, на что учитель долженъ обратить вниманіе учениковъ, сдѣланы многочисленныя мотивированныя методическія указанія Цѣль послѣднихъ—облегчить работу учителей, особенно—начинающихъ или только впервые приступающихъ со своими учениками къ не исключительно діалектическому курсу геометріи

Книга для учениковъ

Въ книгѣ для учащихся приведены не только упражненія, непосредственно примыкающія къ матеріалу, разрабатываемому въ книгѣ для учителей въ ней немало матеріала для привлеченія учащихся къ болѣе самостоятельному (конечно, для нихъ посильному) труду.

Нумерація задачъ

Нумерація упражненій въ обѣихъ книгахъ „Геометрія на задачахъ" проведена такъ, что, напримѣръ, №№ 1, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 12 помѣщены въ книгѣ для учителей, а какъ бы недостающие въ ней нумера (№№ 2, 6, 7, 11)—въ книгѣ для учащихся. Какъ только данная задача или рядъ ихъ изъ книги для учителей проработаны учениками подъ *непосредственнымъ* руководствомъ учителя, недостающую задачу или рядъ ихъ можно предложить ученикамъ уже для болѣе *самостоятельной* работы въ классѣ или на-дому.

Нумерація чертежей

Чертежи не носятъ отдѣльной нумераціи, а отмѣчены словами. „Къ № 1151 а", „къ № 1167" и т. п и помѣщены либо на той же страницѣ, гдѣ помѣщена соотвѣтствующая задача, либо же на одной изъ ближайшихъ, предшествующихъ ей или слѣдующихъ за ней, страницъ. Если чертежъ помѣщенъ на одной изъ ближайшихъ страницъ, то—слѣдующимъ образомъ· если текстъ задачи напечатанъ на четной страницѣ, то соотвѣтствующій чертежъ—по возможности на одной изъ предшествующихъ четныхъ страницъ, если же текстъ напечатанъ на страницѣ нечетной, то чертежъ — на одной изъ ближайшихъ нечетныхъ страницъ или на предшествующей четной Это облегчаетъ и наборъ книги, и чтеніе ея —Такой способъ распредѣленія чертежей встрѣчается, впрочемъ, не только въ моихъ книгахъ

Выполненіе чертежей

Ученики выполняютъ на классной доскѣ (или у себя въ тетрадяхъ) требуемые чертежи непремѣнно съ помощью чертежныхъ инструментовъ Учитель можетъ выполнять иные рисунки отъ-руки, но со всей аккуратностью, которая требуется въ данномъ случаѣ Ученикамъ же такое выполненіе рисунковъ (и то только на классной доскѣ) можно разрѣшать въ очень рѣдкихъ случаяхъ, когда это почему-либо особенно цѣлесообразно Для лучшаго же выдѣленія тѣхъ или другихъ линій на чертежѣ можно и самому, и ученикамъ прибѣгать къ цвѣтнымъ мѣлкамъ и карандашамъ

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Прямая линія, уголъ и дуга окружности.

§ 1. Прямая линія.

1. Провести на доскѣ прямую линію съ помощью линейки и куска мѣла.—Провести въ тетради на первой ея страницѣ прямую линію съ помощью линейки и карандаша. Это—уже «чертежи».—Покажите «плоскость» чертежа!—Покажите не плоскую, а «кривую» поверхность въ классѣ.—Сверху надпишите задача 1,—мы всякій разъ будемъ записывать, которую задачу мы собираемся рѣшать и въ чемъ состоитъ задача.—Въ чемъ состояла задача,—кто помнитъ?—Пишите «провести прямую съ помощью линейки».

На этой ступени не можетъ быть никакихъ опредѣленій. Пусть учащіеся проводятъ ладонью по показываемой ими поверхности, если они хотятъ показать ее. Пусть они добираются на опытѣ до уразумѣнія того, что совершенно плоской поверхности нѣтъ въ природѣ и что, поэтому, нѣтъ въ природѣ и совершенной «плоскости», и пусть они до этой мысли и до этого сознанія добираются не сразу, а болѣе или менѣе постепенно. Пусть отыскиваютъ прямыя линіи и кривыя въ комнатѣ, въ своихъ книгахъ, тетрадяхъ, и т. д.—Если учитель привыкъ или непремѣнно желаетъ начинать съ «разсмотрѣнія» куба, прямоугольнаго параллелепипеда и т. п., то онъ, конечно, можетъ начать занятія и съ этого разсмотрѣнія, съ тѣмъ, однакоже, чтобы отъ этого разсмотрѣнія въ свое время все-таки перейти не къ систематическому курсу геометріи по учебнику, а къ рѣшенію сначала только чертежныхъ задачъ, подобныхъ тѣмъ, изъ которыхъ слагается основной генетическій курсъ, предлагаемый въ «Геометріи на задачахъ».—Многія начальныя упражненія можно пропустить, когда учитель имѣетъ дѣло съ ученикомъ или классомъ, не нуждающимся въ томъ или иномъ упражненіи Но это надо дѣлать съ осторожностью —Весьма полезна на этой ступени «лабораторная» работа

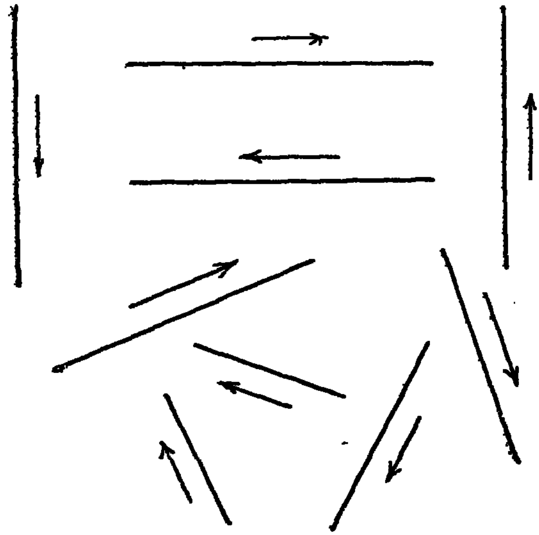
3. «Взять» въ плоскости чертежа точку (помельче) и изъ нея, съ помощью линейки, провести прямую линію, но потоньше —Говорятъ въ такихъ случаяхъ и короче изъ точки на плоскости провести въ этой плоскости «прямую» (пропускаютъ слово «линію») —Запишите задачу. Рѣшите ее

4 Взять точку въ плоскости чертежа и изъ нея въ той же плоскости провести нѣсколько прямыхъ («лучей»).—Слова «въ плоскости чертежа» мы будемъ иногда пропускать. чертить мы будемъ только въ плоскости чертежа

Каждую задачу надо, вмѣстѣ съ ея нумеромъ, продиктовать, при чемъ часто, если не всегда, надо убѣждаться въ томъ, поняли ли учащіеся смыслъ ея и вѣрно ли ее записали

5. Взять точку и *черезъ нее* провести прямую —Раздамъ вамъ бумажныя ленты, помощью бумажной ленты, которую каждый изъ васъ получилъ отъ меня, раздѣлить страницу тетради пополамъ вдоль, и пополамъ поперекъ

Для задачъ, рѣшаемыхъ учащимися на-дому, у нихъ должна быть отдѣльная тетрадь съ надписью. «домашняя». Ихъ надо научить записывать текстъ задачи съ нумеромъ ея и выполнять чертежи аккуратно въ тетради, на каждой изъ четырехъ одинаковыхъ частей страницы Все это учащіеся скоро себѣ усваиваютъ, и надо только позаботиться о томъ, чтобы они работой заинтересовались съ первыхъ же шаговъ.—Надо остерегаться отвлеченностей Не надо торопиться сообщать имъ, что *математическая линія* не имѣетъ толщины и ширины, что она представляетъ собою «протяженіе» объ одномъ «измѣреніи» и т п. Такія свѣдѣнія для учащихся на этой ступени совершенно безполезны Учащіеся настолько еще неразвиты, что иногда считаютъ прямою линіей только горизонтальную прямую, а о прямыхъ не горизонтальныхъ говорятъ, что онѣ—косыя, а не прямыя, что онѣ проведены криво и т. п Только упражненія и чертежи, а не опредѣленія, учатъ на первыхъ ступеняхъ



Къ № 5 (примѣч)

8. «Даны» двѣ точки Что это значитъ «даны»? (Онѣ поставлены, онѣ отмѣчены).—*Соединить ихъ прямою линіей и указать стрѣлкой то направленіе, въ которомъ прямая проведена* —Кто-то начертилъ прямую, ея направленіе не извѣстно Какое у ней можетъ быть направленіе?

8а. *Взять точку, изъ нея провести прямую въ одномъ направленіи и стрѣлкой обозначить это направленіе*

9. Провести изъ точки прямую въ какомъ-нибудь направленіи и отмѣтить стрѣлкой это направленіе —Прямая можетъ имѣть начало и конецъ или «концы», тогда она—«конечная» прямая —Концы конечной прямой—точки.—Разстояніе отъ одного конца прямой до другого ея конца можно «измѣрить», т.-е можно узнать, сколько въ этомъ разстояніи дюймовъ (или вершковъ, центиметровъ и т. п).

10. *Провести прямую «между двумя точками» и измѣрить ея длину центиметромъ.*

10а. Провести прямую *черезъ* двѣ точки.—Иногда говорятъ: «безконечная прямая» —Можно ли провести на самомъ дѣлѣ безконечную прямую линію, т-е прямую линію безъ концовъ, безъ начала и безъ конца? (Прямую линію безъ начала и безъ конца, безконечную прямую, невозможно провести)—Ея и представить себѣ нельзя —Вы себѣ можете представить, что *вы не знаете,* гдѣ начало прямой или ея конецъ, но это не значитъ, что вы представляете себѣ прямую безъ концовъ.

10б. Данъ «отрѣзокъ» прямой, иначе говоря, дана конечная прямая, изъ начала его провести какой-нибудь второй отрѣзокъ въ какомъ-нибудь другомъ (не прямо-противоположномъ) направленіи и конецъ второго отрѣзка соединить прямою съ концомъ перваго отрѣзка —Второй отрѣзокъ вмѣстѣ съ первымъ составляетъ «ломаную» линію. Почему она такъ называется?—Вотъ деревянная палочка сломаю ее!—Прямая часть ломаной линіи называется иногда звеномъ ломаной линіи Почему звеномъ?

10в. Даны двѣ точки, соединить ихъ одною прямою линіею и одною ломаною о двухъ звеньяхъ —Какой «путь» короче: прямой или ломаный?—Взять въ плоскости двѣ точки и соединить ихъ нѣсколькими такими ломаными, чтобы каждая состояла изъ двухъ звеньевъ.

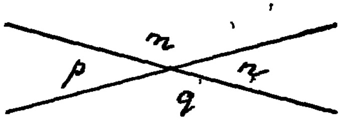
10г. Начертить ломаную о нѣсколькихъ звеньяхъ Начертить «зигзагъ».—Какой путь отъ одной точки до другой короче: прямой или ломаный?

Что существуютъ и кривыя линіи, можно и не трогать, если дѣти сами не трогаютъ этого вопроса. Ср № 68.

принадлежитъ только одной изъ данныхъ прямыхъ). — Сколько угловъ образовали эти прямыя, если считать, что уголъ образуется двумя прямыми, *выходящими* изъ одной точки? (Въ такомъ случаѣ прямыя образуютъ одинъ уголъ, обозначимъ его буквой а).—Двѣ безконечныя прямыя, изъ которыхъ каждая взята въ *одномъ* направлении, образуютъ *только одинъ* уголъ —А если направленія двухъ взаимно пересѣкающихся прямыхъ не извѣстны, тогда считаютъ, что эти двѣ прямыя образуютъ 4 угла.

Что двѣ безконечныя прямыя въ плоскости, изъ которыхъ каждая взята въ одномъ направлении, образуютъ только одинъ уголъ, ученики понимаютъ не сразу. Но добиться того, чтобы ученики образовали себѣ это представленіе, слѣдуетъ это полезно для выработки точнаго понятія объ углѣ въ связи съ направленіемъ его сторонъ, и неясность этого представленія можетъ вредно отозваться на высшихъ ступеняхъ обученія. Надо свести вопросъ къ углу *направленій*

57. Даны двѣ взаимно пересѣкающіяся прямыя, но направленія ихъ не извѣстны Сколько угловъ онѣ образуютъ? (Четыре).—Которые изъ нихъ смежные?—Которые — вертикальные? — У которыхъ только общая вершина?—У которыхъ общая сторона и общая вершина?



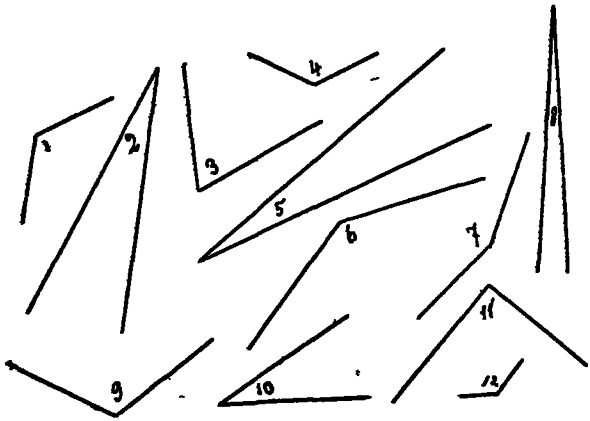
Къ № 57

Смыслъ слова «общая» для учащихся, вслѣдствіе того, что слово это рѣдко употребляется ими самими, не довольно ясенъ Его надо замѣнять словами: «одна и та же, т.-е общая», и ставить рядомъ эти слова до тѣхъ поръ, пока учащіеся не освоятся со значеніемъ слова «общій» вполнѣ Въ противномъ случаѣ учащіеся только заучать, когда имъ надо говорить «общая сторона» или «общая вершина», но не будутъ себѣ отдавать полнаго отчета въ истинномъ смыслѣ этихъ словъ, что вредно отзовется и впослѣдствіи.

59. ***«Построить» уголъ «на» прямой, данной въ плоскости, принявъ какую-нибудь данную точку ея за вершину угла***

59а. Какой изъ угловъ больше 1 или 2? 3 или 4? 4 или 5? 5 или 6?

Эти первыя попытки и упражненія въ сужденіи о величинѣ угла введены не столько для того, чтобы ученики научились по глазомѣру вѣрно оцѣнивать величину угловъ, сколько для слѣдующихъ двухъ цѣлей: а) благодаря этимъ упражненіямъ, въ сознаніи

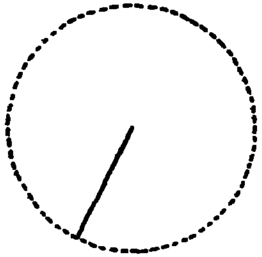


Къ № 59а.

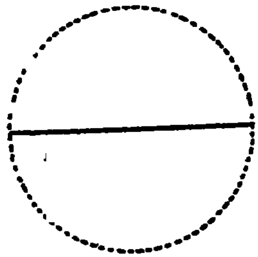
учениковъ образуется представленіе о томъ, что углы бываютъ больше и меньше, и б) ими закрѣпляется привычка не обращать вниманія на длину сторонъ, когда говорятъ объ углѣ, а только на такъ наз «взаимный наклонъ» его сторонъ

59б Изъ вершины даннаго угла провести прямую *внутри* этого угла —Уголъ раздѣлится на двѣ части, изъ нихъ каждая тоже представляетъ собою уголъ —Изъ какихъ двухъ угловъ состоитъ данный уголъ?—Можно ли сказать, какой уголъ больше данныи или тотъ, который составляетъ вопросъ о томъ, что у математической линіи нѣтъ ширины и толщины Конечно, особенно усердно наталкивать учениковъ на этотъ пунктъ, если они сами не выказываютъ интереса къ вопросу, не слѣдуетъ. Время для этого интереса наступитъ не позже, чѣмъ это для дѣла необходимо. На низшихъ ступеняхъ обученія это справедливо относительно всякихъ тонкостей

70 *Начертить кругъ, взять точку на окружности и соединить центръ его съ этой точкой.* Эта прямая называется *радіусомъ* круга или радіусомъ окружности —О кругѣ и объ окружности говорятъ, что они «начерчены» (или «описаны») этимъ радіусомъ «изъ данной точки, какъ изъ центра»



Къ № 70

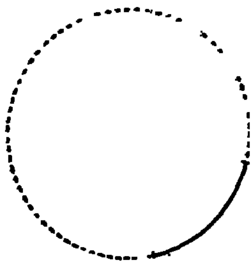


Къ № 72

71. Описать окружность, провести изъ ея центра одинъ радіусъ и продолжить его до вторичнаго пересѣченія этой прямой линіи съ окружностью

72. Начертить окружность и провести конечную прямую черезъ центръ, но такъ, чтобы концы прямой лежали на окружности круга —Будетъ ли эта прямая лежать внутри круга?—Эта прямая называется *діаметромъ круга* или поперечникомъ его —Почему радіусъ круга называется полупоперечникомъ его?—Что такое центръ окружности? (Это—точка, которая находится въ плоскости круга отъ всѣхъ точекъ его окружности на одномъ и томъ же разстояніи).

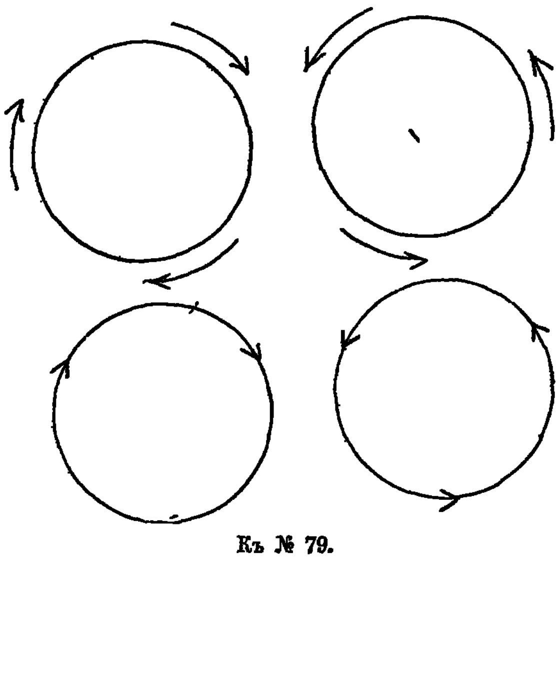
78 Начертить *часть* окружности круга, отмѣтить концы этой части и стрѣлкой указать, въ какомъ направленіи проведена эта «дуга» —Часть окружности круга называется *другою* окружности круга, или дугою окружности, или дугою круга



Къ № 78

79 Начертить всю окружность какого-нибудь круга и отдать себѣ отчетъ въ томъ, въ какомъ направленіи она начерчена въ направленіи движенія часовой стрѣлки или въ направленіи, обратномъ направленію движенія часовой стрѣлки?—Стрѣлкой отмѣтить направленіе проведенной окружности

80 Начертить какую-нибудь окружность въ направленіи движенія часовой стрѣлки и тѣмъ же радіусомъ изъ того же центра еще одну окружность въ направленіи,



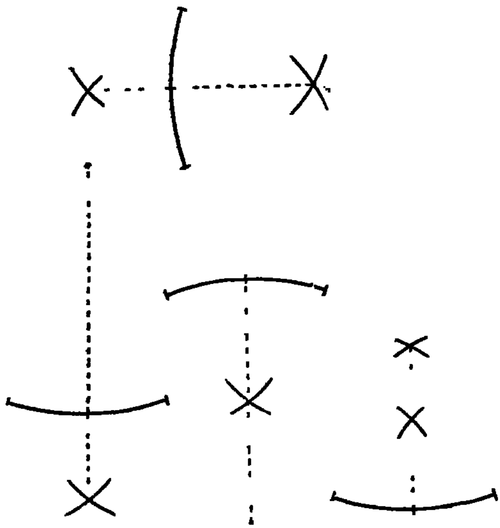
Къ № 79.

127. *Раздѣлить какую-нибудь дугу окружности пополамъ*

129. *Раздѣлить уголъ пополамъ*

131. *Раздѣлить полуокружность пополамъ*

133. *Начертить окружность, провести ея дiаметръ, раздѣлить одну изъ полученныхъ полуокружностей по-*

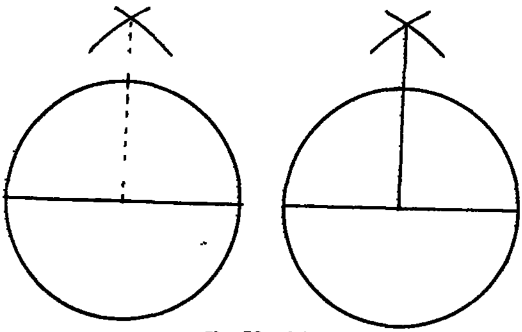


Къ № 127.

поламъ, соединить центръ съ серединой полуокружности —Какiе получились углы смежные или не смежные? Равны ли они между собою?—Каждый изъ нихъ называется «прямымъ» угломъ

133а. Начертить два смежныхъ прямыхъ угла

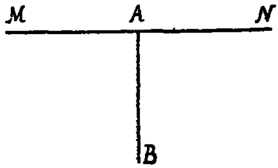
135. Начертить какiе-нибудь смежные углы — Нуженъ ли для этого циркуль? (Нѣтъ) —Начертить два смежныхъ угла, которые были бы равны между собою —Нуженъ ли для этого циркуль? (Нуженъ) —Когда уголъ называется



Къ № 135

прямымъ угломъ? (Когда уголъ равенъ углу, смежному съ нимъ, то онъ называется прямымъ угломъ)

137. Взять въ плоскости прямую, на ней точку и изъ этой точки провести такую прямую въ той же плоскости, чтобы она образовала съ первою прямою два *прямыхъ* угла.— Въ такомъ случаѣ говорятъ, что вторая прямая «перпендикулярна къ первой».—Говорятъ также, что вторая проведена «перпендикулярно» къ первой, или что вторая прямая— «перпендикуляръ» къ первой



Къ № 138 (прим)

138. *Изъ точки, взятой на прямой, лежащей въ данной плоскости, къ этой прямой провести перпендикуляръ въ той же плоскости* Въ такихъ случаяхъ говорятъ «возстановить» или «возстановить» перпендикуляръ къ данной прямой —Возстановить перпендикуляры изъ точекъ, взятыхъ на прямыхъ, находящихся въ данной плоскости и отличающихся своимъ положеніемъ въ этой плоскости.

Учащіеся не только вначалѣ, но и впослѣдствіи, не могутъ (чертежъ) примириться съ тѣмъ, что въ этомъ случаѣ можно сказать, что перпендикуляръ *возставленъ* изъ точки *A*, взятой на прямой, или опущенъ говорятъ, что эта окружность—окружность, касательная къ прямой, что прямая и окружность имѣютъ только одну общую точку—точку касанія

149. Начертить окружность, взять на ней двѣ точки и соединить ихъ прямою —Такая прямая называется *хордою круга,* или *хордою окружности,* или *хордою дуги* этой окружности, или просто хордою.—Если говорятъ о хордѣ дуги, то обыкновенно имѣютъ въ виду меньшую дугу.—Провести хорду черезъ центръ круга.—Какъ называется такая хорда? (Поперечникомъ или діаметромъ круга)

149а. Начертить кругъ и нѣсколько хордъ, въ томъ числѣ одинъ діаметръ —Какая изъ хордъ наибольшая, если и діаметръ считать хордою?—Почему радіусъ круга иногда называютъ полупоперечникомъ?

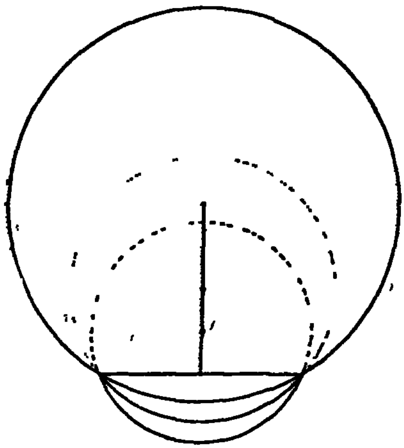
149б. Начертить кругъ и одну хорду —Слово «хорда» по-латыни означаетъ струну при этомъ дуга окружности представляетъ собою какъ бы лукъ, а хорда ея — тетиву лука (Вотъ почему о хордѣ говорятъ, что она «стягиваетъ» дугу, а о дугѣ — что она стягивается хордою).

151. Раздѣлить дугу пополамъ, провести ея хорду, соединить центръ круга съ серединою дуги.—Раздѣлилась ли хорда тоже пополамъ или не раздѣлилась?—Съ помощью циркуля удостовѣриться въ томъ, что хорда тоже раздѣлилась пополамъ —Какіе углы образовались при пересѣченіи хорды съ прямою, которая соединяетъ центръ круга съ серединою дуги?

Доказывать подобныя теоремы на этой ступени не слѣдуетъ онѣ настолько не внушаютъ, при вѣрномъ чертежѣ, никакихъ сомнѣній, что для учениковъ труднѣе постигнуть необходимость ихъ доказательства, чѣмъ справедливость теоремы У учащихся на этой ступени еще не можетъ быть вкуса къ доказательствамъ такой и ей подобныхъ теоремъ Доказательства такихъ теоремъ умѣстны на тѣхъ ступеняхъ, когда уже, появились теоремы, допускающія возможность сомнѣній, и когда, стало-быть, учащіеся могутъ постигнуть пользу и даже необходимость доказательствъ (Ср. № 315).

153. Начертить окружность и взять хорду, раздѣлить хорду пополамъ и изъ середины хорды возставить перпендикуляръ.—Лежитъ ли центръ круга на этомъ перпендикулярѣ? (Долженъ лежать)

153а. Взять конечную прямую, раздѣлить ее пополамъ, изъ этой середины возставить перпендикуляръ, продолжить его по обѣ стороны конечной прямой, на перпендикулярѣ взять рядъ точекъ, удостовѣриться въ томъ, находится ли *каждая точка на одинаковомъ* разстояніи отъ концовъ данной конечной прямой



Къ № 153б

153б. Взять двѣ точки на плоскости и провести окружность черезъ нихъ. — Сколько можно провести различныхъ окружностей черезъ двѣ точки на плоскости? (Сколько угодно) —Провести нѣсколько окружностей черезъ данныя двѣ точки — Чѣмъ онѣ отличаются одна отъ другой? (Своими радіусами, положеніемъ своихъ центровъ и своей кривизной) — Что у нихъ общаго? (У нихъ двѣ точки общія)

156. Дана окружность, центръ которой неизвѣстенъ, и хорда ея, изъ середины хорды возставленъ къ ней перпендикуляръ —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, лежитъ ли центръ круга на этомъ перпендикулярѣ или же центръ лежитъ внѣ этого перпендикуляра?

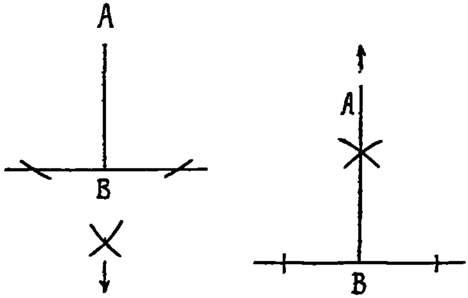
не нуждаются въ доказательствѣ Необходима, вслѣдствіе этого, медленная проработка намѣченнаго выше, и лучше совсѣмъ опускать подобныя упражненія, чѣмъ прорабатывать ихъ торопливо и формально Надо при этомъ помнить, что пріемъ такъ называемыхъ «засѣчекъ» представляетъ собою не что иное, какъ примитивный пріемъ примѣненія метода геометрическихъ мѣстъ Даже одна изъ самыхъ простыхъ задачъ элементарнаго курса, а именно перенесеніе, т.-е. откладываніе конечной прямой на данную неопредѣленную прямую, требуетъ уже нѣкотораго, хотя бы и не оформленнаго, пониманія того *факта,* что окружность есть геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, находящихся отъ данной на одномъ и томъ же разстояніи. Надо только избѣгать, изучая № 158, педантизма и не вызываемыхъ необходимостью терминологіи и опредѣленій Къ числу послѣднихъ принадлежитъ,—конечно, на первыхъ порахъ,—также опредѣленіе понятія о геометрическомъ мѣстѣ

158б. Черезъ три точки, лежащія на одной прямой, провести окружность (Это невозможно).

Не бѣда, что ученики еще не знаютъ *теоремъ* о параллельности перпендикуляровъ, проведенныхъ въ одной плоскости изъ точекъ, взятыхъ на прямой въ той же плоскости, или о внѣшнемъ углѣ, о трехъ наклонныхъ и т. п Непосредственное усмотрѣніе и здравый смыслъ учениковъ совершенно достаточны для того, чтобы они, «поискавъ» центръ требуемой окружности, убѣдились, что его нѣтъ, и что требуемая окружность невозможна.

158в. *Черезъ три точки плоскости, не лежащія на одной прямой, провести окружность* —Сколько окружностей можно провести черезъ три точки, не лежащія на одной прямой? (Ср. примѣчаніе къ № 158).

160. Взять прямую и внѣ ея точку, принять послѣднюю за центръ нѣкоторой окружности, которая пересѣкла бы прямую въ двухъ точкахъ, каждую изъ нихъ принять за центръ, однимъ и тѣмъ же радіусомъ сдѣлать засѣчку съ другой стороны прямой, соединить точку пересѣченія («засѣчку») съ данной точкою и разобраться въ томъ, перпендикулярна ли эта прямая къ данной или не перпендикулярна —Если говорятъ о перпендикулярѣ, опущенномъ изъ данной точки на данную прямую, то при этомъ имѣютъ въ виду только тотъ отрѣзокъ перпендикуляра, который заключенъ между данной точкой и точкой пересѣченія перпендикуляра съ данной прямой.—Если говорятъ о перпендикулярѣ, возставленномъ изъ данной точки прямой къ этой

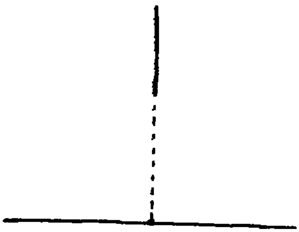


ъ № 160

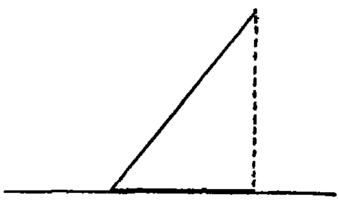
прямой, то при этомъ имѣютъ въ виду безконечный «лучъ», перпендикулярный къ данной прямой, начало котораго—въ данной точкѣ этой прямой, по ту или другую сторону прямой —Если же имѣютъ въ виду оба луча, проведенные изъ данной точки прямой перпендикулярно къ послѣдней и по обѣ стороны ея, то говорятъ о прямой, перпендикулярной къ данной прямой.

162. *Изъ точки, взятой внѣ данной прямой, «опустить» на нее перпендикуляръ,* т.-е провести изъ точки внѣ прямой перпендикуляръ къ этой прямой (Ср примѣч. къ № 138)

162а. Изъ точки, взятой внѣ прямой, опустить на эту прямую перпендикуляръ и ту же точку соединить прямою проекціи концовъ этого отрѣзка на данную прямую —Отрѣзокъ прямой, заключенный между проекціями концовъ отрѣзка на эту прямую, называется *проекціей* даннаго отрѣзка прямой на данную прямую.—Можетъ ли отрѣзокъ прямой имѣть такое направленіе, чтобы проекція его на другую прямую не была прямою? (Можетъ если отрѣзокъ прямой имѣетъ направленіе, перпендикулярное къ оси проекцій, тогда перпендикуляры, проведенные изъ концовъ отрѣзка на ось проекцій, сольются, и проекціи этихъ концовъ сольются, а проекція прямой обратится въ точку)



Къ № 162в



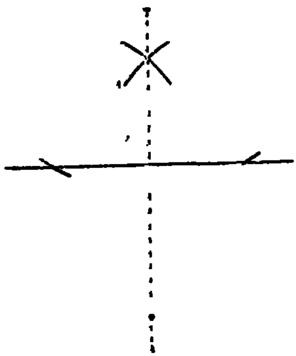
Къ № 162г

162г. Изъ точки, взятой внѣ прямой, провести перпендикуляръ и наклонную —Отрѣзокъ прямой, заключающійся между основаніемъ перпендикуляра и основаніемъ наклонной, называется проекціей данной наклонной на данную прямую.

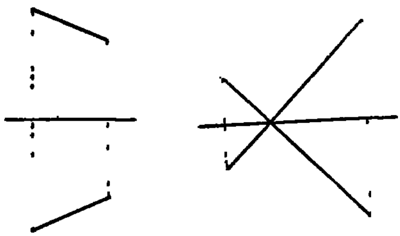
165. Взять прямую и внѣ ея точку, опустить изъ этой точки перпендикуляръ и продолжить его, отложить отъ его «основанія» на этомъ продолженіи отрѣзокъ, равный перпендикуляру.—Конецъ этого отрѣзка и данная точка «симметричны по отношенію къ данной прямой» —*Взять прямую, внѣ ея точку* и *найти точку, симметричную по отношенію къ этой прямой* —Если двѣ точки въ плоскости лежатъ симметрично по отношенію къ нѣкоторой прямой, лежащей въ той же плоскости, то эта прямая называется для этихъ двухъ точекъ *осью* ихъ симметріи.

167. Взять прямую и по одну ея сторону въ той же плоскости отрѣзокъ нѣкоторой другой прямой и построить еще одинъ отрѣзокъ прямой, симметричный данному.

Что прямая, симметричная другой прямой, представляетъ собою какъ бы зеркальное изображеніе этой послѣдней, при чемъ ось симметріи представляетъ собою какъ бы разрѣзъ зеркала, не надо скрывать отъ учениковъ Съ зеркаломъ ученики встрѣчаются съ ранняго дѣтства Для того, чтобы освоиться съ тѣмъ фактомъ, что разстояніе отражаемой точки отъ зеркала равно разстоянію ея отраженія отъ зеркала, ученику вовсе не надо дожидаться того момента, когда онъ будетъ въ одномъ изъ



Къ № 165



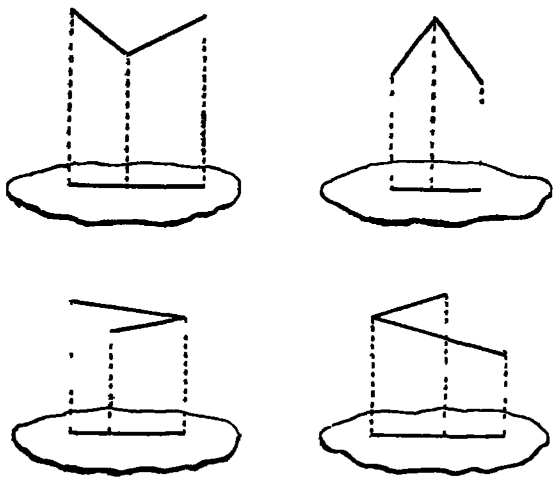
Къ № 167

высшихъ классовъ изучать оптику Такое выжиданіе способствуетъ только разрозненности тяготѣющихъ другъ къ другу элементовъ образованія.

169. Изъ точки, взятой внѣ прямой, опустить на эту прямую перпендикуляръ, затѣмъ взять на прямой двѣ точки, симметричныя по отношенію къ перпендикуляру, соединить первую точку съ этими двумя и отдать себѣ отчетъ въ томъ, одинаковы или не одинаковы обѣ симметричныя «наклонныя».

169a. Изъ точки, взятой внѣ прямой на плоскости, провести перпендикуляръ и двѣ равныя между собою наклонныя и отдать себѣ отчетъ въ томъ, равны ли между собою проекціи этихъ наклонныхъ на данную прямую.

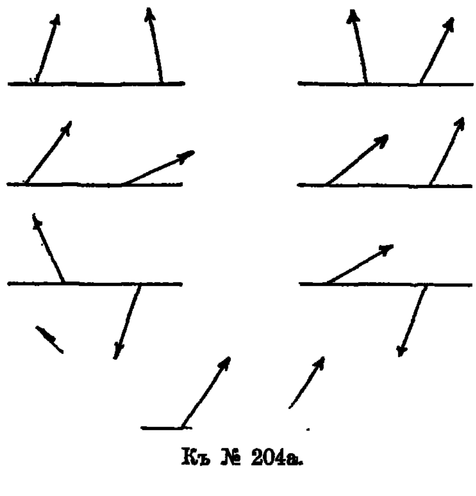
плоскости» или «параллельныя прямыя» не слѣдуетъ при элементарномъ образованіи неизбѣжно появленіе въ лексиконѣ ученической рѣчи новыхъ словъ и терминовъ, и бороться съ этимъ не только не слѣдуетъ, но и невозможно Препятствовать же появленію новыхъ словъ и представленій, хотя бы и не ясныхъ, не-



Къ № 195е

возможно и тоже не слѣдуетъ Часть задачи дальнѣйшаго образованія состоитъ именно въ томъ, чтобы за этими словами своевременно появлялось внутреннее содержаніе, соотвѣтствующее научнымъ и педагогическимъ требованіямъ даннаго момента всему свое время и свое мѣсто —Терминъ «ортогональная» проекція въ этомъ мѣстѣ курса не употребляется, такъ какъ о наклонномъ проектированіи говорить на этой ступени не цѣлесообразно прямою линіей —Какая получится фигура? (Треугольникъ, у котораго двѣ стороны продолжены) —Начертить острый или тупой уголъ, отъ вершины его отложить на сторонахъ его равные отрѣзки и соединить концы этихъ двухъ прямыхъ прямою линіей —Изъ точки на плоскости провести, не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ и не въ одномъ и томъ же направленіи, двѣ одинаковыя конечныя прямыя и соединить ихъ концы прямою.—Изъ точки на плоскости провести двѣ одинаковыя конечныя прямыя, образующія тупой уголъ, и соединить ихъ концы прямою.—Изъ точки на плоскости провести двѣ взаимно перпендикулярныя прямыя одинаковой длины и соединить ихъ концы прямою.—Если двѣ стороны одного и того же треугольника равны между собою, то такой треугольникъ называется *равнобедреннымъ*

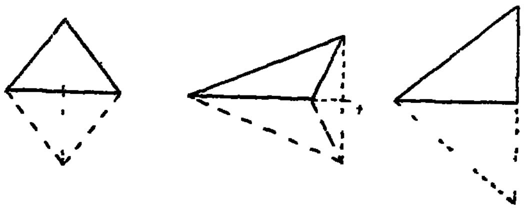
204a. Взять конечную прямую на плоскости и изъ концовъ ея провести двѣ прямыя до ихъ взаимнаго пересѣченія.—Всегда ли прямыя, которыя проведены изъ концовъ данной прямой, пересѣкутся?—Разсмотрѣть разные случаи (См примѣчаніе къ № 259)



Къ № 204a.

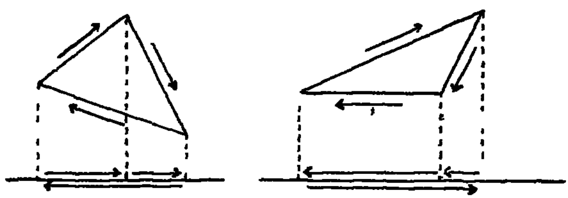
мыслимъ, напр , треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ прямой, а другой — тупой, но немыслимость эта ученикамъ можетъ быть доступна и раньше всего должна быть постигнута безъ доказательства.

225. Начертить какой-нибудь треугольникъ, принять одну его сторону за ось симметріи, найти точку, симметричную противолежащей вершинѣ, и соединить ее съ остальными двумя вершинами треугольника —Совмѣстимы ли эти треугольники?



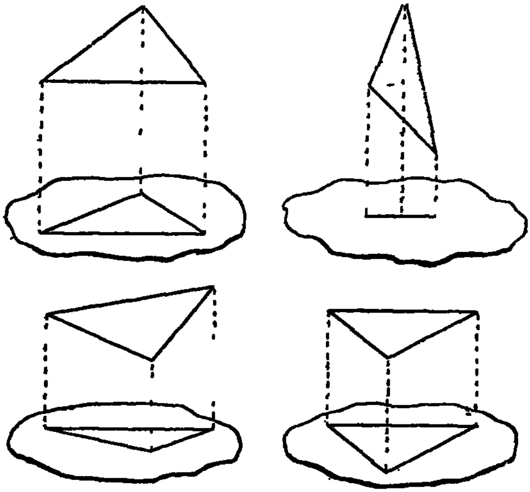
Къ № 225

***225а.** Начертить въ плоскости треугольникъ, провести въ той же плоскости прямую и отмѣтить на ней проекціи сторонъ этого треугольника на эту прямую —Если считать, что стороны треугольника имѣютъ направленія, указанныя стрѣлками, то считаютъ, что и проекція каждой стороны имѣетъ направленіе, «соотвѣтствующее» направленію ея пусть нѣкоторая точка движется по сторонѣ треугольника, начиная съ какой-либо вершины, проекція этой точки тоже будетъ двигаться.—Разобраться въ томъ, какъ именно.



Къ № 225а

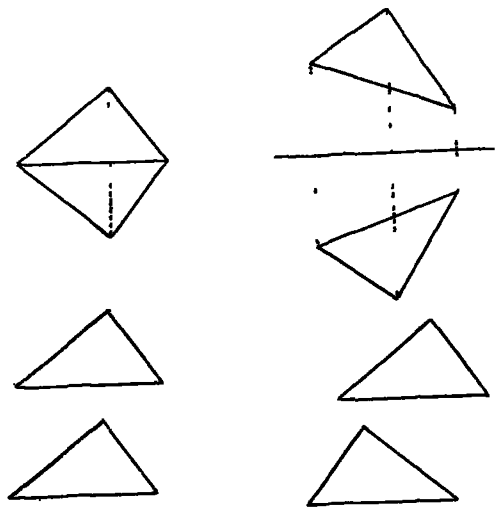
***225б.** Взять плоскость проекцій, и пусть внѣ этой плоскости взять треугольникъ. Найти его проекцію на плоскость проекцій —Это опять будетъ треугольникъ —Всегда ли проекція треугольника на плоскость проекцій — тоже треугольникъ? (Нѣтъ, не всегда если треугольникъ лежитъ въ проектирующей плоскости, то проекція этого треугольника прямая).



Къ № 225б

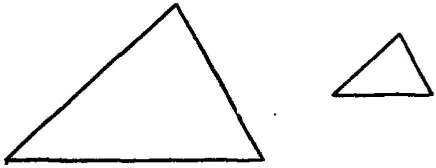
229. Взять конечную прямую, принять ея начало за центръ и изъ этого центра описать какимъ-нибудь радіусомъ окружность, далѣе принять конецъ прямой за центръ и описать тѣмъ же радіусомъ еще одну окружность, которая пересѣкала бы первую; наконецъ соединить прямыми линіями точки пересѣченія этихъ окружностей съ началомъ и концомъ взятой прямой —Сколько получится треугольниковъ? Какія стороны обоихъ треугольниковъ равны между собою?—Какая сторона «общая» у обоихъ треугольниковъ? Совмѣстимы ли эти треугольники?—Симметричны ли они? Какая прямая — ось ихъ симметріи?

233. Начертить какой-нибудь треугольникъ и построить другой треугольникъ, совмѣстимый съ первымъ, тремя способами· а) пользуясь которою-нибудь изъ сторонъ перваго треугольника, какъ осью симметріи, б) пользуясь какой-нибудь четвертою прямою, какъ осью симметріи, и в) пользуясь только сторонами перваго треугольника, циркулемъ и линейкой.



Къ № 233

233а. *Начертить* разносторонній треугольникъ и *нарисовать* еще одинъ, поменьше перваго, но на него совершенно похожій Сначала попробуйте это сдѣлать «на глазъ», т.-е именно нарисовать (а не начертить) такой треугольникъ, который во всемъ былъ бы похожъ на начерченный, но былъ бы меньше, чѣмъ онъ —Отдайте себѣ отчетъ въ томъ, что *необходимо* для того, чтобы второй треугольникъ былъ совершенно похожъ на первый (хотя и несовмѣстимъ съ нимъ) —Если углы будутъ совсѣмъ другіе, будетъ ли второй треугольникъ похожъ на первый*)?—Конечно, не будетъ.—*Начертите* два треугольника разной величины, но чтобы первый уголъ второго равнялся первому углу перваго, второй уголъ второго—второму углу перваго, а третій уголъ?. — Третій уголъ второго треугольника, пожалуй что, и самъ собою окажется равнымъ третьему углу второго треугольника — Похожи ли эти треугольники?



Къ № 233а

Это—первые шаги къ выработкѣ въ умѣ учениковъ представленія о такъ называемомъ «подобіи» двухъ *разностороннихъ* треугольниковъ (ср № 212а), и поэтому подобныхъ упражненій надо продѣлать довольно много Само собою разумѣется, что на этой ступени не можетъ быть еще рѣчи о пропорціональности сходственныхъ сторонъ двухъ подобныхъ треугольниковъ. Цѣль намѣченныхъ упражненій—заронить въ умахъ учениковъ ясное *представленіе* о возможности полнаго сходства двухъ треугольниковъ разной величины Это представленіе у учениковъ уже есть, но безъ сознанной связи его съ углами треугольниковъ Отдалять выработку этого представленія до полнаго усвоенія учениками ученія о параллельныхъ линіяхъ, о суммѣ угловъ треугольника и т д не представляется никакой надобности, особенно въ основномъ курсѣ. Возвращаться же къ нему надо при всякомъ удобномъ случаѣ—Ученики, помимо учителя и какого бы то ни было курса геометріи и *помимо школы, пріобрѣтаютъ* себѣ великое множество важныхъ представленій всякаго рода, въ томъ числѣ и геометрическаго содержанія Ученики, напр, помимо учителя стараются

*) Учитель на доскѣ строитъ уголъ, очевидно большій, чѣмъ каждый изъ угловъ перваго треугольника

чить, что катеты намъ извѣстны (даны) и что надо построить такой прямоугольный треугольникъ, котораго катеты порозні равнялись бы даннымъ прямымъ —*Построить прямоугольный треугольникъ по данному его катету и острому углу, прилежащему къ этому катету.*

268 Сторона прямоугольнаго треугольника, противолежащая прямому углу этого треугольника, называется *гипотенузою* этого треугольника —*Построить прямоугольный треугольникъ по его гипотенузѣ и одному изъ его катетовъ* —*Построить прямоугольный треугольникъ по его гипотенузѣ и острому его углу.*

268а. Сколько элементовъ опредѣляютъ всякій треугольникъ? (Три) —Всякіе ли три элемента опредѣляютъ треугольникъ? (Всякіе, если среди нихъ есть хоть одна сторона, въ случаѣ, если даны углы, то достаточно, чтобы данный одинъ уголъ былъ образованъ данными двумя сторонами, а если даны два угла, то достаточно, чтобы они прилежалі къ данной сторонѣ) —А сколько элементовъ опредѣляютъ прямоугольный треугольникъ? (Два, если въ числѣ нихъ есть хоть одна сторона, а если есть только одна сторона, то долженъ быть данъ также прилежащій къ ней острый уголъ) —Одинъ элементъ во всѣхъ прямоугольныхъ треугольникахъ одинъ и тотъ же, какой? (Прямой уголъ) — Какіе *вы знаете* признаки равенства прямоугольныхъ треугольниковъ? (Первый если оба катета одного прямоугольнаго треугольника порознь равны катетамъ другого, второй если катетъ и гипотенуза одного порознь равны катету и гипотенузѣ другого, третій если катетъ и прилежащій острый уголъ одного порознь равны катету и прилежащему острому углу другого, четвертый. если гипотенуза и острый уголъ одного порознь равны гипотенузѣ и острому углу другого).

Этотъ нумеръ требуетъ не бѣглой, а вполнѣ основательной и обстоятельной проработки, такъ какъ, нуть фигуру «лицевой» стороною внизъ и наложить на очерченное мѣсто —Совмѣстится ли вырѣзанная фигура съ очертанiемъ ея на доскѣ?—Всегда ли это такъ бываетъ?— Возьмемъ полъ-листа бумаги и вырѣжемъ изъ него не равнобедренный (а разносторонній) треугольникъ, наложимъ его на классную доску, обведемъ его стороны мѣломъ, перевернемъ его и положимъ его лицевой стороной на прежнее мѣсто —Закроетъ ли нашъ вырѣзанный треугольникъ всю ту фигуру, которую мы очертили на доскѣ?—Онъ закроетъ только часть своего очертанія на доскѣ, а другая часть бумажнаго треугольника ляжетъ внѣ очерченной фигуры.

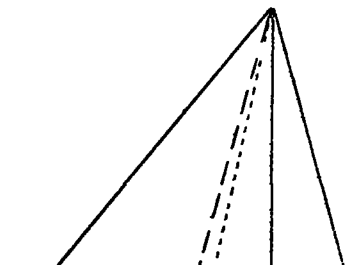
Эти грубые опыты дѣйствительнаго, а не мысленнаго только наложенія, конечно, должны предшествовать наложенiю мысленному Выводъ, который можно сдѣлать изъ наложенія перевернутаго равнобедреннаго треугольника на не перевернутый, — а именно, что углы, противолежащiе въ треугольникѣ равнымъ сторонамъ, равны между собою, — на этой ступени не столь важенъ, какъ самый фактъ *существованія* фигуры, которая совпадаетъ, и фигуры, которая не совпадаетъ съ самой собою, если ее предварительно повернуть вокругъ какой-нибудь стороны ея на 180^0. Эти первые опыты подготовляютъ учащихся къ методу мысленнаго наложенія, и безъ подобныхъ опытовъ наложеніе не представляетъ должнаго интереса для учащихся и часто опирается въ началѣ только на рядъ выученныхъ наизусть фразъ Ср №№ 297 и 297а.

281. Начертить разносторонній треугольникъ и раздѣлить каждый изъ его угловъ пополамъ —Прямая, дѣлящая уголъ треугольника пополамъ, называется *равнодѣлящей угла треугольника* (а также *биссекторомъ* или *биссектрисой* угла треугольника).—Сколько биссектрисъ у всякаго треугольника? (Три) —Построить разносторонній треугольникъ, провести равнодѣлящія его угловъ и его высоты — Замѣтьте. равнодѣлящія угловъ треугольника тоже взаимно пересѣкаются въ одной и той же точкѣ строить разносторонній треугольникъ и начертить его высоты, равнодѣлящія его угловъ и равнодѣлящія его сторонъ — Замѣтьте. равнодѣлящія сторонъ (медіаны) всякаго треугольника пересѣкаются въ одной точкѣ

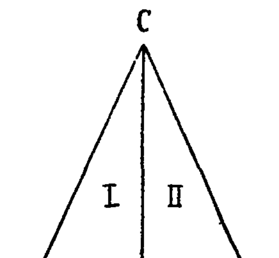
Полезно медіаны треугольника проводить мѣлкомъ или карандашомъ другого цвѣта; въ крайнемъ случаѣ можно пользоваться пунктирами разнаго рода

293. Построить какой-нибудь остроугольный равнобедренный треугольникъ и начертить его высоты, равнодѣлящія всѣхъ его угловъ и равнодѣлящія всѣхъ его сторонъ —То же сдѣлать съ прямоугольнымъ равнобедреннымъ треугольникомъ —То же сдѣлать съ тупоугольнымъ равнобедреннымъ треугольникомъ — Когда говорятъ о равнодѣлящей угла *равнобедреннаго* треугольника, то—какъ вы думаете,—какую равнодѣлящую имѣютъ въ виду? (Равнодѣлящую того угла, который образованъ одинаковыми сторонами этого равнобедреннаго треугольника) —А когда говорятъ о равнодѣлящей *основанія* равнобедреннаго треугольника, то что при этомъ разумѣютъ подъ основаніемъ?

297. Построить какой-нибудь равнобедренный треугольникъ, раздѣлить пополамъ тотъ его уголъ, который образованъ одинаковыми его сторонами, продолжить эту

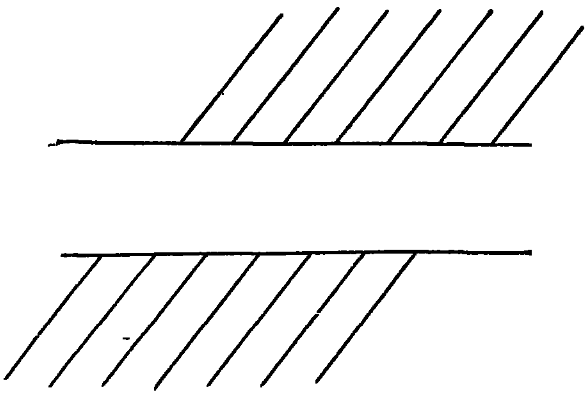


Къ № 289 (прим)



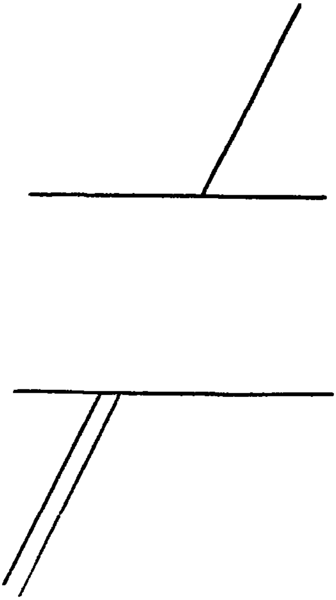
Къ № 297

никовъ) —Что эти два треугольника равны между собою (совмѣстимы)—очевидно —Но мало ли что кажется намъ очевиднымъ?—Кто бывалъ на полотнѣ желѣзной дороги, тотъ замѣчалъ, что кажется, будто рельсы какъ бы сходятся гдѣ-то вдали, а на самомъ дѣлѣ сходятся ли они или нѣтъ?—Аллея, если она довольно длинна, чѣмъ дальше, тѣмъ кажется все уже и уже А на самомъ дѣлѣ она развѣ дѣлается уже?—Когда быстро ѣдешь по желѣзной дорогѣ или на лодкѣ, то иногда кажется, будто поѣздъ или лодка стоятъ на мѣстѣ, а бѣжитъ земля, лѣсъ, луга —*Всегда* вѣрить тому, что видишь, не слѣдуетъ —Зрѣніе иногда и обманываетъ, — бываютъ и «обманы зрѣнія»



Къ № 315 (прим)

Если учитель найдетъ нужнымъ, онъ можетъ на этой ступени ознакомить дѣтей со сдѣланнымъ имъ на доскѣ, при участіи класса, чертежомъ, въ которомъ горизонтальныя линіи должны быть параллельны, — «не должны сходиться», — а послѣ проведенія пересѣкающихъ ихъ зигзаговъ кажутся сходящимися Когда это выяснится, ученикамъ можно указать, что «доказать» разсужденіемъ «истину» относительно треуголь-



Къ № 315 (прим)

скихъ фактовъ и истинъ, допускающихъ доказательства, и о систематическомъ ихъ расположеніи.

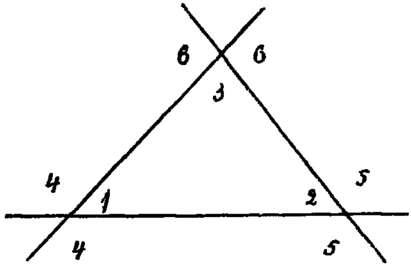
316. Вырѣжу изъ бумаги два совершенно одинаковыхъ куска «треугольной формы» (но чтобы получились разносторонніе треугольники), одинъ приколю къ доскѣ, а другой положу на столъ — Теперь я хочу на приколотый треугольникъ наложить другой такъ, чтобы онъ его совершенно покрылъ. — При этомъ могутъ быть два случая. 1) беру въ руки со стола фигуру и пробую ее наложить, и это мнѣ сразу удается, и 2) пробую наложить, и дѣло не выходитъ, и мнѣ надо прежде перевернуть эту фигуру въ воздухѣ

Все то, что учитель говоритъ, онъ долженъ дѣлать, притомъ такъ, чтобы всѣ ученики какъ бы участвовали въ томъ, что онъ дѣлаетъ, т-е внимательно слѣдили бы за этимъ Хорошо заготовить бумагу двустороннюю, цвѣтную или же нѣсколько заштриховать карандашомъ одну сторону куска бумаги предъ тѣмъ, какъ, сложивъ ее пополамъ, вырѣзывать изъ нея двѣ одинаковыя фигуры Это сдѣлаетъ болѣе очевиднымъ, что иногда необходимо, прежде чѣмъ совмѣщать двѣ фигуры, одну изъ нихъ повернуть вокругъ одной изъ ея сторонъ, какъ вокругъ оси Если ученики никогда не упражнялись въ истинномъ наложеніи одной фигуры на другую, то для нихъ, конечно, способъ доказательства такъ называемымъ наложеніемъ не можетъ который лежитъ противъ продолженной стороны —Перебрать треугольники разнаго вида

327. Построить треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ — прямой —Построить треугольникъ, въ которомъ одинъ изъ угловъ тупой —Построить ихъ внѣшніе углы.—Отдать себѣ отчетъ въ томъ, которые внѣшніе углы больше которыхъ внутреннихъ

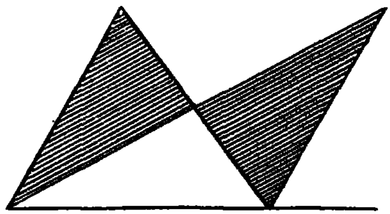
329. Отдать себѣ отчетъ въ томъ, есть ли среди внѣшнихъ угловъ треугольника равные между собою?—Перенумеровать равные между собою внѣшніе углы одинаковыми цифрами

329а. У каждаго ли треугольника есть внутренніе углы и внѣшніе? — У каждаго ли внѣшняго угла треугольника есть внутренній съ нимъ смежный, и два внутреннихъ, съ этимъ внѣшнимъ угломъ не смежные?—Можетъ ли быть такой треугольникъ, чтобы одинъ изъ его внѣшнихъ угловъ былъ равенъ смежному съ нимъ? (Можетъ въ прямоугольномъ треугольникѣ внѣшній уголъ, смежный съ прямымъ, равенъ этому прямому внутреннему углу) —Можетъ ли быть такой треугольникъ, чтобы одинъ изъ его внѣшнихъ угловъ былъ меньше смежнаго съ нимъ? (Можетъ въ тупоугольномъ треугольникѣ внѣшній уголъ, смежный съ тупымъ внутреннимъ угломъ треугольника, меньше этого внутренняго угла) —А внѣшній и внутренній, съ нимъ не смежный, могутъ ли быть равны между собою?—Отдать себѣ отчетъ въ этомъ на фигурахъ —А можетъ ли внѣшній уголъ треугольника быть меньше внутренняго, съ нимъ не смежнаго? Отдать



Къ № 329

***329д.** Отыскать въ томъ же чертежѣ два треугольника, которые равны между собою —Какіе мы знаемъ признаки равенства треугольниковъ?—Нѣтъ ли здѣсь такихъ двухъ треугольниковъ, о которыхъ мы знаемъ, что всѣ три стороны одного порознь равны между собою? (Нѣтъ) — Нѣтъ ли такихъ двухъ, о которыхъ мы знаемъ, что въ одномъ тр-кѣ сторона и два угла, къ ней прилежащихъ, порознь равны сторонѣ и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ, въ другомъ? (Нѣтъ) —Нѣтъ ли здѣсь такихъ треугольниковъ, въ которыхъ двѣ стороны одного порознь равны двумъ сторонамъ другого, и углы, заключенные между ними, тоже между собою равны? — Поищемъ ихъ — Такихъ треугольниковъ два $\triangle AEC$ и $\triangle BEF$ —Для большей наглядности эти два треугольника можно на чертежѣ обвести болѣе толстыми прямыми, можно также эти треугольники заштриховать —Треугольники эти равны между собою, потому что ст $CE =$ ст. EB «по раздѣленію»,—такъ говорятъ вмѣсто того, чтобы говорить «такъ какъ мы раздѣлили въ точкѣ E прямую CB пополамъ»,—вслѣдствіе чего CE и EB—равныя между собою половины прямой CE —Итакъ, ст $CE =$ ст EB «по раздѣленію», ст. $AE =$ ст. EF «по построенію» (что это значитъ?), а углы, между ними заключенные, равны, какъ вертикальные —Но что же слѣдуетъ изъ того, что $\triangle AEC = \triangle BEF$?— Изъ этого слѣдуетъ, что въ нихъ всѣ соотвѣтствующіе элементы равны между собою, т-е



Къ № 329д

$$\angle 1 = \angle 3, \angle 2 = \angle 4 \text{ и ст } AC = \text{ст } BF$$

Но для насъ не все это одинаково важно —Что для насъ важнѣе всего? (Важнѣе всего, что $\angle 1 = \angle 3$ и что, стало-быть, $\angle 1$ меньше, чѣмъ внѣшній уголъ CBD, такъ какъ $\angle 3$ есть часть этого внѣшняго угла).—Итакъ, внѣшній уголъ *нашего* треугольника больше какого внутренняго? (Онъ больше внутренняго, съ нимъ не смежнаго и противолежащаго продолженной сторонѣ)

Сверхъ указанныхъ въ одномъ изъ примѣчаній трудностей, здѣсь, очевидно, была еще одна трудность· опредѣлить, какой изъ всѣхъ выводовъ, которые можно сдѣлать на основаніи равенства такихъ-то треугольниковъ, самый важный Но эта работа все-таки несравненно доступнѣе, чѣмъ полное уясненіе себѣ учениками, почему справедливое относительно внѣшняго угла *одного,* начерченнаго нами, *особеннаго треугольника* справедливо также относительно всего остального, безчисленнаго, множества нами не начерченныхъ треугольниковъ —Вопросъ о томъ, почему внѣшній уголъ треугольника больше также другого внутренняго, съ нимъ не смежнаго и прилежащаго къ продолженной сторонѣ, уже не труденъ по сравненію съ намѣченными выше трудностями Это либо вытекаетъ непосредственно изъ доказаннаго, если продолжить не продолженную сторону внѣшняго угла и образовать $\angle 5$, который равенъ углу 4 и долженъ быть больше 1, либо же можетъ быть снова доказано относительно угла 5,—что́, впрочемъ, менѣе ясно Но все это справедливо лишь въ томъ случаѣ, если теорема сначала формулирована такъ «внѣшній уголъ треугольника больше внутренняго, съ нимъ не смежнаго и *противолежащаго* продолженной сторонѣ» —Теперь обратимся къ самому тонкому вопросу этой и всѣхъ математическихъ теоремъ, а именно при какихъ условіяхъ доказанное для одного случая можетъ считаться доказаннымъ для безчисленнаго множества случаевъ Этому посвящены для данной теоремы два №№ 329е и 329ж

344. Начертить въ плоскости прямую въ какомъ-нибудь направленіи, взять точку въ той же плоскости, но внѣ этой прямой, и изъ этой точки провести еще одну прямую, въ томъ же направленіи —Вы это сдѣлали по глазомѣру, и это не значитъ *«начертить»*: это скорѣе значитъ нарисовать, начертить «на-глазъ», хотя и съ помощью линейки, такую прямую — *Увѣренности* (полной) въ томъ, что обѣ прямыя проведены въ одномъ и томъ же направленіи, у насъ нѣтъ. можетъ-быть, онѣ сошлись бы гдѣ-нибудь, на разстояніи, скажемъ, десяти тысячъ верстъ, если бы ихъ можно было такъ далеко продолжить —Поступимъ такъ. проведемъ прямую въ какомъ-нибудь направленіи, возьмемъ внѣ ея точку, опустимъ изъ нея перпендикуляръ на нашу прямую —А потомъ? (А потомъ возставимъ изъ этой точки перпендикуляръ къ нашему перпендикуляру) —Нельзя ли провести этотъ второй перпендикуляръ въ томъ же направленіи, въ какомъ мы провели первую прямую?—Есть ли у насъ увѣренность, что направленія этихъ двухъ прямыхъ (данной и третьей) одинаковы? (Есть) —Должны ли эти прямыя находиться («лежать») въ одной и той же плоскости, если мы желаемъ, чтобы у нихъ было одно и то же направленіе? (Должны)

344а. Взять двѣ четвертушки бумаги, начертить на одной прямую линію, и на другой—тоже прямую —Одну четвертушку оставимъ на столѣ, а другую возьмемъ въ обѣ руки такъ, какъ берутъ книжку, когда въ ней хотятъ что-нибудь прочесть —Обратимъ вниманіе на направленія прямыхъ, начерченныхъ на нашихъ четвертушкахъ бумаги — Одно ли и то же направленіе у этихъ прямыхъ?—Положимъ бумажку на столъ нѣсколько иначе и опять обратимъ вниманіе на направленія прямыхъ —Покажите рукой направленія этихъ прямыхъ —Встрѣтятся ли наши прямыя когда-нибудь, если ихъ продолжить? (Онѣ не встрѣтятся, но не имѣютъ одного и того же направленія) —Возможны ли двѣ прямыя, которыя никогда не встрѣтятся, какъ бы мы ихъ далеко ни продолжали въ томъ или другомъ направлении? (Возможны не встрѣчаются, какъ бы далеко ихъ ни продолжали, двѣ прямыя въ одной и той же плоскости, если онѣ перпендикулярны къ одной и той же третьей прямой, не встрѣчаются и такія двѣ прямыя, которыхъ невозможно уложить въ одну и ту же плоскость).— Найти въ комнатѣ, на тетради, въ книгѣ прямыя, не встрѣчающіяся, какъ бы далеко ихъ ни продолжали

Время, затраченное на упражненія этого рода, окупается впослѣдствіи, когда приходится строить *точное* понятіе о параллельныхъ прямыхъ Чѣмъ ближе эти упражненія къ ежедневной жизни, тѣмъ плодотворнѣе результаты этихъ упражненій

346a. Представимъ себѣ двѣ прямыя не въ плоскости, а въ пространствѣ, но имѣющія одно и то же направленіе — Можно ли провести черезъ одну изъ нихъ какую-нибудь плоскость?—Станемъ вращать эту плоскость вокругъ этой прямой, какъ вокругъ оси, до тѣхъ поръ, пока вторая прямая не попадетъ на эту плоскость? — Случится ли это? (Случится) —Почему? (Потому что двѣ различныя прямыя, имѣющія одно и то же направленіе, должны лежать въ одной и той же плоскости) —Покажите такія прямыя въ классѣ и опишите положеніе этихъ воображаемыхъ плоскостей въ пространствѣ

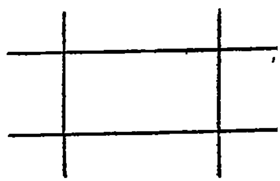
Ребро одного изъ двугранныхъ угловъ, образованныхъ плоскостью одной изъ стѣнъ съ плоскостью потолка, и ребро двуграннаго угла, образованнаго плоскостью пола съ плоскостью противоположной стѣны, взаимно параллельны, и т п Сближеніе геометрическихъ понятій учениковъ съ окружающими насъ геометрическими фактами полезно во многихъ отношеніяхъ

349. Начертить прямую, взять на ней двѣ точки, принять ихъ за вершины двухъ равныхъ угловъ, лежащихъ въ плоскости чертежа, и построить эти углы на данной взаимно-параллельныхъ прямыхъ лежитъ въ одной и той же плоскости — Въ противномъ случаѣ и рѣчи быть не можетъ о томъ, что эти двѣ прямыя взаимно-параллельны!

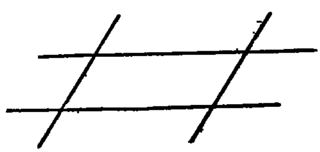
389в. Представьте себѣ, что у насъ есть «пучокъ» взаимно-параллельныхъ свѣтовыхъ лучей и что ихъ безчисленное множество — Представьте себѣ, что на пути этихъ лучей помѣщено непрозрачное тѣло, а за нимъ на нѣкоторомъ разстояніи—перпендикулярно къ лучамъ бѣлая стѣна («экранъ») — Что получится на стѣнѣ? (*Тѣнь* отъ этого тѣла) — Объ этой тѣни иногда говорятъ, что она «отбрасывается» тѣломъ, а иногда—что тѣло «проектируется» на стѣнѣ, и тѣнь есть проекція тѣла на стѣну (на экранъ).— Какъ «проектируется» шаръ на плоскость, если плоскость перпендикулярна къ пучку взаимно-параллельныхъ лучей? («Въ видѣ» круга)

389г. Начертите прямоугольный треугольникъ, пусть гипотенуза освѣщена пучкомъ свѣтовыхъ лучей, лежащихъ въ плоскости чертежа и идущихъ перпендикулярно къ прямой, на которой лежитъ катетъ — Какая прямая будетъ тѣнью, отбрасываемою гипотенузой на эту прямую?

389ж. Начертить прямую, взять внѣ ея точку, найти проекцію точки на эту прямую и отдать себѣ отчетъ въ томъ, можно ли смотрѣть на эту проекцію, какъ на нѣкоторую «тѣнь»?

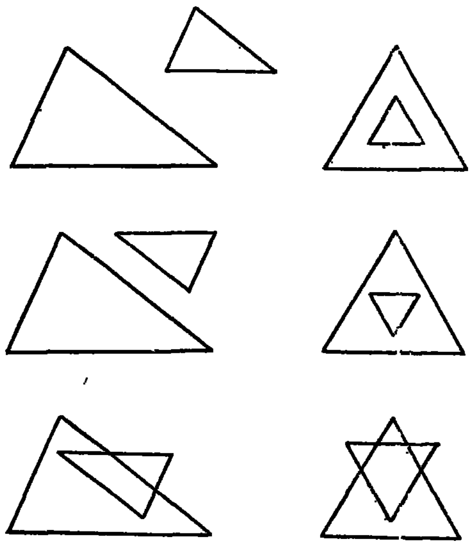


393. Двѣ взаимно-параллельныя прямыя пересѣчь другими двумя взаимно-параллельными прямыми, перенумеровать всѣ 16 угловъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе углы равны между собою



Къ № 393.

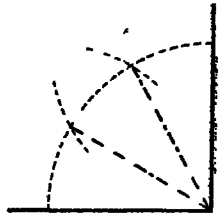
Наиболѣе ясно формулируется теорема, сюда относящаяся, слѣдующимъ образомъ если двѣ взаимно-параллельныя прямыя пересѣкаются двумя другими взаимно-параллельными прямыми, то или всѣ 16 угловъ равны между собою,—тогда они всѣ—прямые углы,—или же всѣ острые углы равны между собою, всѣ тупые углы равны между собою, и тогда сумма любого остраго угла съ любымъ тупымъ равна суммѣ двухъ прямыхъ угловъ Такая формулировка гораздо яснѣе той, при которой обращаютъ вниманіе на то, обращены ли углы «отверстіями» въ одну сторону, въ прямо-противоположныя или въ разныя стороны



Къ № 395а.

395. Начертить два такихъ угла съ разными вершинами, у которыхъ стороны имѣютъ порознь тѣ же направленія, что стороны другого.—Равны ли эти углы между собою?—Начертить такіе два угла съ разными вершинами, у которыхъ стороны имѣютъ порознь прямо-противоположныя направленія —Равны ли они между собою?

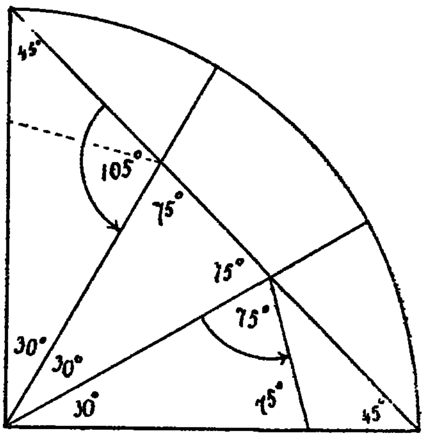
439а. *Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части* — Замѣтьте *не всякій уголъ возможно раздѣлить съ помощью линейки и циркуля на 3 одинаковыя части*



Къ № 439а.

Ученики, конечно, не сразу, а постепенно, послѣ частыхъ напоминаній, должны уразумѣть, что никакими треугольниками, параллельными прямыми и окружностями невозможно добиться того, чтобы *всякій* данный уголъ раздѣлился на три одинаковыя части Для начинающихъ кажется привлекательной мысль, что такъ называемую «трисекцію угла» можно осуществить раздѣленіемъ *хорды* его дуги на три одинаковыя части Для того, чтобы этой мысли пойти навстрѣчу и ее опровергнуть, можно рѣшить задачу слѣдующаго нумера.

***439б.** Раздѣлить прямой уголъ на три равныя части, провести хорду четверти окружности и отдать себѣ отчетъ въ томъ, раздѣлена ли и хорда на 3 равныя части (Не раздѣлена) — Отсюда слѣдуетъ, что хотя бы дуга угла и была раздѣлена на 3 равныя части но хорда ея не раздѣлится при этомъ на равныя 3 части

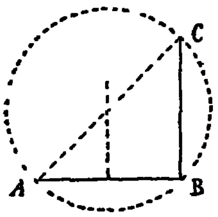


Къ № 439б

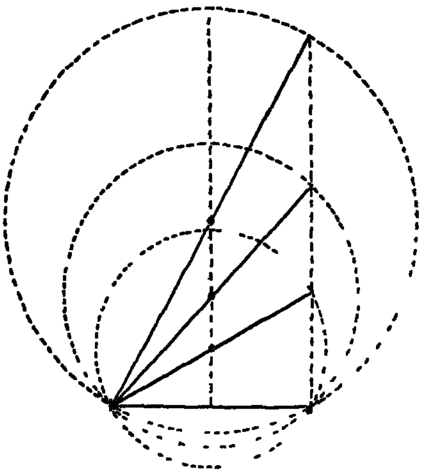
439в. Начертить два, разной величины, подобныхъ треугольника, у которыхъ два угла равны порознь даннымъ, далѣе, безъ помощи какого-либо изъ этихъ

439л. Начертить такой вписанный уголъ, чтобы дуга, заключенная между его сторонами, равнялась полуокружности, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, сколько въ ней градусовъ —О такомъ вписанномъ углѣ говорятъ, что онъ «опирается на діаметръ» —Замѣтьте *если вписанный уголъ опирается на діаметръ, то онъ прямой*

439к. Изъ конца конечной прямой линіи, возставить къ ней перпендикуляръ, не продолжая этой прямой —Для этого

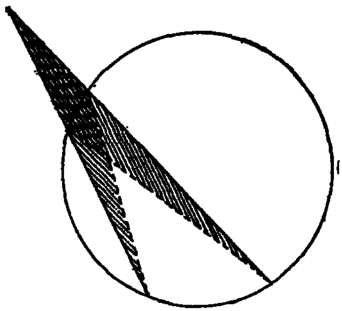


Къ № 439к


Къ № 439к (прим)

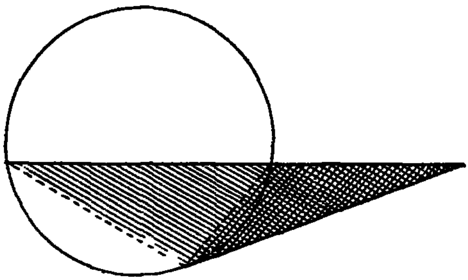
нужно сдѣлать такъ, чтобы эта прямая была хордой круга, а искомый перпендикуляръ—другою хордою —Гдѣ будетъ лежать центръ круга? (На перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины данной прямой) —Проведемъ изъ начала данной прямой еще прямую до пересѣченія съ перпендикуляромъ, возставленномъ изъ средины данной прямой, эту точку пересѣченія примемъ за центръ, а проведенную наклонную за радіусъ и начертимъ окружность —Тогда уголъ ABC будетъ прямымъ угломъ.

442а. Начертить окружность, взять внѣ круга точку, изъ нея провести двѣ сѣкущія этого круга, соединить ихъ точки пересѣченія прямыми и разобраться въ томъ, какіе треугольники подобны одинъ другому — Въ какіе треугольники сѣкущія входятъ цѣликомъ?



Къ № 442а

442б. Начертить окружность, провести въ какомъ-нибудь направленіи изъ какой-нибудь ея точки конечную касательную, изъ конца ея провести сѣкущую, соединить точку касанія съ точками пересѣченія сѣкущей съ окружностью и разобраться въ томъ, какіе треугольники подобны



Къ № 442б

442в. Начертить окружность, провести двѣ взаимно-параллельныя сѣкущія, разобраться въ томъ, какъ лежитъ центръ окружности по отношенію къ этимъ прямымъ (внѣ прямыхъ, на одной изъ нихъ или внутри), разобраться въ томъ, не равны ли какія-нибудь дуги между собою ваться этимъ понятіемъ для рѣшенія множества задачъ, допускающихъ графическое рѣшеніе, напр , на построеніе острыхъ угловъ по даннымъ ихъ синусамъ, и, наоборотъ, на приблизительное вычисленіе синуса даннаго остраго угла При наличности таблицы натуральныхъ величинъ синусовъ на рукахъ у учениковъ, можно даже «рѣшать» прямоугольные треугольники по достаточнымъ для этого рѣшенія даннымъ —Само собою разумѣется, что брать №443а для проработки полезно только въ томъ случаѣ, если учитель пожелаетъ и будетъ, по условіямъ обученія, въ состояніи использовать эту тригонометрическую величину для рѣшенія задачъ разнаго рода. Въ противномъ же случаѣ ученики будутъ лишены возможности освоиться съ этимъ понятіемъ, а потому оно имъ пользы не принесетъ

***443б.** Начертить не равносторонній остроугольный треугольникъ ABC, въ которомъ $AC=45$ мм , а сторона $AB=37$ миллиметрамъ, сторона же $BC=28$ мм — Который уголъ больше всѣхъ? (Уг B) —Во сколько разъ онъ больше, чѣмъ уг A? (Не знаемъ) —Не во столько же разъ, во сколько разъ сторона AC больше стороны BC!— Еще нѣсколько примѣровъ того же рода!

***443в.** Въ треугольникѣ ABC сторона $AB=37$ мм, сторона $AC=45$ мм и сторона $BC=28$ мм —Опустить изъ вершины A перпендикуляръ AD и обозначить длину его буквою h —Чему тогда равенъ синусъ угла B? (Отвлеченной дроби $\frac{h}{45}$) — Чему равенъ синусъ угла C? (Отвлеченной дроби $\frac{h}{37}$) — Во сколько разъ сторона AC больше, чѣмъ сторона AB? (Во столько разъ, во сколько разъ 45 больше 37).—А во сколько разъ синусъ угла B больше, чѣмъ синусъ угла C? (Во столько разъ, во сколько разъ $\frac{h}{37}$ больше, чѣмъ $\frac{h}{45}$) —Раздѣлимъ $\frac{h}{37}$ на $\frac{h}{45}$,—получимъ $\frac{45}{37}$.—

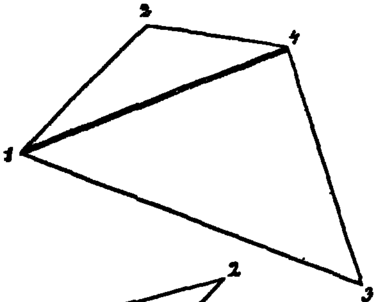
Что отсюда слѣдуетъ? (Отсюда слѣдуетъ, что въ остроугольномъ треугольникѣ каждая сторона во столько же разъ больше другой, во сколько разъ *синусъ* угла, противолежащаго первой сторонѣ, больше *синуса* угла, противолежащаго второй сторонѣ) —Разсмотрѣть катеты неравнобедреннаго прямоугольнаго треугольника въ томъ же смыслѣ —Разсмотрѣть обѣ меньшія стороны неравнобедреннаго тупоугольнаго треугольника —Въ нихъ тоже стороны пропорціональны синусамъ противолежащихъ угловъ

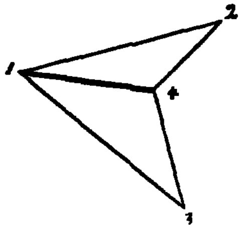
Эти упражненія только въ томъ случаѣ полезны, если они сопровождаются многими примѣрами. Въ такомъ случаѣ ученики пріобрѣтутъ ясное понятіе о томъ, что двѣ стороны треугольника пропорціональны противолежащимъ угламъ только въ томъ случаѣ, когда стороны равны между собою Разительнымъ примѣромъ *для иллюстраціи того положенія, что неравныя стороны* треугольника не пропорціональны противолежащимъ угламъ, можетъ служить треугольникъ, подлежащій разсмотрѣнію въ слѣдующемъ нумерѣ

***443г.** Начертить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, отдать себѣ отчетъ въ томъ а) во сколько разъ прямой уголъ больше каждаго изъ острыхъ? б) можетъ ли быть гипотенуза равна суммѣ обоихъ катетовъ? в) можетъ ли она быть вдвое больше каждаго изъ нихъ? и г) пропорціональны ли гипотенуза и катетъ противолежащимъ имъ угламъ?

§ 6. Четыреугольники и многоугольники, ихъ равенство и подобіе, сумма ихъ угловъ и длина ихъ периметровъ.

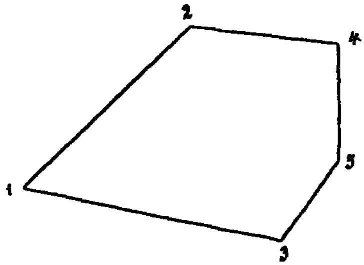
445. Взять въ плоскости три точки, не лежащія на одной прямой, соединить прямыми линіями первую точку со второй и третьей, внутри угла, образованнаго такимъ образомъ, взять четвертую точку, не лежащую на одной прямой со второю и съ третьею, и соединить ее прямыми линіями тоже со второй и съ третьей изъ взятыхъ нами точекъ —Получится *замкнутая прямолинейная фигура* Сколько въ ней вершинъ? — Сколько сторонъ? — Сколько угловъ? — Такая фигура называется *четыреугольникомъ* — Начертить прямую, равную суммѣ всѣхъ его сторонъ, т-е его *периметру* — Узнать длину периметра —Сложить углы четыреугольника — Соединить прямою первую вершину съ четвертою — Эта прямая называется *діагональю* четыреугольника — Найти сумму угловъ одного изъ полученныхъ треугольниковъ, а также сумму угловъ другого треугольника —Чему равна сумма всѣхъ угловъ этихъ двухъ треугольниковъ? (Суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ) —А чему равна сумма всѣхъ угловъ четыреугольника? (Тоже суммѣ 4-хъ прямыхъ угловъ) —Почему? (Потому что отъ сложенія угловъ обоихъ треугольниковъ получится сумма угловъ четыреугольника) — Сколькимъ градусамъ равна сумма четырехъ прямыхъ угловъ?





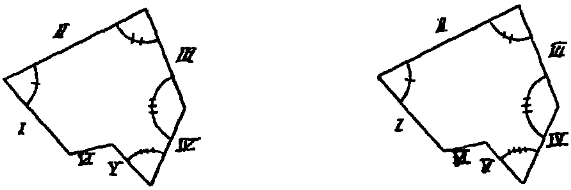
Къ № 445

446. Взять три точки, не лежащія на одной прямой, соединить прямыми линіями первую со второй и третьей, внутри угла, образованнаго этими прямыми, взять четвертую точку, не лежащую на одной прямой со второю и третьей;



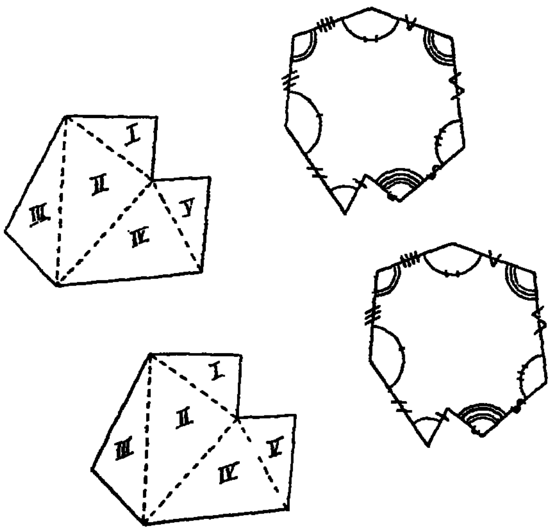
Къ № 446

461а. Начертить какой-нибудь многоугольникъ и равныи ему двумя способами а) разложивъ первый изъ нихъ



Къ № 461а

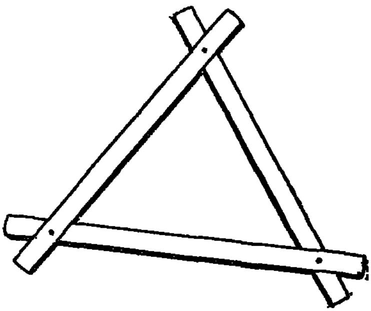
діагоналями на треугольники и б) не прибѣгая къ этимъ треугольникамъ



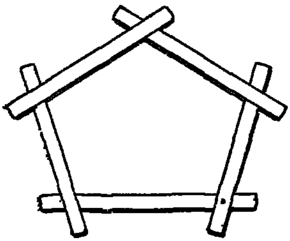
Къ № 461а

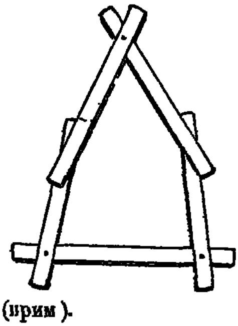
Въ первомъ случаѣ приходится постепенно пристраивать къ одному треугольнику другой, во второмъ строить стороны и на нихъ — углы — Треугольники лучше всего строить по тремъ сторонамъ — По сторонамъ и угламъ можно строить такъ, какъ указано соотвѣтственными сторонами, въ одномъ многоугольникѣ должны быть равны соотвѣтственнымъ угламъ другого

Полезно подольше остановиться на вопросахъ о подобiи треугольниковъ и о подобiи многоугольниковъ — Полезно прибѣгнуть къ моделямъ двухъ многоугольниковъ съ порознь пропорцiональными сторонами, но не подобныхъ одинъ другому Еще полезнѣе, если стороны скрѣплены шарнирами Можно такiя подвижныя модели приготовить и самому, а также предоставить ихъ изготовленiе ученикамъ — Для этого достаточно имѣть въ своемъ распоряженiи нѣсколько лентъ изъ крѣпкой бумаги или картона и достаточное количество кнопокъ — Если стороны многоугольниковъ съ соотвѣтственно пропорцiональными сторонами могутъ вращаться вокругъ своихъ вершинъ, то фигурѣ можно придать другую форму, при тѣхъ же сторонахъ Упражненiй этого рода надо учащимся продѣлать довольно много, дабы они убѣдились на опытѣ въ томъ, что вершины многоугольника могутъ, при данныхъ сторо-



Къ № 462а (прим).





Къ № 462а (прим).

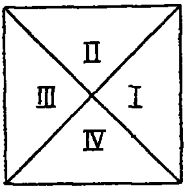
возможно) —Всѣ ли квадраты подобны одинъ другому? (Всѣ)

Результаты работы надъ относящеюся сюда терминологіей тогда удовлетворительны, если ученики умѣютъ характеризовать каждый параллелограммъ съ разныхъ точекъ зрѣнія (то какъ четыреугольникъ, то какъ параллелограммъ, обладающій извѣстными свойствами), если они на квадратъ умѣютъ смотрѣть и какъ на ромбъ, и какъ на прямоугольникъ, и т п

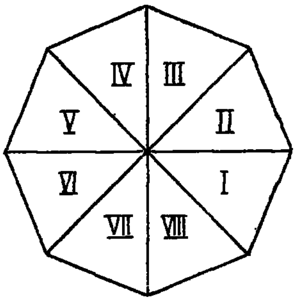
475. Начертить двѣ взаимно-параллельныя прямыя, отложить на каждой изъ нихъ одинаковые отрѣзки и соединить концы этихъ отрѣзковъ такими прямыми, которыя не пересѣкались бы на чертежѣ —*Какая это фигура?*

Если ученики уже интересуются процессомъ доказательства очевидныхъ фактовъ, то можно остановиться на доказательствѣ этой теоремы Но, остановившись на ней, надо уже твердо добиваться того, чтобы ученики поняли. а) что для доказательства этой теоремы нужны углы, б) что судить о равенствѣ угловъ можно изъ равенства треугольниковъ, в) что при доказательствѣ надо твердо знать, что дано и чего не дано, и г) что тѣми условіями, которыя даны, надо непремѣнно пользоваться,—въ противномъ случаѣ доказать теорему не удастся —Каждая изъ этихъ мыслей настолько тонка для учениковъ, еще не искушенныхъ въ логическихъ тонкостяхъ, и настолько нова, что сразу всѣ эти мысли не могутъ быть усвоены Въ этихъ случаяхъ отъ учителя требуются большое терпѣніе, настойчивость и снисходительность къ обычнымъ въ этихъ случаяхъ ошибкамъ сужденія учениковъ, и только при этихъ условіяхъ могутъ быть достигнуты надлежащіе результаты —Всѣ теоремы о параллелограммахъ являются очень подходящимъ матеріаломъ для пріученія учениковъ къ выше приведеннымъ мыслямъ На этой ступени весьма цѣлесообразно разсмотрѣніе и изготовленіе учащимися моделей параллелепипедовъ, куба, призмъ (изъ пластилины, картофеля, картона, палочекъ) опустивъ § 8, посвященный рѣшенію простѣйшихъ задачъ на построеніе треугольниковъ, перейти непосредственно къ нѣкоторымъ вопросамъ § 9, посвященнаго вопросамъ о вычисленіи площадей и поверхностей

494. Построить четыре равныхъ между собою равнобедренныхъ прямоугольныхъ треугольника, изъ нихъ сложить четыреугольную фигуру, сдѣлавши вершины прямыхъ угловъ общей вершиной треугольниковъ —Какая это фигура? (Четыреугольникъ) —Можно ли принять общую вершину составляющихъ ее треугольниковъ за центръ, а катеты ихъ за радіусъ окружности?—Пройдетъ ли эта окружность черезъ вершины образовавшагося квадрата?—Почему



Къ № 494



Къ № 494а

получившійся четыреугольникъ—квадратъ? —Всѣ ли квадраты другъ другу подобны?

***494а.** Построить равные между собою равнобедренные треугольники, въ которыхъ уголъ при вершинѣ равенъ 45^0; сложить изъ нихъ фигуру, сдѣлавъ эту вершину общею — Сколько такихъ треугольниковъ понадобится для того, чтобы углы при общей вершинѣ заполнили всѣ четыре прямыхъ угла, имѣющихъ ту же общую вершину?—Почему 8? (Потому что $45^0 \times 8 = 360^0$) —Какая получилась фигура? (Восьмиугольникъ,—сколько у ней сторонъ, столько же и угловъ, а сторонъ — 8)

495б. Начертить какой-нибудь правильный многоугольникъ съ помощью «составляющихъ» его равныхъ и равнобедренныхъ треугольниковъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, пройдетъ ли окружность черезъ всѣ его вершины, если общую вершину составляющихъ его треугольниковъ принять за центръ, а сторону одного изъ этихъ треугольниковъ, выходящую изъ общей вершины, принять за радіусъ ея?

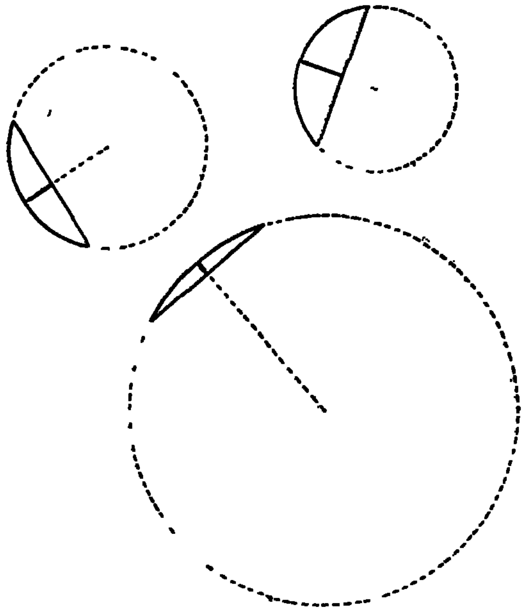
497. Начертить многоугольникъ, всѣ вершины котораго лежатъ на одной и той же окружности круга —Такой многоугольникъ называютъ многоугольникомъ, *вписаннымъ* въ этотъ кругъ, окружность этого круга—*описанной около* этого многоугольника, а центръ этого круга—центромъ многоугольника, радіусъ же описаннаго круга—также радіусомъ многоугольника —Можно ли около всякаго правильнаго многоугольника описать окружность круга?

Вопросы такъ называемаго паркетированія плоскости отнесены отчасти къ соотвѣтствующимъ нумерамъ книги для учениковъ

501. Начертить неравносторонній косоугольный параллелограммъ, провести одну его діагональ и составить изъ такихъ же двухъ треугольниковъ фигуру, симметричную относительно той же діагонали —Составить изъ нихъ другія двѣ симметричныя фигуры —Изъ какихъ частей состоятъ эти 4 фигуры разной формы? (Каждая—изъ такихъ двухъ частей, которыя порознь равны двумъ частямъ каждой изъ остальныхъ) —Форма у фигуръ разная —Что у нихъ одинаково? (Одинакова ихъ «величина») —Какъ называть такія фигуры? — Ихъ называютъ иногда *равновеликими* — 4 участка земли, по формѣ своей различные, но порознь подобные нашимъ фигурамъ, одинаковы по величинѣ своей, равновелики —О равновеликихъ фигурахъ говорятъ, что ихъ «площади» одинаковы женью? (Нѣтъ, нельзя, потому что аршинъ, футъ, сажень, вершокъ—длина нѣкоторыхъ прямыхъ линій, а окружность круга — линія кривая)

Это ученики должны понять прежде всего, и учителю не надо устранять вопросовъ о томъ, почему изогнутый аршинъ — уже не аршинъ и т п

508б. Нельзя ли измѣрить длину окружности дюймомъ? (Тоже нельзя) —Почему? (Потому что и дюймъ—длина нѣ-



Къ № 508б (прим)

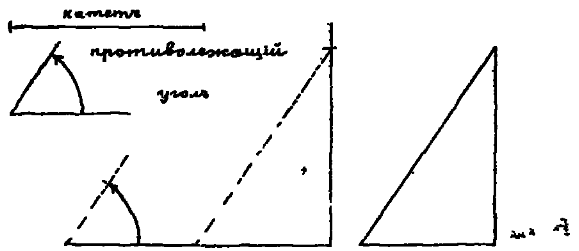
которой прямой, а всякая часть окружности круга—линія кривая, и всегда между хордой и дугой ея есть просвѣтъ) — Нельзя ли уложить по окружности круга нитку или проволоку такъ, чтобы конецъ ея слился съ началомъ? (Можно) — Нельзя ли распрямить эту проволоку (или нитку), а потомъ измѣрить ея длину? (Можно) —Какъ бы хорошо нитка ни длинѣ діаметра и къ другимъ вопросамъ этого ученія —Когда ученики выполнятъ относящіяся сюда вычисленія на дому, можно попросить учениковъ, наиболѣе аккуратно выполняющихъ чертежныя и вычислительныя работы, сообщить, какія у нихъ получились численныя значенія для отношенія приблизительной длины окружности круга къ длинѣ діаметра этой окружности. Опытъ показываетъ, что среднее ариѳметическое полученныхъ десятью-пятнадцатью учениками чиселъ весьма близко къ 3,14 —Нумера 508 и слѣдующіе въ книгѣ для учащихся приспособлены къ тому, чтобы ученики увидѣли, что отношеніе приблизительной длины окружности въ длинѣ діаметра, при аккуратныхъ чертежахъ, близко къ 3,14 Это число должно появляться часто, какъ и другое число $3^1/_7$, или $^{22}/_7$, въ качествѣ числа замѣчательнаго —Не будучи въ состояніи какъ слѣдуетъ обосновать постоянство этого отношенія, учитель можетъ поискать, вмѣстѣ съ учениками, объясненія этого явленія въ томъ, что всѣ круги подобны одинъ другому и что у нихъ, радіусы и діаметры представляютъ собою «сходственныя» линіи этихъ фигуръ, а ихъ центры — центры ихъ подобія И т п

508г. Замѣтьте длина всякой окружности больше длины своего діаметра слишкомъ въ 3,14 или почти въ $3^1/_7$ раза —Сдѣлаемъ подобное вычисленіе въ классѣ, на доскѣ — Начертите окружность круга, радіусъ котораго равенъ 7 дюймамъ —Съ помощью не класснаго (онъ слишкомъ «не тонокъ», «грубъ»), а съ помощью какого-нибудь изъ вашихъ циркулей (они тоже не особенно хороши, — вы вѣдь не особенно опытные чертежники, а только учащіеся) буду укладывать $^1/_4$ дюйма на этой окружности Когда ихъ уложу 16 разъ, ужъ буду укладывать всю дугу, которой длина теперь приблизительно 4 дюйма,—скорѣе будетъ,—и мы посмотримъ, что получится Уложу еще 2 раза, получу дугу уже длиною въ 12 дюймовъ —Эта дуга укладывается еще два раза въ окружности, итого 36 дюймовъ Остается кусокъ, числу сторонъ правильныхъ многоугольниковъ, вписанныхъ въ кругъ и описанныхъ около него?

Важно не *опредѣленіе* длины окружности какъ предѣла нѣкоторыхъ послѣдовательностей чиселъ Важно, чтобы учащіеся интуиціей постигли возможность вычисленія длины окружности съ любою степенью точности.

§ 8. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ на построеніе[1]).

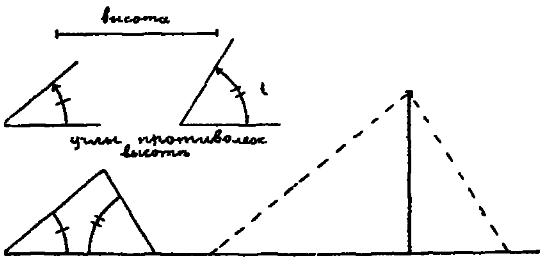
513. Построить прямоугольный треугольникъ по катету и углу, ему противолежащему —Начертимъ прежде всего какой уголъ? (Прямой) —А потомъ? (Потомъ отъ вершины



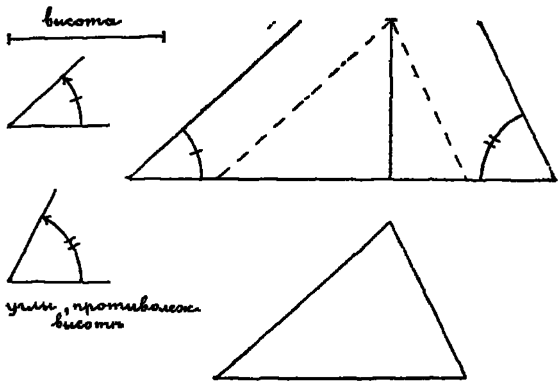
Къ № 513

прямого угла отложимъ на одной изъ его сторонъ данный катетъ) —А далѣе?—Далѣе одно изъ двухъ а) или найдемъ уголъ, его дополняющій до прямого, б) или на другой сторонѣ отложимъ у какой-нибудь точки острый уголъ, равный данному и изъ конца противолежащаго катета проведемъ прямую, параллельную сторонѣ построеннаго угла

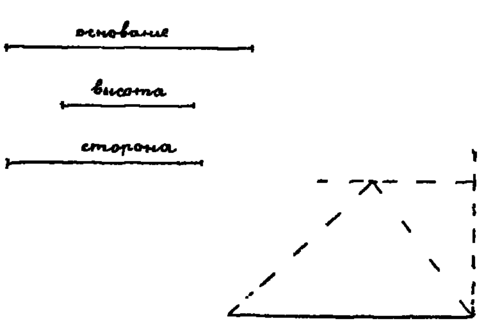
1) Въ виду значительной доступности ученія о площадяхъ прямолинейныхъ фигуръ и не только практическаго но и образовательнаго значенія этого ученія для учениковъ, учитель можетъ отложить проработку задачъ, предложенныхъ къ § 8 этой книги, на нѣкоторое время и перейти къ нѣкоторымъ нумерамъ § 9, т-е къ площадямъ Это ученіе можетъ быть частями также «вкрапливаемо» въ соотвѣтствующія мѣста предыдущихъ параграфовъ, соприкасающіяся съ вопросомъ о площади прямолинейной фигуры. Что удобнѣе и цѣлесообразнѣе для даннаго класса—можетъ разрѣшить только учитель



Къ № 517



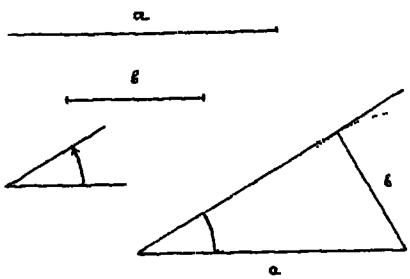
Къ № 517



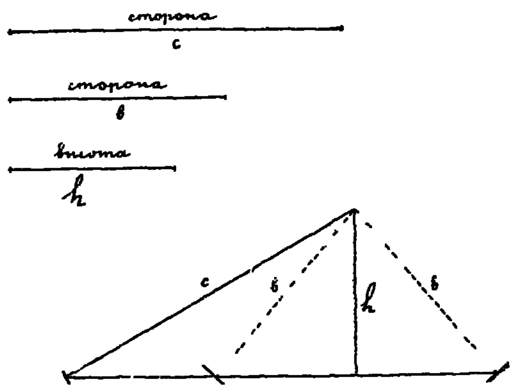
Къ № 523

Если ученики рѣшали задачи на тригонометрическія вычисленія, то условіе существованія этого треугольника, сводящееся къ тому, что въ немъ b a sin B. Въ противномъ случаѣ, это—задача чисто-чертежная

529б. Если потребуется построить треугольникъ по двумъ неравнымъ между собою сторонамъ и углу, противолежащему одной изъ нихъ, то какіе при этомъ возможны случаи?—(Возможны два случая 1) либо уголъ лежитъ противъ бо́льшей стороны, 2) либо онъ лежитъ противъ меньшей —1-й случай если данъ уголъ, противолежащій бо́льшей сторонѣ, то задача *всегда* разрѣшима, и рѣшеніе у ней есть только *одно;* 2-й случай если данъ уголъ, противолежащій меньшей сторонѣ, то задача *либо не разрѣшима,*—это имѣетъ мѣсто тогда, когда перпендикуляръ, опущенный



Къ № 529б



Къ № 529б

Ограничиваться обычнымъ опредѣленіемъ, по которому площадью фигуры называется величина той части плоскости, которую занимаетъ эта фигура, не цѣлесообразно. Что въ этомъ случаѣ называется величиною части плоскости, ученику неизвѣстно Терминъ этотъ получаетъ смыслъ только послѣ того, какъ установлена возможность и смыслъ сложенія двухъ площадей, и тѣмъ самымъ—возможность и смыслъ ихъ измѣренія

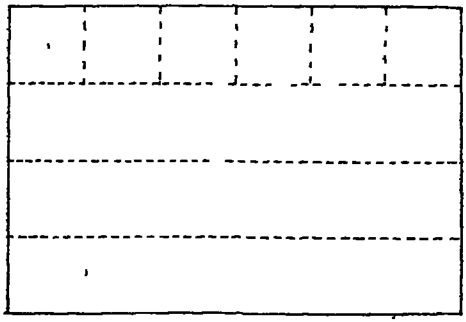
581б. Начертить два равныхъ многоугольника и такой третій, который состоялъ бы изъ такихъ двухъ частей, что первая изъ нихъ равна первому многоугольнику, а вторая—второму —О третьемъ многоугольникѣ говорятъ, что площадь его вдвое больше, чѣмъ площадь перваго или чѣмъ площадь второго

581в. Раздѣлить параллелограммъ одною діагональю на треугольники и отдать себѣ отчетъ въ томъ, во сколько разъ *площадь* параллелограмма больше *площади* каждаго изъ треугольниковъ, его составляющихъ

Только послѣ такихъ и подобныхъ упражненій для учениковъ наступаетъ возможность составить себѣ нѣкоторую идею о площади прямолинейной фигуры

582. Построить такой квадратъ, котораго сторона равнялась бы одному футу —Какъ называется *площадь* этого квадрата? (Квадратнымъ футомъ) —Раздѣлимъ этотъ квадратъ діагональю на два треугольника, можно ли изъ нихъ составить треугольникъ?—Какъ велика площадь этого треугольника? (Одинъ квадратный футъ) —Разрѣжемъ второй треугольникъ пополамъ перпендикуляромъ изъ вершины прямого угла и приставимъ одинъ треугольникъ къ другому, какъ показано на первомъ чертежѣ —Какъ велика площадь этой фигуры? (Одинъ квадратный футъ) —Разрѣзать еще одинъ (маленькій) треугольникъ пополамъ и половину его приставить къ остальной части фигуры, какъ на чертежѣ —Получится трапеція —Какъ велика ея площадь? (Одинъ квадратный футъ) вершковъ *содержится въ длинѣ высоты*, т-е на сколько полосъ или лентъ, шириною въ вершокъ, распадается нашъ прямоугольникъ

Надо предостерегать учащихся отъ обычныхъ и довольно вредныхъ привычекъ, дурно вліяющихъ на вѣрное уразумѣніе вопроса а) не надо говорить, что мы дѣлимъ прямоугольникъ на кв вершки, б) не дозволительно безъ оговорокъ писать 6 верш $\times$4 верш., в) не слѣдуетъ писать 6$\times$4=24 кв верш —Нецѣлесообразно также дѣлить весь прямоугольникъ на квадраты, а достаточно это сдѣлать только съ одной изъ



Къ № 587

«лентъ», или «полосъ», на которыя разбился весь прямоугольникъ Если на квадраты «разрѣзана» только одна полоса, то необходимость умноженія, кажется, очевиднѣе —Далѣе слѣдуетъ записывать и говорить только то, что дѣйствительно дѣлаемъ, а не то, что совершенно не вытекаетъ изъ существа вопроса Такъ, напр, записывая (какъ это дѣлается иногда во французскихъ учебникахъ) 6$\times$4, не слѣдуетъ запись произведенія сопровождать наименованіемъ единицъ мѣры.

591. Начертить квадратъ, котораго сторона содержитъ 7 вершковъ —Какъ велика его площадь? (7 кв вершк.$\times$7, т-е 49 кв. верш) —Сколько кв вершк въ кв. аршинѣ? (16 кв вершк $\times$16 = 256 кв вершк) —Сколько кв арш.

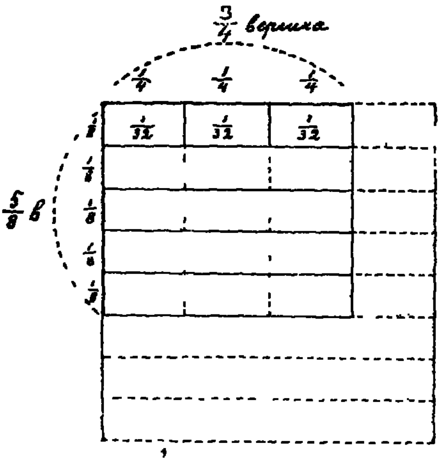
двухъ родовъ вообще Если въ этой книгѣ вычисленію объемовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ не отведено мѣста тотчасъ послѣ № 591, то только для того, чтобы не дѣлать какъ бы обязательнымъ такой порядокъ, который не всѣми учителями признается за обязательный —Что касается вопросовъ, предложенныхъ въ № 596, то рядомъ съ ними могутъ возникнуть также вопросы о такъ называемомъ максимумѣ и минимумѣ а) площади прямоугольника при постоянномъ периметрѣ и б) периметра прямоугольника при постоянной площади Конечно, исчерпать вопросъ этотъ на занимающей насъ ступени невозможно, но устранить его совсѣмъ — тоже невозможно Надо, въ случаѣ, если вопросы этого рода возникнутъ, ставить ихъ на почву по возможности конкретныхъ примѣровъ Возьмите случаи: пусть площадь прямоугольника 100 кв. дм Какія, *примѣрно*, у него могутъ быть основаніе, высота и периметръ?

Основ	высота	периметръ
10 дм	10 дм	40 дм
20 „	5 „	50 „
25 „	4 „	58 „
50 „	2 „	104 „

Очевидно, что съ возрастаніемъ, начиная съ 10-ти, числа единицъ длины въ основаніи, высота уменьшается, но периметръ *увеличивается*, съ убываніемъ же основанія, высота *увеличивается*, и *увеличивается* также периметръ Такимъ образомъ изъ всѣхъ прямоугольниковъ, у которыхъ одна и та же площадь въ 100 квадратныхъ дюймовъ, наименьшій периметръ у квадрата, котораго сторона равна 10-ти дюймамъ — Второй вопросъ относится до случая, когда данъ постоянный периметръ Пусть периметръ *равняется* 100 дюймамъ Какія у него, *примѣрно*, могутъ быть основаніе, высота и площадь?

Основ	*высота*	площадь
25 дм	25 дм	625 кв дм
20 „	30 „	600 „ „
10 „	40 „	400 „ „

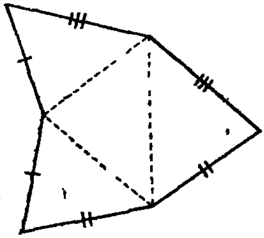
квадратъ, котораго сторона равна одному вершку. Въ одной лентѣ квадрата, которой основанiе равно одному вершку, а высота $^1/_8$ вершка, такихъ частей 4, а во всѣхъ восьми лентахъ 8×4, т.-е. 32 части, и каждая часть, такимъ образомъ, составляетъ $^1/_{32}$ долю квадрата. А потому площадь первоначально взятаго прямоугольника равна $^{15}/_{32}$ одного квадратнаго вершка.—Всматриваясь въ эту дробь, мы что же видимъ? (Мы видимъ, что $^{15}/_{32}$ кв. вершка получатся, если $^3/_4$ кв. в. помножить на $^5/_8$).—Выходитъ, что и тогда, когда длина основанiя и высоты—дробныя именованныя числа, площадь прямоугольника равна «основанiю, помноженному на высоту».



Къ № 601а

602. *Нарисовать* въ маломъ масштабѣ ящикъ, длина котораго 12 вершковъ, ширина 8 вершковъ, а высота 6 вершковъ.—Вычислить всю («полную») поверхность его.—Сколько «граней» у этого ящика?—«Тѣло», ограниченное прямолинейными фигурами (т.-е. многоугольниками), называется *многогранникомъ*.—Многогранникъ, ограниченный шестью прямоугольными параллелограммами, называется *прямоугольнымъ параллелепипедомъ*.—Указать въ комнатѣ прямоугольные параллелепипеды!—Сама комната?—Пеналъ для перьевъ?—Линейка?—Какой-нибудь ящикъ?—Стекло окошка?—Чѣмъ форма книжнаго шкапа отличается отъ формы прямоугольнаго параллелепипеда?

треугольникъ, а три боковыя грани тоже треугольники съ общей вершиной) — Кто можетъ нарисовать? — Пирамида, которую вы нарисовали, — треугольная пирамида въ ней не только боковыя грани — треугольники, но и основанie—треугольникъ.—Возьмемъ многоугольникъ и представимъ себѣ, что къ нему пристроены такie треугольники, что, согнувъ треугольники въ мѣстѣ слиянiя ихъ сторонъ со сторонами многоугольника вокругъ этихъ послѣднихъ, можно достигнуть того, чтобы ихъ вершины слились въ одной точкѣ и чтобы стороны каждаго треугольника слились съ двумя сторонами сосѣднихъ двухъ треугольниковъ —Тогда эти треугольники и многоугольникъ ограничатъ тѣло, нѣкоторый многогранникъ —Такой многогранникъ называется многоугольной пирамидой — Во всякой пирамидѣ боковыя грани — треугольники съ общей вершиной, и плоскости этихъ треугольниковъ образуютъ нѣкоторые углы съ плоскостью основанiя.

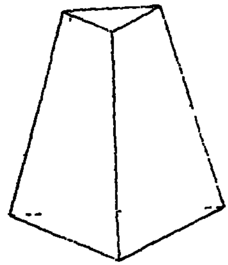


Къ № 628

Вычерчиванie *пирамидъ* по правиламъ косой проекцiи требуетъ слишкомъ много упражненiй и на этой ступени, вѣроятно, не вполнѣ умѣстно

628а. Пирамида, въ которой основанie *правильный* (т.-е равностороннiй) *треугольникъ*, или правильный четыреугольникъ (т.-е квадратъ), или вообще правильный многоугольникъ, а боковыя грани равнобедренные треугольники, называется *правильной* пирамидою — Нарисовать правильную пирамиду и начертить ея «сѣтку» —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ вычислить боковую поверхность такой пирамиды —Высота каждой изъ боковыхъ граней правильной пирамиды называется *апоѳемою* этой пирамиды —На чертежѣ сѣтки правильной пирамиды провести ея апоѳемы

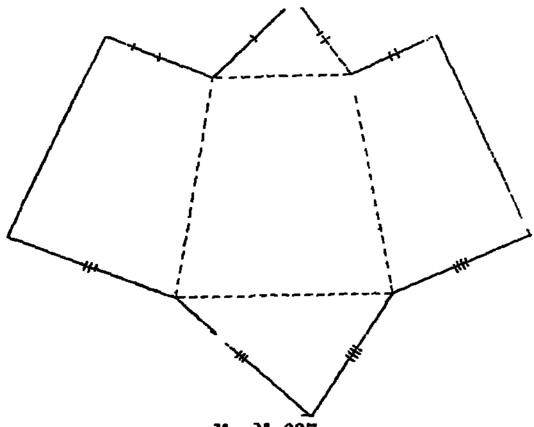
Если въ многогранникѣ два основанія — подобные многоугольники съ порознь параллельными сторонами, а боковыя ребра—прямыя линіи, соединяющія вершины соотвѣтственныхъ угловъ, то этотъ многогранникъ называется *усѣченной пирамидой*



Къ № 637

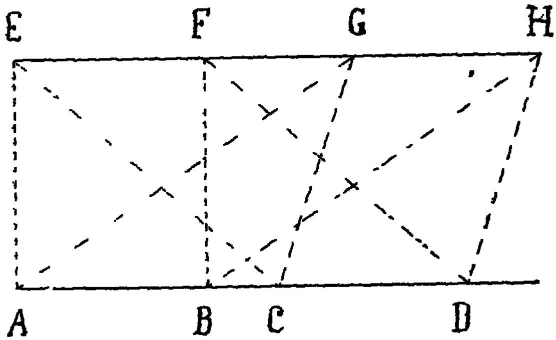
637. Нарисовать отдѣльно отъ «отсѣченной» части усѣченную пирамиду, начертить ея «сѣтку» и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ вычислить боковую поверхность пирамиды, усѣченной параллельно основанію (Надо сначала вычислить площадь каждой трапеціи)

То обстоятельство, что сѣченіе пирамиды, параллельное ея основанію, должно быть фигурою, подобною основанію, можно считать фактомъ, не подлежащимъ со-



Къ № 637

мнѣнію, пока мы — въ области основного курса Переходъ къ периметру средняго сѣченія впослѣдствіи понадобится, — а именно, когда рѣчь будетъ итти о поверхности усѣченнаго конуса и о поверхности шара —

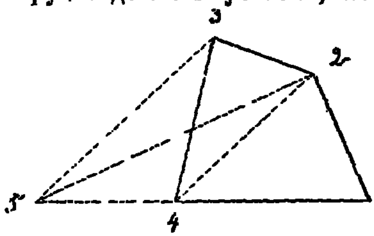


Къ № 651

имъ отрѣзковъ на другой и отдать себѣ отчетъ въ томъ, у какихъ параллелограммовъ одинаковыя площади

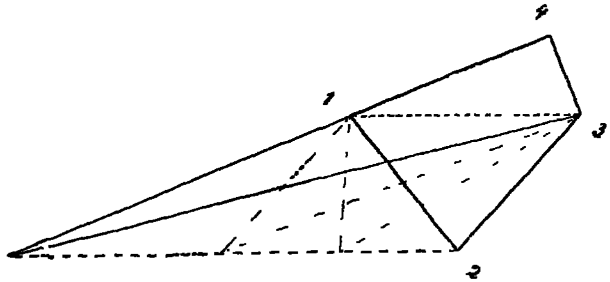
658. Построить треугольникъ, равновеликій данному четыреугольнику

Надо, предложивъ эту задачу, дать ученикамъ возможность самимъ, подъ руководствомъ учителя, изобрѣсти хоть какой-нибудь способъ рѣшенія этой задачи Ихъ можно выбрать два 1) сначала *вычислить*, чему равна площадь четыреугольника, затѣмъ — построить такой треугольникъ, у котораго основаніе и высота



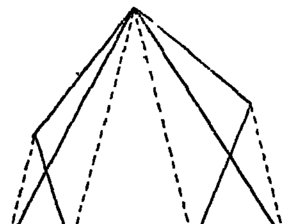
Къ № 658 (прим)

были бы выбраны такъ, чтобы произведеніе основанія на половину высоты равнялось величинѣ площади четыреугольника, и 2) замѣнить одинъ изъ треугольниковъ другимъ, котораго сторона была бы *продолженіемъ* стороны четыреугольника, а вершина лежала бы въ точкѣ пересѣченія этого продолженія съ прямой, проведенною изъ надлежащей вершины четыреугольника параллельно его діагонали —Чтобы навести учениковъ на это послѣднее рѣшеніе, надо начать съ того, что здѣсь требуется сдѣлать такъ, чтобы одинъ изъ угловъ, напр., первый, исчезъ, и треугольникъ 123 или 134 былъ замѣненъ другимъ, который, будучи приложенъ къ другому треугольнику, устранилъ бы первый уголъ. Что одинъ треугольникъ можно замѣ-



Къ № 658

нить другимъ не той же формы, если насъ занимаетъ только площадь, — ученики знаютъ. Вопросъ въ томъ, какимъ треугольникомъ надо замѣнить треугольникъ 123? Не треугольникомъ ли, стороны котораго проведены пунктирами? Но почемъ мы знаемъ, что площадь каждаго изъ нихъ равна пл. △ 123? Чтобы это было такъ, надо взять вершину новаго тр—ка такъ, чтобы она лежала вмѣстѣ съ вершиной 2 на одной и той же прямой, параллельной діагонали 13. Когда это понятно, надо провести эту параллельную прямую и задаться вопросомъ, гдѣ взять вершину. 5-я не годится

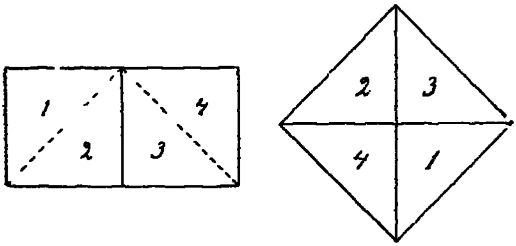


Къ № 663

потому, что уголъ у точки 1 не «уничтоженъ». Точка 6-я тоже не годится, и т. д. Пробы подобнаго рода должны продолжаться до тѣхъ поръ, пока ученики не догадаются, что надо сторону 41 продолжить и что точка пересѣченія этого продолженія прямой 41 съ прямою, параллельною діагонали, и будетъ вершиною искомаго треугольника, который вмѣстѣ съ нетронутымъ треугольникомъ 134 составитъ уже не четыреугольникъ, а нѣкоторый треугольникъ —Упражненій въ этомъ направленіи надо сдѣлать довольно много, пристраивая нужный треугольникъ по возможности съ разныхъ сторонъ

663. Превратить данный многоугольникъ въ равновеликій съ нимъ треугольникъ

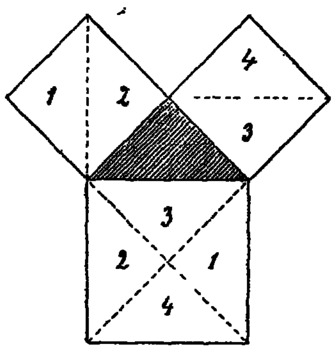
670. Сложить два одинаковыхъ квадрата, разрѣзать полученный прямоугольникъ на такія 4 части, чтобы изъ нихъ можно было составить квадратъ



Къ № 670

673. Построить квадратъ, площадь котораго равна суммѣ площадей двухъ равныхъ квадратовъ

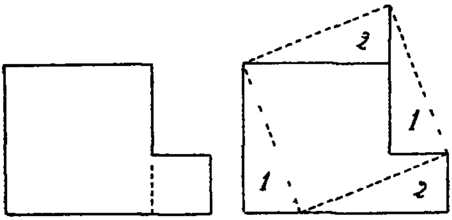
673a. Построить равнобедренный прямоугольный треугольникъ, на сторонахъ его построить по квадрату и отдать себѣ отчетъ въ томъ, площади какого квадрата равна сумма площадей квадратовъ, построенныхъ на катетахъ прямоугольнаго треугольника — Равны ли между собою квадраты, построенные на катетахъ? — Замѣтьте въ прямо-



Къ № 673a

угольномъ равнобедренномъ треугольникѣ квадраты, построенные на катетахъ, состоятъ изъ такихъ же четырехъ частей, изъ какихъ состоитъ квадратъ, построенный на гипотенузѣ

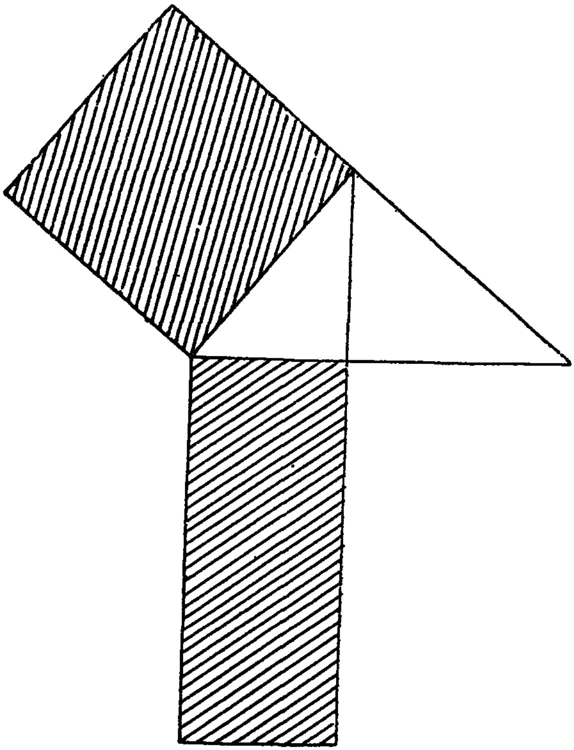
675. Сложить два различныхъ квадрата и разрѣзать полученную фигуру на такія три части, чтобы изъ нихъ можно было составить квадратъ —Для рѣшенія этой задачи



Къ № 675

поступаютъ слѣдующимъ образомъ. на продолженной сторонѣ бо́льшаго квадрата можно отложить сторону меньшаго квадрата, соединить конецъ отложеннаго отрѣзка съ концомъ той стороны бо́льшаго квадрата, которая перпендикулярна къ продолженной сторонѣ, и со свободной вершиной меньшаго квадрата, а полученные два треугольника параллельно перенести такъ, чтобы получился новый квадратъ, состоящій изъ тѣхъ же трехъ частей

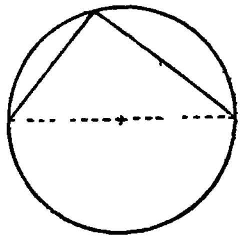
Это интересное упражненіе надо продѣлать каждому изъ учениковъ и надъ фигурами, вырѣзанными изъ бумаги, и на классной доскѣ, и въ своихъ классныхъ и въ домашнихъ тетрадяхъ Когда весь классъ усвоитъ себѣ этотъ способъ «квадратуры» суммы двухъ квадратовъ, надо достигнуть того, чтобы они не однимъ только непосредственнымъ наблюденіемъ и опытомъ, но и разсужденіями надъ величиною обоихъ катетовъ отрѣзываемыхъ треугольниковъ и надъ величинами острыхъ угловъ этихъ треугольниковъ, научились чертежамъ, на которыхъ подобные треугольники начерчены отдѣльно Для самостоятельныхъ работъ можно предлагать ученикамъ изготовленіе изъ бумаги моделей соотвѣтствующихъ фигуръ съ обозначеніями сторонъ и угловъ буквами



Къ №№ 689а и 689б

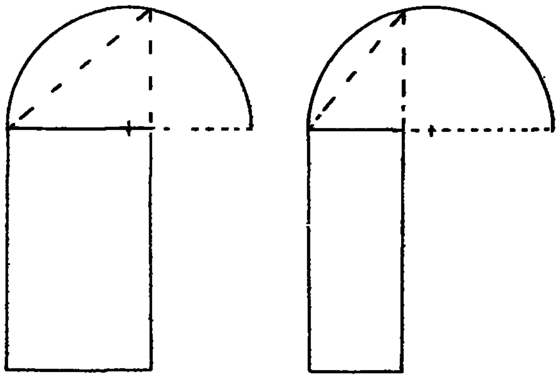
689б. Выполнить чертежъ, въ которомъ на катетѣ прямоугольнаго треугольника построенъ квадратъ, а на проекціи его на гипотенузу—прямоугольникъ, высота котораго равна гипотенузѣ

Задача подъ № 689 требуетъ, конечно, многократныхъ упражненій, такъ какъ она представляетъ собою, Для рѣшенія задачи взять еще точку въ той же плоскости, принять эту вторую точку за центръ, а разстояніе между ней и данной точкой за радіусъ, начертить окружность, провести такой діаметръ, чтобы данная точка лежала внѣ его, и соединить данную точку съ концами этого діаметра.—Проведенныя хорды взаимно-перпендикулярны, треугольникъ—прямоугольный



Къ № 697.

697а. Данъ прямоугольникъ (не равносторонній, т.-е. не квадратъ), построить квадратъ, ему равновеликій.—Эту



Къ № 697а

задачу можно рѣшить такъ: меньшая сторона прямоугольника продолжается, и на продолженіи откладывается такой отрѣзокъ, чтобы онъ вмѣстѣ съ меньшею стороною образовалъ прямую, равную бо́льшей, затѣмъ эта прямая дѣлится пополамъ, середина принимается за центръ полуокружности круга, а половина прямой за радіусъ, потомъ *бо́льшая* сторона прямоугольника продолжается внутрь полукруга до пересѣченія съ его полуокружностью, точка пересѣченія со-

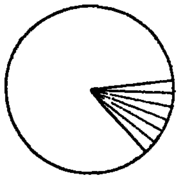
На этотъ вопросъ классъ не скоро приходитъ къ соглашенію одни учащіеся очень быстро соглашаются считать секторы треугольниками, другіе совсѣмъ не склонны съ этимъ согласиться Надо хорошенько обсудить съ классомъ этотъ вопросъ, такъ какъ и быстрое согласіе признать тожество сектора съ треугольникомъ, и несогласіе пойти навстрѣчу представленію о возможности приблизительнаго вычисленія площади «узкаго» сектора, какъ площади близкаго къ нему треугольника, не способствуютъ успѣху дальнѣйшей работы Выходъ изъ этого положенія только въ обсужденіи вопроса и въ привлеченіи класса къ посильному его рѣшенію

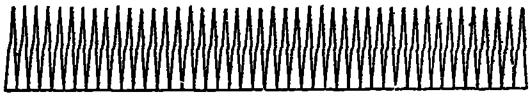
717б. Замѣтьте можно взять такіе «узкіе» секторы, что площадь каждаго изъ нихъ будетъ отличаться отъ площади соотвѣтствующаго ему равнобедреннаго треугольника, на такую малую площадь, которая меньше сколь угодно малой доли площади этого треугольника —Можно вписать въ кругъ такой правильный многоугольникъ, что площадь круга будетъ отличаться отъ площади этого многоугольника на такую площадь, которая меньше сколь угодно малой доли площади этого многоугольника

Безполезно это только *сказать* · ученики должны это вполнѣ себѣ уяснить и уразумѣть на столько, чтобы быть въ состояніи разсказать, въ чемъ дѣло

717в. Примемъ безъ доказательства, что площадь сектора съ достаточно малой дугой можно разсматривать *почти* какъ площадь равнобедреннаго треугольника, котораго основаніе равно хордѣ дуги, а остальныя двѣ стороны—радіусамъ — Чему приблизительно будетъ равна высота этого треугольника? (*Приблизительно* радіусу) —Какъ тогда можно будетъ разсматривать кругъ?—Приблизительно, какъ такой многоугольникъ съ весьма большимъ числомъ сторонъ, котораго вершины лежатъ на окружности круга —Какія мы при этомъ допускаемъ ошибки? (Мы допускаемъ, что дуга почти равна своей хордѣ, когда хорда очень мала, и что высота равнобедреннаго треугольника почти равна каждой изъ боковыхъ его сторонъ, когда основаніе очень мало) — Когда вы больше будете знать по математикѣ, то вы убѣдитесь, что эти двѣ ошибки не мѣшаютъ вѣрности дальнѣйшихъ разсужденій

717г. Начертить кругъ и раздѣлить его на возможно большое число одинаковыхъ секторовъ —Какъ велика площадь каждаго сектора? (Приблизительно длинѣ хорды его дуги,



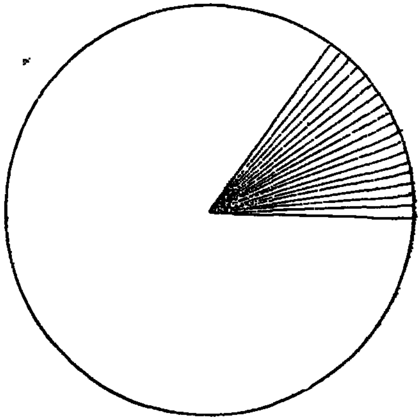


Къ № 717г

помноженной на половину его «высоты», т.-е. приблизительно на половину радиуса) —Начертить кругъ, раздѣлить его на возможно большое число секторовъ, принять ихъ дуги за хорды, отложить на лучѣ прямую, длина которой приблизительно равна длинѣ окружности и начертить рядышкомъ «треугольники», на которые разбился кругъ —Получится фигура на подобіе гребенки —Эту «гребенку» можно обратить въ параллелограммъ (почти прямоугольный) слѣдующимъ способомъ раздѣливъ всѣ боковыя стороны треугольниковъ пополамъ и проведя прямыя, которыя раздѣлятъ треугольники на двѣ части (одну трапецію и одинъ треугольникъ), изъ которыхъ можно составить параллелограммъ (почти прямоугольный) —Тогда мы получимъ вмѣсто «гребенки» параллелограммъ, въ которомъ длина основанія почти равна длинѣ *окружности*, а *высота равна* (*приблизительно*) *половинѣ* радіуса —Чему равна его площадь?

Эти разсужденія нужно провести нѣсколько разъ въ классѣ, и въ нихъ должны участвовать всѣ ученики настолько, чтобы быть въ состояніи вполнѣ сознательно разсказать весь процессъ этой ступени приблизительной квадратуры круга Надо при этомъ стремиться и къ тому, чтобы ученики отдавали себѣ отчетъ въ томъ, когда именно они допускаютъ не доказанныя утвержденія, и въ тѣхъ пунктахъ, когда они говорятъ о приблизительныхъ значеніяхъ величины

721. Приблизительно *вычислить* площадь круга, не измѣряя ничего, кромѣ его радіуса — Предположимъ, что мы измѣрили (точно) длину радіуса, и пусть въ немъ R ед длины. — Далѣе, *представимъ* себѣ,—стало-быть, не будемъ всего этого чертить и измѣрять, — что мы кругъ раздѣлили на чрезвычайно большое число одинаковыхъ секторовъ, пусть длина *хорды* перваго сектора равна c ед длины, длина *хорды* второго сектора тоже c ед длины и т д —Тогда



Къ № 721

пл 1-го сект. приблизит $= c$ кв ед $\times {}^1/_2 R$
пл 2-го „ „ $= c$ кв ед $\times {}^1/_2 R$
пл 3-го „ „ $= c$ кв ед $\times {}^1/_2 R$

и такъ далѣе до послѣдняго сектора включительно

пл посл сект. приблизит $= c$ кв ед $\times {}^1/_2 R$

Чему же, приблизительно, равна площадь всѣхъ *секторовъ?*—Площадь всѣхъ *секторовъ* равна приблизительно

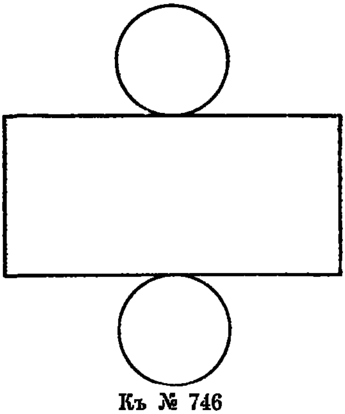
$$c \text{ кв ед} \times {}^1/_2 R + c \text{ кв ед} \times {}^1/_2 R + \quad + c \text{ кв. ед} \times {}^1/_2 R$$
$$\text{или } S \text{ кв ед} \times {}^1/_2 R,$$

гдѣ S—число единицъ длины, содержащихся въ длинѣ суммы всѣхъ хордъ нашихъ секторовъ —Чѣмъ секторовъ больше, тѣмъ число S ближе къ числу единицъ длины C, содержащемуся въ длинѣ окружности —Впослѣдствіи вы узнаете, что площадь круга *точно* равна площади прямоугольника, въ которомъ длина основанія равна длинѣ *окружности*, а высота равна половинѣ радіуса —Когда вы будете больше знать, то вы будете въ состояніи понять, почему площадь круга *точно равна* площади прямоугольника, котораго основаніе *точно равно* длинѣ окружности, а высота *точно равна* половинѣ радіуса —Но и тогда вы не будете въ состояніи (потому что это невозможно) съ помощью линейки и циркуля точно *построить* такой прямоугольникъ —А въ такомъ случаѣ невозможно также построить (съ помощью линейки и циркуля) и такого квадрата, котораго площадь точно равна площади круга. —*Квадратура круга невозможна!*

Около круга, конечно, можно также *описать* многоугольникъ, и этого скрывать отъ учащихся не для чего Но надо начинать съ описаннаго квадрата, съ описаннаго правильнаго восьмиугольника и т д,—затѣмъ все удваивать число сторонъ многоугольника до тѣхъ поръ, пока дальнѣйшее удвоеніе сдѣлается физически невозможнымъ Мысли, аналогичныя высказаннымъ въ № 717б, учащіеся тоже могутъ и должны себѣ усвоить

722. Составить нѣсколько задачъ и вычисленій слѣдующаго рода (съ подобными же записями)

длина *радіуса* круга = 14 вершк,
длина *діаметра* круга = 14 вершк × 2 = 28 вершк;



Къ № 746

746. Если «отдѣлить» отъ цилиндра оба его основанія, если, такъ сказать, «разрѣзать» его боковую поверхность по одной изъ его образующихъ и «распластать» эту поверхность на плоскости, то получатся: 2 одинаковыхъ круга и прямоугольникъ —Какъ велико основаніе этого прямоугольника? (Длина его равна длинѣ окружности основанія цилиндра) —Какъ велика высота прямоугольника? (Высота прямоугольника равна образующей цилиндра или высотѣ его) —Площадь этого прямоугольника тоже называется *боковою поверхностью* прямого цилиндра

Хотя «компланація» боковой поверхности прямого цилиндра, съ математической точки зрѣнія, соприкасается съ теоріей предѣловъ, но въ основномъ курсѣ вопросъ этотъ требуетъ меньшей затраты работы, чѣмъ вопросы о распрямленіи (ректификаціи) окружности круга и о квадратурѣ круга —Полулистъ бумаги, свернутый и склеенный «въ трубку», даетъ ученикамъ представленіе о вычисленіи боковой поверхности цилиндра, совершенно достаточное для этой ступени Недозволительность механическаго «расправленія» этой боковой поверхности—для учениковъ иногда слишкомъ тонкій вопросъ, не всегда умѣстный на этой ступени. Но умалчивать объ этомъ не слѣдуетъ Ср № 508е.

747. *Вычислить* боковую поверхность прямого цилиндра, въ которомъ длина образующей 8 вершковъ, а длина радіуса основанія 5 вершковъ —Еще примѣры.—Замѣтьте: *боковая поверхность прямого цилиндра равна длинѣ окружности его основанія, помноженной на длину образующей.*

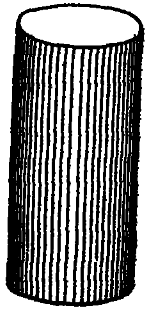
длина половины образующей равна 5 вершкамъ, а потому боковая поверхность конуса равна

$$\frac{176}{7} \text{ кв вершк.} \times 5.$$

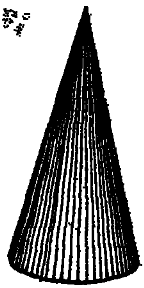
Замѣтьте *боковая поверхность всякаго прямого конуса вращенія равна длинѣ окружности его основанія, помноженной на половину образующей конуса*

Наглядное пособіе—склеенная изъ бумаги «воронка» («картузъ») съ круговымъ основаніемъ. Воронка же дастъ возможность легко выяснить, почему говорятъ *прямой* конусъ *вращенія*, когда говорятъ о конусахъ, происшедшихъ отъ вращенія прямоугольнаго треугольника около его катета

762. Нельзя ли, не разрѣзая боковой поверхности прямого цилиндра по одной изъ его образующихъ и не «распластывая» ея на плоскости, разсматривать ее, какъ сумму безчисленнаго множества такихъ прямоугольниковъ, основанія которыхъ лежатъ какъ бы на окружностяхъ основаній, а высоты равны образующимъ? — Повторите, какъ можно разсматривать боковую поверхность прямого цилиндра —А нельзя ли изъ этого вывести способъ вычисленія величины боковой поверхности прямого цилиндра?



Къ № 762



Къ № 763.

763. Нельзя ли, не разрѣзая боковой поверхности прямого конуса по одной изъ его образующихъ и не распластывая ея на плоскости, разсматривать эту поверхность, какъ сумму безчисленнаго множества равнобедренныхъ треугольниковъ, которыхъ основанія лежатъ на окружности основанія, вершины—въ вершинѣ конуса, а боковыя сто-

18*

роны совпадаютъ съ образующими? (Можно) —Повторите, какъ можно разсматривать боковую поверхность прямого конуса —Какія прямыя будутъ, въ такомъ случаѣ, высотами этихъ тр—ковъ?—А нельзя ли на этомъ основаніи вывести, чему равна боковая поверхность прямого конуса?

Раньше, чѣмъ дѣлать приложеніе этихъ точекъ зрѣнія къ вычисленію поверхностей прямыхъ цилиндра и конуса, надо съ этими точками зрѣнія *сроднить* учащихся, пользуясь и наглядными пособіями, и рисунками, и вернувшись къ длинѣ окружности и къ площади круга Надо достигнуть того, чтобы ученики совершенно сроднились съ тѣмъ взглядомъ на окружность круга, который даетъ возможность говорить, что кругъ есть правильный многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ, что длина окружности есть длина периметра этого многоугольника, а площадь круга — площадь этого многоугольника Ученики должны при этомъ понимать, что кругъ не есть многоугольникъ, но что такъ говорить дозволительно благодаря тому, что мы говоримъ о многоугольникѣ съ *безчисленнымъ* множествомъ сторонъ, и что такая постановка вопроса полезна —Возвратившись къ этимъ точкамъ зрѣнія, можно достигнуть того, что и содержаніе №№ 762 и 763 войдетъ въ обиходъ мысли учащихся. А это важно —Когда это достигнуто, можно поработать надъ примѣненіемъ этихъ точекъ зрѣнія къ вычисленію боковыхъ поверхностей прямыхъ цилиндра, конуса и усѣченнаго конуса Надо, однако же, дѣло ставить такъ, чтобы ученики не принимали указанныхъ точекъ зрѣнія за доказательства *теоремъ* Это смѣшеніе было бы вредно въ смыслѣ логическомъ

764. Разсмотрѣть прямой цилиндръ, какъ правильную призму съ безчисленнымъ множествомъ боковыхъ граней — Что въ прямомъ цилиндрѣ «соотвѣтствуетъ» периметру основанія прямой призмы? (Периметру основанія прямой призмы въ прямомъ цилиндрѣ соотвѣтствуетъ окружность основанія этого цилиндра) —Что въ прямомъ цилиндрѣ соотвѣтствуетъ боковымъ ребрамъ и высотѣ прямой призмы? (Образующія цилиндра и высота его) — Что въ прямомъ цилиндрѣ соотвѣтствуетъ боковой поверхности правильной призмы?— Чему равна боковая поверхность правильной призмы?—Чему равна боковая поверхность прямого цилиндра? (Боковая поверхность прямого цилиндра равняется длинѣ окружности его основанія, помноженной на длину образующей) —Сравнить съ результатомъ №№ 746 и 747 — Многочисленныя упражненія на численныхъ примѣрахъ

765. Какъ можно разсматривать конусъ? (Какъ правильную пирамиду съ безчисленнымъ множествомъ граней).— Чему равняется боковая поверхность правильной пирамиды? (Длинѣ периметра основанія, помноженной на половину ея апоѳемы) — Что въ прямомъ конусѣ «соотвѣтствуетъ» периметру основанія правильной пирамиды? (Окружность основанія конуса) —Что—апоѳемѣ правильной пирамиды? (Образующая конуса) И т д

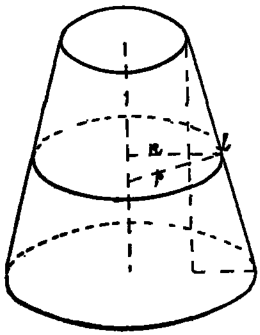
Въ этихъ направленіяхъ учитель долженъ поупражнять учениковъ весьма настойчиво, не ограничиваясь только своимъ изложеніемъ вопроса Это — не доказательство какой-нибудь теоремы, котораго цѣль убѣдить учениковъ въ справедливости даннаго предложенія Это — новая точка зрѣнія, это — методъ, хотя и не строго обоснованный, а только намѣченный Онъ даетъ въ зародышѣ нѣкоторыя условія для предстоящаго въ свое время болѣе научнаго обоснованія вопроса съ точки зрѣнія теоріи предѣловъ или съ точки зрѣнія исчисленія безконечно-малыхъ

770. Нарисовать усѣченный, параллельно основанію, конусъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ можно разсматривать это «тѣло вращенія»? — Проведите его ось, два взаимно-параллельныхъ радіуса на его основаніяхъ и плоскость черезъ эти два радіуса, ось и образующую —Отдѣлить оба основанія, «взрѣзать» боковую поверхность этого усѣченнаго конуса и распластать ее на плоскости — Какая получится фигура?—Кромѣ двухъ круговъ, получается еще куда $R \cdot \frac{L}{2} = p\ h$ — Поэтому можемъ писать не только

$$S_к = 2\pi R\ \frac{L}{2}, \text{ но и } S_к = 2\pi p\ h,$$

т.-е. боковая поверхность прямого конуса, какъ и прямого цилиндра, равна произведенію длины окружности, у которой радіусъ равенъ вспомогательному перпендикуляру, на длину высоты тѣла.—Наконецъ, чему равняется боковая поверхность прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса?—Отвѣтъ въ отвлеченныхъ числахъ

$$S_{ус\ к} = 2\pi R'\ L,$$



Къ № 798

но изъ подобія двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ, въ одномъ изъ которыхъ гипотенузой служитъ образующая, а однимъ изъ катетовъ—высота, въ другомъ же—гипотенузой служитъ вспомогательный перпендикуляръ, а соотвѣтствующимъ катетомъ—радіусъ средняго сѣченія, слѣдуетъ, что

$R' \cdot h = p\ L$, откуда $R'\ L = p\ h$.

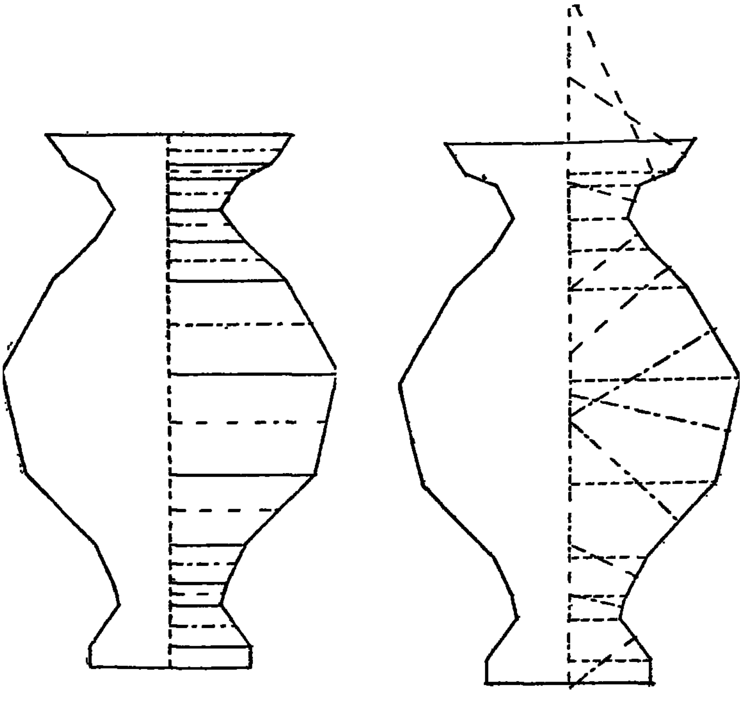
А потому можемъ писать не только

$$S_{ус\ к} = 2\pi R'\ L, \text{ но и } S_{ус\ к} = 2\pi p \cdot h,$$

т.-е боковая поверхность прямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса, какъ и прямого цилиндра и прямого конуса, равна произведенію длины окружности, у которой радіусъ равенъ вспомогательному перпендикуляру образующей, на длину высоты тѣла

Нагляднымъ пособіемъ для лучшаго усвоенія и закрѣпленія матеріала этихъ параграфовъ въ сознаніи учащихся можетъ служить очень простой приборъ, составленный изъ карандаша съ гибкой проволокой, обвивающей одной своею частью карандашъ, а другой

разъ, а пропорціонально *квадрату* длины радіуса) —Т.-е ?
Т-е съ увеличеніемъ длины окружности въ 2 раза, площадь
круга увеличивается въ 4 раза, съ увеличеніемъ радіуса
въ 3 раза, площадь увеличивается въ 9 разъ, и т д) —За-



Къ № 800а

мѣтьте площадь круга пропорціональна *квадрату* длины радіуса —Чему равна боковая поверхность прямого цилиндра? — Съ увеличеніемъ длины окружности основанія въ нѣсколько разъ, боковая поверхность прямого цилиндра увеличивается во столько же разъ. — Съ увеличеніемъ длины образующей прямого цилиндра, боковая поверхность его увеличивается во столько же разъ —И т д —Замѣтьте· поверхность прямого цилиндра и прямого конуса прямо про-ныхъ къ оси вращенія, чѣмъ ихъ будетъ больше, тѣмъ ближе будетъ каждый слой къ нѣкоторому прямому, усѣченному параллельно основанію, конусу (нѣкоторые слои будутъ близки къ цилиндрамъ), тѣмъ ближе будутъ ихъ «пояса» къ боковымъ поверхностямъ нѣкоторыхъ прямыхъ, усѣченныхъ параллельно основаніямъ, конусовъ, а нѣкоторые — къ боковымъ поверхностямъ нѣкоторыхъ цилиндровъ

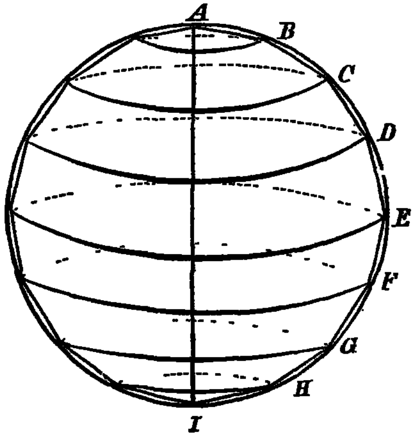
Если дѣло поставлено сколько-нибудь удовлетворительно, учащіеся сами въ состояніи указать, гдѣ находятся на данной кривой тѣ ея элементы, которые даютъ поверхности, близкія къ цилиндрическимъ

805. Что напоминаетъ собою тѣло, полученное отъ вращенія плоской *кривой* вокругъ нѣкоторой прямой, лежащей въ той же плоскости, если провести множество параллельныхъ его основаніямъ сѣченій? (Напоминаетъ «вазу», образованную вращеніемъ плоской ломаной линіи вокругъ нѣкоторой оси, лежащей въ той же плоскости Ср № 800а)

Не только не мѣшаетъ, но прямо слѣдуетъ обращать вниманіе учениковъ на то, что даже приблизительное вычисленіе боковой поверхности «вазы», происшедшей отъ вращенія кривой линіи вокругъ нѣкоторой оси, требуетъ раздѣленія ея на множество слоевъ и измѣренія множества прямыхъ (длины радіусовъ множества круговъ и длины множества малыхъ частей образующей кривой, или длины множества вспомогательныхъ перпендикуляровъ и высотъ множества слоевъ) Времени это отниметъ не особенно много, а зато много посодѣйствуетъ выработкѣ основъ математическаго уразумѣнія вопросовъ этого рода Кромѣ того, это покажетъ учащимся, что тѣ тѣла вращенія, которыя имъ извѣстны, т-е прямые цилиндръ и конусъ и шаръ (тѣло вращенія, которое они изучатъ впослѣдствіи) среди другихъ тѣлъ вращенія занимаютъ въ указанномъ отношеніи особенное мѣсто Мѣсто это характеризуется тѣмъ, что для вычисленія ихъ боковыхъ поверхностей требуется сдѣлать лишь два измѣренія (а для шаровой поверхности даже только одно). Аналогичное справед-

На томъ, что всѣ перпендикуляры, возстановленные изъ средины образующихъ, въ этомъ тѣлѣ вращенія равны между собою, останавливаться не придется, если у учащихся есть достаточныя познанія объ окружности и о правильныхъ многоугольникахъ Но что это — особенность именно этого тѣла вращенія и только этого тѣла вращенія, само собой не разумѣется, и сами ученики этого могутъ не замѣтить.

***810.** Представимъ себѣ, что черезъ ось проведена одна плоскость, которая пересѣкла поверхность шара въ окружности нѣкотораго большого круга —Раздѣлимъ полуокружность этого круга на нѣкоторое (значительное) число одинаковыхъ частей и черезъ эти точки дѣленія проведемъ плоскости, перпендикулярныя къ діаметру этой полуокружности — Что напоминаетъ шаровая поверхность, снабженная начерченными на ней параллелями? (Она напоминаетъ тѣло, полученное отъ вращенія правильнаго полумногоугольника вокругъ его діаметра) —Шаровую поверхность можно разсматривать, какъ совокупность безчисленнаго множества поясовъ, изъ которыхъ каждый представляетъ собою боковую поверхность либо прямого конуса (у каждаго изъ полюсовъ), либо усѣченнаго параллельно основанію прямого конуса, либо (у экватора, при нечетномъ числѣ поясовъ) прямого цилиндра —Какъ велика поверхность каждаго изъ поясовъ?— По одной формулѣ она равна $S=2\pi R' L$, гдѣ R' — длина радіуса средняго сѣченія, а L—длина образующей, но всѣ



Къ № 810

R намъ не извѣстны, и хотя всѣ L равны между собою, но сумма поверхностей всѣхъ поясовъ дастъ формулу $(2\pi R'_1 + 2\pi R'_2 + 2\pi R'_3 + \quad) L$, которая приводитъ къ формулѣ $2\pi\ (R'_1 + R'_2 + R'_3 + \quad)L$, гдѣ сумма радіусовъ неизвѣстна. — По другой формулѣ поверхность каждаго пояса вытекаетъ изъ формулы $S = 2\pi p\ \ h$, гдѣ h есть длина проекціи дуги на ось, а p—длина вспомогательнаго перпендикуляра каждаго пояса, а въ шаровой поверхности каждый вспомогательный перпендикуляръ равенъ радіусу шара — Поэтому сумма поверхностей всѣхъ поясовъ даетъ

формулу $\quad 2\pi p\ \ h_1 + 2\pi p\ \ h_2 + 2\pi p\ \ h_3 +$

или $\quad 2\pi p\ \ (h_1 + h_2 + h_3 + \ .\ )$

Но p извѣстно. оно равно радіусу шара, т.-е. R, и сумма всѣхъ h, т.-е. сумма $h_1 + h_2 + h_3 + h_4$ тоже извѣстна она равна оси, т.-е. діаметру шара, или числу $2R$ —А потому поверхность шара равна $2\ \ R\ .\ 2R$, т.-е $4\pi R^2$ —Иначе говоря, поверхность шара равна $C\ \ 2R$, гдѣ C обозначаетъ длину окружности большого круга, или, что—то же, учетверенной площади большого круга этого шара —Такимъ образомъ 1) если взять прямоугольникъ, въ которомъ длина основанія равна длинѣ окружности большого круга шара, а высота—діаметру шара, то поверхность шара равна площади этого прямоугольника, 2) если разрѣзать шаръ на два полушарія, то кривая поверхность полушарія вдвое больше площади большого круга полушарія, 3) если по шаровой поверхности провести экваторъ, а черезъ полюсы провести большой кругъ (меридіанъ), то поверхность шара раздѣлится на четыре одинаковыя части, и поверхность каждой изъ этихъ частей будетъ равна площади большого круга шара — Глобусъ и апельсинъ!

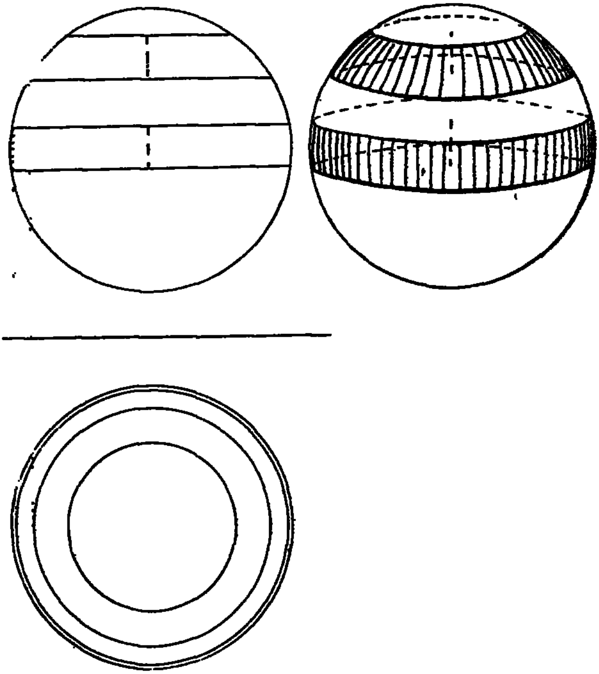
Такія и имъ подобныя разъясненія, вмѣстѣ съ тѣми задачами въ книгѣ для учениковъ, въ которыхъ требуется построить нѣкоторыя плоскія фигуры, которыхъ площади равны поверхности шара, и такіе копусы и цилиндры, которыхъ боковыя поверхности равновелики съ поверхностью шара, служатъ для того, чтобы формула поверхности шара была не буквенной только формулой, а дѣйствительнымъ закономъ, котораго смыслъ былъ бы для учениковъ вполнѣ понятенъ — Компланацiей шаровой поверхности заканчивается примѣненiе планиметрическихъ теоремъ къ вычисленiямъ, относящимся къ поверхностямъ, изучаемымъ въ курсѣ такъ называемой низшей математики

***821.** Какъ вычислить поверхность шарового пояса, если извѣстны высота слоя, имъ опоясываемаго, и радiусъ шаровой поверхности, онъ же—вспомогательный перпендикуляръ элементовъ дуги, образующей этотъ поясъ?—Такими же разсужденiями, какъ тѣ, съ помощью которыхъ мы вывели, какъ вычисляется поверхность шара, выведемъ, что поверхность шарового пояса равна $2\pi R\ h$, гдѣ R—длина радiуса шара (т-е число единицъ длины, въ немъ содержащееся. а h—длина высоты слоя, опоясаннаго поясомъ).

***824.** Взять на оси шаровой поверхности два одинаковыхъ отрѣзка один вблизи полюса, другой—такой, чтобы центръ шара былъ его серединой, провести черезъ концы этихъ отрѣзковъ четыре плоскости, перпендикулярныя къ оси —Получатся 2 такихъ шаровыхъ слоя, у которыхъ высоты будутъ равны между собою —Совмѣстимы ли пояса, ихъ обнимающiе? (Не совмѣстимы) —Существуютъ ли на поверхности одного и того же шара совмѣстимые пояса? (Существуютъ они лежатъ «симметрично» по отношенiю къ экватору, и ихъ сколько угодно паръ) —Вычислить поверхности двухъ поясовъ, обнимающихъ («охватывающихъ») слои съ одинаковой высотой, но лежащiе по одну и ту же сторону экватора —Пусть длина высоты каждаго изъ этихъ двухъ слоевъ равна 3 мм, а длина радiуса шара 15 мм, тогда поверхность одного пояса равна

$$15 \text{ кв мм} \times \frac{44}{7} \times 3$$

мы умѣемъ вычислять?—Знаемъ ли мы какія-нибудь свойства квадрата? параллелограмма? правильнаго шестиугольника?—Умѣемъ ли начертить двѣ подобныя фигуры?—Знаемъ ли мы что-нибудь о равнобедренныхъ треугольникахъ? о параллельныхъ прямыхъ? о суммѣ угловъ тре-



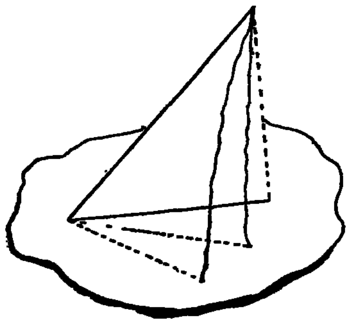
Къ № 824 (прим.)

угольника? о суммѣ угловъ многоугольника? о симметричныхъ фигурахъ?—Что мы знаемъ о плоскости?—Отдайте себѣ отчетъ въ томъ, что представляетъ собою линейка? (Прямоугольный параллелепипедъ)—Какъ узнать толщину листа бумаги?—Для этого взять листъ бумаги, разрѣзать его ножницами на много частей съ прямыми краями, сложить ихъ

Какой уголъ образуетъ прямая, перпендикулярная къ плоскости, съ этой плоскостью?—Въ этомъ случаѣ считаютъ, что уголъ, образованный прямою, перпендикулярною къ плоскости, съ этой плоскостью, равенъ прямому углу, образованному прямою съ любою другою прямою, проведенною въ той же плоскости чрезъ основанiе перпендикуляра (См. чертежъ на стр 42)

Несмотря на то, что ранѣе (№ 140а), можетъ-быть, уже заложены основанія для понятія о перпендикулярѣ къ плоскости, но надо вернуться къ точкамъ зрѣнія упомянутаго нумера и къ тѣмъ наглядным пособіямъ, какія рекомендованы въ этомъ нумерѣ

864. Даны плоскость, точка на ней и не перпендикулярный къ этой плоскости лучъ, выходящій изъ данной точки плоскости —Найти проекцію этого луча на эту плоскость —Когда проекція проведена, провести еще нѣсколько прямыхъ линій изъ начала луча въ данной плоскости, затѣмъ провести плоскости черезъ данный лучъ и каждый изъ проведенныхъ въ плоскости лучей и разобраться въ томъ, который уголъ меньше тотъ ли, который образованъ даннымъ лучомъ со своей проекціей, или тотъ, что образованъ даннымъ лучомъ съ любою изъ прямыхъ, проведенныхъ на данной плоскости изъ начала луча?—Уголъ, образованный даннымъ лучомъ съ его проекціей на данную плоскость, меньше остальныхъ, и, когда говорятъ объ углѣ, образованномъ прямою съ данною плоскостью, то при этомъ подразумѣваютъ уголъ, образованный прямою ли-



Къ № 864

Когда проекція прямой на плоскость представляетъ собою точку?

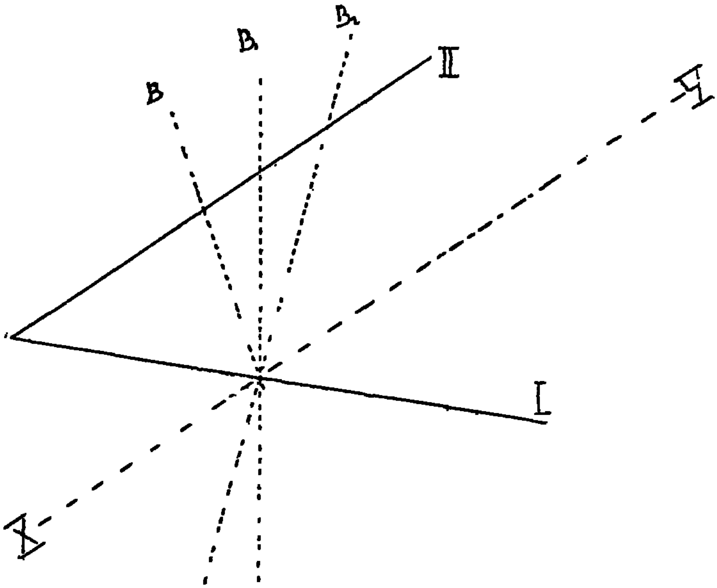
873. Придать карандашу положеніе, параллельное плоскости стола —Это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ: положить на столъ другой карандашъ, а первому придать положеніе, параллельное положенному на столъ карандашу — Изъ точки, взятой внѣ плоскости, провести прямую, параллельную плоскости

874. Придать куску картона положеніе, параллельное плоскости стола —Это можно сдѣлать слѣдующимъ образомъ. поставить карандашъ перпендикулярно къ плоскости стола, а куску картона придать положеніе, перпендикулярное къ тому же карандашу

875. Если двѣ параллельныя плоскости пересѣчь третьей, то линіи ихъ пересѣченія будутъ взаимно-параллельны.

> Всѣ нумера этого отдѣла могутъ быть полезны для учениковъ лишь при томъ условіи, если каждый нумеръ безбоязненно прорабатывается на наглядныхъ пособіяхъ какъ учителемъ, такъ и учениками —Рисунки должны являться только нѣкоторымъ изображеніемъ того. что получено въ дѣйствительности —Только при этомъ условіи можно достигнуть сколько-нибудь значительнаго развитія пространственнаго воображенія учениковъ и вѣрныхъ пространственныхъ представленій — Наглядныя пособія — разнаго цвѣта палки

876. Провести плоскость черезъ точку —Сколько плоскостей можно провести черезъ одну точку? — Провести плоскость черезъ двѣ точки — Сколько плоскостей можно провести черезъ двѣ точки? — Провести плоскость черезъ прямую линію.—Сколько плоскостей можно провести черезъ прямую линію?—Провести плоскость черезъ три точки, лежащія на одной прямой —Сколько плоскостей можно провести черезъ три точки, лежащія на одной прямой?—Провести плоскость черезъ три точки, не лежащія на одной мыхъ II и III, либо же, по крайней мѣрѣ, черезъ одну точку одной изъ этихъ двухъ прямыхъ,—черезъ точку K третьей прямой, когда она становится параллельной ко II-й прямой, или черезъ точку L второй прямой, когда она становится параллельной къ III-й прямой. Поэтому, при трехъ взаимно-пересѣкающихся прямыхъ, всегда можно взять такую четвертую, которая враще-



Къ № 865 (прим.).

ніемъ вокругъ точки, взятой на одной изъ нихъ, описываетъ плоскость, на которой лежатъ всѣ три прямыя и которая этими тремя прямыми опредѣляется.

***865a.** Возьмите плоскость, изъ точки ея проведите лучъ, не лежащій въ той же плоскости и не перпендикулярный къ ней, найдите проекцію луча на плоскость и проведите въ той же плоскости прямую, перпендикуляр-

ПЕРВОЕ ИЗДАНІЕ

ГЕОМЕТРІИ НА ЗАДАЧАХЪ

а) **рекомендовано** Главнымъ Управленіемъ военно-учебныхъ заведеній для фундаментальныхъ библиотекъ кадетскихъ корпусовъ, какъ пособіе при преподаваніи математики, и **включено въ число учебныхъ пособій** при преподаваніи геометріи,

б) **допущено** Учебнымъ отдѣломъ Министерства Торговли и Промышленности въ фундаментальныя библіотеки коммерческихъ училищъ;

в) **признано пригоднымъ** для низшихъ и профессіональныхъ школъ разнаго рода математическимъ отдѣломъ Педагогическаго музея военно-учебныхъ заведеній.

Выдержки изъ отзывовъ печати въ концѣ книги.

ціе, т.-е. на такъ называемую интуицію, и только впослѣдствіи, когда, такъ сказать, реальное содержаніе разныхъ отдѣловъ математики учащимися будетъ вполнѣ усвоено, обратиться къ логико-критическому установленію основъ и къ таковой же обработкѣ всего, ранѣе уже по существу своему усвоеннаго, учебнаго матеріала. Для тѣхъ, кто въ предварительномъ, такъ сказать, пропедевтическомъ, приготовительномъ, курсѣ математики отводитъ интуиціи первое мѣсто, важнѣе всего слѣдованіе психологическимъ точкамъ зрѣнія на математическое образованіе и на математику, какъ учебный предметъ. Они считаютъ, что начинать занятія математикой надо съ чувственныхъ воспріятій и съ ясныхъ представленій, сближающихъ знаніе съ жизнью и опытомъ. Они не стремятся по возможности скорѣе построить въ сознаніи учениковъ величавую систему діалектически и научно обработаннаго математическаго знанія. Для нихъ, поэтому, когда рѣчь идетъ о введеніи математики въ сферу интересовъ учащихся и о снабженіи послѣднихъ фактическими и реальными математическими знаніями, авторитетами являются прежде всего Янъ-Амосъ Коменскій, Жанъ-Жакъ Руссо, Песталоцци и другіе педагоги-мыслители, которые работали надъ установленіемъ принциповъ обученія и воспитанія въ духѣ согласованія этихъ принциповъ съ психологическими требованіями. Сверхъ того, сторонники этого направленія, къ счастью своему, могутъ въ настоящее время ссылаться на авторитеты такихъ людей науки, какъ Таннери, Борель, Лэзанъ, Лоджъ, Перри, Феликсъ Клейнъ и др.

Примирительное направленіе.

Есть и сторонники примиренія обоихъ направленій. Они желали бы только приспособленія устарѣлаго курса математики къ новымъ теченіямъ. Для этой цѣли они считали бы достаточнымъ внести въ традиціонный діалектическій курсъ математики нѣкоторыя чисто-методическія поправки въ духѣ въ будущемъ, Такое значеніе двигательной силы (а не только матеріала для примѣненія уже пріобрѣтеннаго знанія) надо придавать цѣлесообразнымъ задачамъ также при преподаваніи математики или, вѣрнѣе, при *обученіи* ей вообще и при обученіи геометріи въ частности

Мѣсто основного курса геометріи

Въ „**Геометріи на задачахъ**" именно и предлагается *основной* (предварительный и подготовительный, пропедевтическій) курсъ геометріи, который, какъ показалъ опытъ западно-европейской и американской школъ, долженъ предшествовать курсу геометріи, преслѣдующему въ очень многихъ пунктахъ болѣе или менѣе діалектическія цѣли и цѣль систематизаціи всего усвоеннаго учебнаго геометрическаго матеріала О возрастѣ, въ которомъ учащемуся возможно приступить къ занятіямъ по основному курсу геометріи, и о томъ, какъ пользоваться „**Геометріей на задачахъ**" при занятіяхъ геометріей вообще, сдѣланы указанія въ нижеслѣдующихъ строкахъ

Доказательства

Ученики въ этомъ курсѣ занимаются преимущественно рѣшеніемъ задачъ Теоремы они доказываютъ только такія, которыя не принадлежатъ къ числу очевидныхъ для нихъ и которыя не требуютъ слишкомъ тонкихъ разсужденій Къ доказательству же очевидныхъ теоремъ ученики могутъ обращаться только въ случаѣ особеннаго интереса къ самому процессу доказательства Это зависитъ и отъ состава класса, и отъ такта учителя Одного долженъ опасаться учитель какъ бы не преувеличить этого интереса учениковъ къ отвлеченностямъ. Во всякомъ случаѣ, ни педантически избѣгать возникновенія интереса учениковъ къ доказательствамъ, ни педантически навязывать имъ этотъ интересъ не слѣдуетъ

Раздѣленіе книги на части

„**Геометрія на задачахъ**" состоитъ изъ двухъ книгъ: одна (книга для учителей) содержитъ тѣ упражненія, которыя ученики должны проработать подъ непосредственнымъ руководствомъ учии надобности При этомъ учащеся могутъ настолько освоиться съ сущностью этихъ идей и методовъ, что для нихъ возможно примѣнить эти идеи ко всѣмъ случаямъ, которые представляются въ основномъ курсѣ Напр, Архимедова теорема объ объемахъ цилиндра, конуса и полушарія, въ которыхъ высоты и радіусы оснований равны между собою, въ **„Геометріи на задачахъ"** прорабатывается въ связи съ видоизмѣненнымъ принципомъ Кавалiери

Планиметрія и стереометрія

Раздѣленіе курса на планиметрію и стереометрію въ **„Геометріи на задачахъ"** не проведено, такъ какъ многія представленія и понятія въ основномъ курсѣ вырабатываются и усваиваются учащимися лучше, если это раздѣленіе не соблюдается

Алгебраическія выкладки.

Выкладокъ надъ буквенными выраженіями въ обѣихъ книгахъ приведено очень мало, и ихъ введеніе поставлено въ зависимость отъ вкуса и такта учителя, дабы не затруднять послѣдняго въ тѣхъ случаяхъ, когда ученики недостаточно владѣютъ тождественными преобразованіями буквенныхъ выраженій

Стереометрическіе чертежи и кавальерная проекція.

Стереометрическіе чертежи въ обѣихъ книгахъ **„Геометріи на задачахъ"** выполняются учителемъ и учениками сначала согласно пріемамъ, такъ сказать, инстинктивной перспективы Но навсегда остаться при этихъ пріемахъ не въ цѣляхъ математическаго образованія учащихся А потому инстинктивное (часто невѣрное во всѣхъ отношеніяхъ) полуперспективное черченіе должно уступить свое мѣсто нѣкоторымъ вполнѣ опредѣленнымъ условнымъ правиламъ такъ называемой „кавальерной" проекціи пространственныхъ фигуръ на вертикальную плоскость проекцій Правила эти и многочисленные чертежи, къ нимъ относящіеся, приведены въ § 15 книги для учителей Параграфъ этотъ, впрочемъ, можно перемѣстить на мѣсто любого другого параграфа, если ученики уже освоились а) съ раздѣленіемъ ручекъ) и мѣлки, 3) измѣрительные приборы· мѣрительная лента, масштабъ транспортиръ и какая-нибудь таблица мѣръ длины, поверхностей и объемовъ съ изображеніями главнѣйшихъ единицъ мѣръ [1])

Инвентарь „лабораторной" методы

Полезно (особенно при желаніи учителя вести дѣло согласно требованіямъ такъ называемой «лабораторной» методы обученія математикѣ) имѣть въ своемъ распоряженіи слѣдующіе матеріалы и инструменты для изготовленія учителемъ, на глазахъ учениковъ, наглядныхъ пособій разнаго рода· 1) писчую бумагу, бумагу цвѣтную, нѣсколько листовъ картона, бумагу, разлинованную мелкими квадратиками (лучше всего миллиметренную), листъ прозрачной восковой бумаги, жидкій клей, сургучъ, составъ для паянія металла безъ паяльной трубки (такъ наз „тинолъ"), глину, смѣшанную съ воскомъ (такъ наз. „пластилинъ" или „пластицинъ" для лѣпки), бѣлую тонкую жесть, нитки, нѣсколько вязальныхъ спицъ, деревянныхъ палочекъ, булавокъ, кнопокъ, пробокъ, мягкую мѣдную проволоку и т п ; 2) инструменты. ножницы, плоскогубцы, острогубцы, круглогубцы, острый ножъ такъ называемые „стэки" (палочки для лѣпки), приборъ для пробиванія отверстій въ картонѣ, простой циркуль, шило, и т. п —Съ помощью поименованныхъ матеріаловъ и инструментовъ учитель можетъ изготовлять въ классѣ, на глазахъ учениковъ, разнообразнѣйшія наглядныя пособія и научить своихъ учениковъ слѣдовать „лабораторной методѣ" въ своихъ занятіяхъ —Метода эта допустима, конечно, не только на урокахъ естествознанія (физики, химіи, ботаники и т д), но, какъ показываетъ опытъ сѣверо-американской школы, также на урокахъ математики Сближеніе всякаго

[1]) Къ числу такихъ таблицъ принадлежитъ „Наглядная таблица соотношеній нѣк мѣръ протяженія", составленная пишущимъ эти строки и имѣющая вскорѣ выйти въ свѣтъ вторымъ, улучшеннымъ изданіемъ.

знанія съ жизнью и природою и сближеніе жизни и природы съ математическимъ знаніемъ не только не унижаютъ достоинства послѣдняго, но, наоборотъ, возвышаютъ его до степени знанія истиннаго, а не словеснаго только

Чертежные инструменты, тетради и т. п. Въ распоряженіи каждаго ученика должны быть очиненный къ уроку (а не во время урока) карандашъ, перочинный ножикъ, циркуль, снабженный карандашомъ, небольшая линейка, небольшой чертежный треугольникъ, масштабъ, транспортиръ и тетради (Готовальня и инструменты для выполненія чертежей въ туши вообще не обязательны для уроковъ геометріи) Полезны синій и красный карандаши, очиненные къ уроку, и запасной листъ чистой бумаги. Полезно для дѣла, если въ распоряженіи ученика находятся четыре тетради двѣ классныхъ (одна безъ линеекъ, другая — разграфленная квадратиками) и двѣ—для домашнихъ работъ (того же рода) Это весьма упорядочиваетъ работу учениковъ и значительно облегчаетъ учителю вѣрное сужденіе объ ихъ успѣхахъ Тетради, разграфленныя квадратиками, особенно полезны при рѣшеніи учениками задачъ на вычисленіе площадей и вообще во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда важна относительная длина прямыхъ линій

Содержаніе книги О содержаніи книги для учителей можно отчасти судить по ея заглавію и оглавленію, а также по „Алфавитному указателю". Въ декабрьской книгѣ „Русской Школы" помѣщена моя статья подъ заглавіемъ „Къ реформѣ преподаванія элементарной математики", въ которой намѣчены главныя основанія раздѣленія курса геометріи на три цикла первый (начальный), второй—основной, и третій—систематизаціонный и дополнительный Эта книга посвящена курсу основному.

Возрастъ учащихся Составлена „Геометрія на задачахъ" согласно вышеизложеннымъ воззрѣніямъ на обученіе геометріи и въ соотвѣтствіи съ требованіями „мевозраста Но за-то дѣтямъ 10-ти—12-ти-лѣтняго возраста, какъ въ томъ убѣждаетъ опытъ, весьма интересно вырабатывать себѣ естественнымъ путемъ вполнѣ ясныя и вѣрныя пространственныя представленія, пользуясь для этого наглядными пособіями, изготовляемыми ими самими, чертежами, ими выполняемыми съ помощью чертежныхъ инструментовъ на классной доскѣ и въ своихъ тетрадяхъ Какъ-разъ въ этомъ возрастѣ дѣтямъ интересно, благодаря намѣченной выше работѣ, образовывать себѣ ясныя представленія о равныхъ и неравныхъ, о симметричныхъ и несимметричныхъ фигурахъ, о фигурахъ подобныхъ, о площадяхъ разныхъ фигуръ, о фигурахъ, различныхъ по формѣ, но одинаковыхъ по площади, и т п Какъ-разъ въ этомъ возрастѣ дѣти съ величайшимъ интересомъ, рвеніемъ и удовольствіемъ, съ величайшею для своего истиннаго образованія пользою изготовляютъ модели разнаго рода и занимаются изученіемъ свойствъ выполненныхъ ими чертежей Эта работа вполнѣ отвѣчаетъ потребности дѣтей упомянутаго возраста мастерить, клеить, рисовать и т п Потребность эта, съ ростомъ и развитіемъ мыслительныхъ способностей, падаетъ уже къ 14-ти—15-ти-лѣтнему возрасту Для этого послѣдняго возраста такая работа уже слишкомъ примитивна, хотя пространственный опытъ учащихся этого возраста очень бѣденъ Для діалектическаго курса этотъ опытъ, такимъ образомъ еще недостаточенъ, а для основного онъ уже слишкомъ великъ Принимая все это во вниманіе, западно-европейская школа и включила (въ самое послѣднее время) геометрію чертежа и наглядныхъ пособій въ курсъ низшихъ классовъ средней школы и въ курсъ школы низшей При современныхъ условіяхъ стремиться къ тому же въ русской школѣ представляется прямо необходимымъ одну изъ частей его? (Конечно, можно. данный уголъ больше своей части) —Можно ли уголъ считать *величиною?* (Можно) —Почему? (Уголъ можетъ быть равенъ другому, можетъ быть больше другого, можетъ быть меньше его).— Вырѣзать изъ бумаги два угла —Вырѣзать два одинаковыхъ угла и два разныхъ угла —Разрѣзать уголъ на двѣ части.

Цѣль этихъ упражненій состоитъ въ томъ, чтобы ученики были поставлены въ возможность образовать себѣ первоначальное представленіе о томъ, что уголъ есть величина О томъ, что надъ углами можно производить дѣйствія, ученики узнаютъ только впослѣдствіи. Но это отнюдь не мѣшаетъ и на занимающей насъ ступени положить начало взгляду на уголъ, какъ на величину. Этой цѣли могутъ послужить также и слѣдующіе вопросы и упражненія

59в. Сложить два угла, вырѣзанные изъ бумаги — Отрѣзать отъ угла другой, равный данному.—Уголъ—«величина», но особаго рода —Можно ли уголъ мѣрить аршиномъ? (Нельзя)—Можно ли уголъ мѣрить футомъ?

59г *Уголъ можно измѣрить только другимъ угломъ* —Какимъ угломъ измѣряютъ углы, узнаемъ впослѣдствіи —Какъ измѣрять углы—тоже

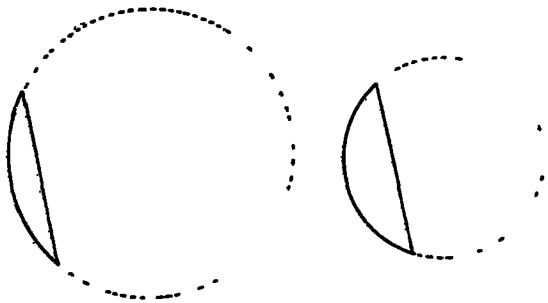
Если ученики уже знаютъ вычисленіе площадей прямоугольниковъ, то слѣдуетъ спросить можно ли углы измѣрять квадратными аршинами, квадратными футами Это полезно въ томъ смыслѣ, что ученики еще яснѣе поймутъ, почему величина угла не зависитъ отъ длины его сторонъ

§ 3. Окружность круга и измѣреніе угловъ.

66 Раздвинуть ножки циркуля, снабженнаго карандашомъ, металлическое остріе циркуля поставить въ какую-нибудь точку на плоскости, не раздвигая и не сдвигая ножекъ циркуля и не сдвигая острія циркуля съ точки, той же прямой, и нѣсколько окружностей, которыхъ центры не лежатъ на одной прямой

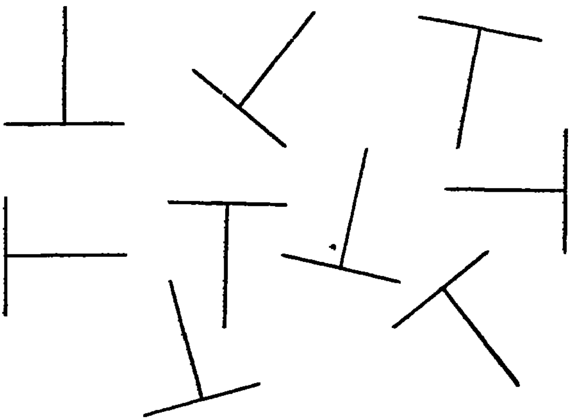
68. Начертить окружность круга, взять на ней (на окружности, а не на кругѣ) двѣ точки и соединить эти двѣ точки прямою линiей.—Взятая часть окружности, заключенная между взятыми двумя точками, съ этой прямой «не сливается». — Между ними есть просвѣтъ. — Окружность круга и любая часть ея — кривыя линiи.

Не надо устранять вопроса о томъ, что если взять двѣ точки окружности очень близко одну отъ другой, то часть окружности *почти* сольется съ ея хордой,— если этотъ вопросъ почему-либо возникнетъ въ умѣ



Къ № 68 (прим)

учащихся Болѣе того: надо поупражнять дѣтей въ черченiи окружностей съ *разными* радiусами и направлять ихъ мысль въ сторону сознанiя и уразумѣнiя того, что 1) у окружности есть кривизна, 2) что кривизна окружности большаго радiуса меньше, чѣмъ кривизна окружности съ радiусомъ меньшимъ, и 3) что мы чертимъ не математическiя окружности и не математическiя прямыя.—Отъ послѣдняго обстоятельства зависитъ то, что въ начерченной окружности ширина ея достаточна для того, чтобы короткая, не математическая прямая слилась съ частью окружности такъ, что прямая будетъ незамѣтна Здѣсь впервые учащiеся несомнѣнно наталкиваются на ранѣе едва намѣчавшiйся



Къ № 138 (прим)

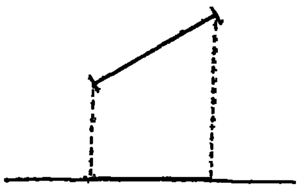
изъ точки B, взятой внѣ прямой MN. Избѣгнуть этого можно только упражненіями, а не напоминаніями въ случаѣ ошибокъ —Чтобы оправдать терминъ «прямой» уголъ, можно отмѣтить, что, переходя черезъ улицу, мы идемъ «прямо», т.-е перпендикулярно къ той сторонѣ улицы

138а. Провѣрить углы линейки, т -е узнать, прямые ли они или нѣтъ

138б. Показать въ классѣ прямые углы, въ шестигранномъ карандашѣ, въ тетради, назвать печатныя буквы, въ которыхъ «элементы»—прямые углы и т. п

Сближеніе знанія и науки съ жизнью не унижаетъ науки, а только освѣщаетъ предметы и вопросы ежедневной жизни съ научныхъ точекъ зрѣнія Сближеніе знанія и учебныхъ предметовъ съ жизнью необходимо также съ педагогической точки зрѣнія

140. На прямой въ плоскости взять точку, изъ нея къ этой прямой въ той же плоскости провести перпендикуляръ и продолжить его въ прямо-противоположномъ направленіи.—Сколько получится угловъ?—Начертить ихъ дуги съ какой-либо точкою на данной прямой —Которая прямая короче перпендикуляръ или «наклонная»?—Изъ точки, взятой внѣ прямой, надо найти кратчайшій «путь» до этой прямой —Этотъ путь будетъ перпендикуляромъ къ данной прямой.—Когда говорятъ о «разстояніи» между точкой, взятой внѣ прямой линіи, и этою послѣднею, то при этомъ имѣютъ въ виду именно разстояніе точки отъ самой близкой къ ней точки данной прямой — При этомъ имѣютъ въ виду именно длину того перпендикуляра, который опущенъ изъ данной точки на данную прямую.—Обыкновенно вкратцѣ говорятъ такъ «перпендикуляръ короче наклонной», или «перпендикуляръ—кратчайшее разстояніе между точкой и прямой»,—остальное подразумѣвается



Къ № 162в

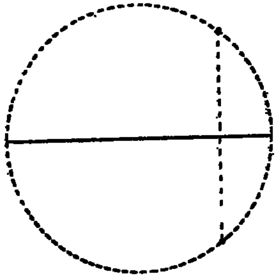
Вводя сокращенныя выраженія, учитель долженъ указывать и степень ихъ неточности 1) въ этомъ случаѣ берется не вся наклонная, а только отрѣзокъ ея, заключенный между ея началомъ и точкой ея пересѣченія съ прямою, 2) слово «разстояніе» предполагаетъ, что не только перпендикуляръ, но и наклонныя измѣрены, если подъ разстояніемъ не разумѣть самого отрѣзка прямой, и т п

162б. Взять прямую и точку внѣ *ея на плоскости* и опустить изъ этой точки на прямую перпендикуляръ —Основаніе («подошва») перпендикуляра называется также проекціей той точки, изъ которой опущенъ перпендикуляръ на данную прямую (на которую опущенъ перпендикуляръ) —Прямая, на которую изъ данной точки опущенъ перпендикуляръ, иногда называется *«осью проекцій»*

162в. Дана прямая въ плоскости, а внѣ прямой, въ той же плоскости, данъ отрѣзокъ другой прямой —Найти

169б. Изъ точки, взятой внѣ прямой на плоскости, опустить перпендикуляръ и двѣ неодинаковыя наклонныя и отдать себѣ отчетъ въ томъ, равны ли между собою ихъ проекціи или не равны

171. Раздѣлить уголъ на двѣ симметричныя части.— Начертить уголъ, симметричный данному, принявъ одну изъ его сторонъ за ось симметріи —Начертить уголъ, симметричный данному, принявъ какую-нибудь прямую, лежащую внѣ его, за ось симметріи — Отдать себѣ отчетъ въ томъ, равны ли между собою двѣ симметричныя прямыя —Равны ли между собою два симметричныхъ угла?

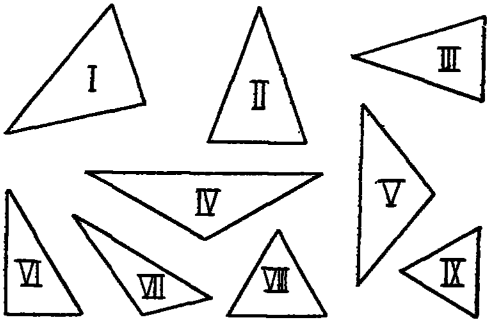


Къ № 173

173. Начертить кругъ, провести одинъ изъ его діаметровъ, взять какую-нибудь точку на одной полуокружности и найти точку, ей симметричную по отношенію къ діаметру.—У всякой ли точки одной полуокружности есть точка, симметричная ей по отношенію къ діаметру?— Начертить окружность, провести въ ней какую-нибудь хорду и какой-нибудь діаметръ и начертить хорду, симметричную данной хордѣ, принявъ проведенный діаметръ за ось симметріи

181 Начертить два тупыхъ угла и найти ихъ сумму.— Можно ли эту сумму тоже называть угломъ? (Можно).— Взять точку, изъ нея провести двѣ прямыя линіи не въ одномъ и томъ же и не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ. Сколько получилось угловъ?—Не два ли? (Два) —Какіе два?—Который изъ нихъ больше?—Если изъ точки проведены двѣ прямыя не въ одномъ и томъ же и не въ прямо-противоположныхъ направленіяхъ, и если при этомъ говорятъ объ углѣ, то при этомъ обыкновенно имѣнiй треугольникъ», «равносторонній треугольникъ», «сторона треугольника» и т п Для того, чтобы этого достигнуть, надо только предлагать цѣлесообразные наводящіе вопросы и требовать полныхъ отвѣтовъ Напр . «сколько здѣсь угловъ?» (здѣсь три угла), а потомъ вопросъ. «какъ назвать такую фигуру, въ которой *три угла?*» Или «какія стороны у этого треугольника—равныя или разныя?» (у этого треугольника равныя стороны), затѣмъ вопросъ «какъ назвать такой треугольникъ, въ которомъ равныя стороны?» и т п Къ сожалѣнію, смыслъ не всѣхъ терминовъ такъ прозраченъ Въ непрозрачныхъ случаяхъ должно *дать* терминъ и, если возможно, выяснить его происхожденіе Терминъ «вершина угла» можетъ быть легко выясненъ, если учитель начертитъ уголъ вершиной вверхъ (ср № 50 и примѣчаніе къ этому нумеру); терминъ «окружность круга» выясняется въ томъ смыслѣ, что эта линія какъ бы «окружаетъ» кругъ и т п Вообще надо учениковъ своихъ побуждать къ сознательному употребленію словъ и развивать въ нихъ надлежащее и живое чутье языка, а не подавлять ихъ массою не понятыхъ и не сознанныхъ ими терминовъ, разсчитанныхъ больше на помощь памяти и на отвлеченныя опредѣленія, чѣмъ на непосредственный, прямой смыслъ термина Особенно это вѣрно относительно такихъ терминовъ, которыхъ опредѣленія, какъ бы на-зло педагогическимъ, психологическимъ, дидактическимъ и образовательнымъ требованіямъ, почти ничѣмъ не связываются съ непосредственнымъ смысломъ даннаго термина

217. Что вы скажете о сторонахъ треугольника I равны ли онѣ между собою, или же въ немъ нѣтъ равныхъ между собою сторонъ? Что—о сторонахъ треугольника II? Что—о сторонахъ треугольника III?—Какія соотношенія возможны между сторонами треугольника? (Либо всѣ три стороны различны, либо двѣ изъ нихъ одинаковы, а третья больше или меньше каждой изъ нихъ, либо, наконецъ, всѣ три стороны одинаковы).—Треугольникъ поэтому можетъ



Къ № 217

быть а) либо разностороннимъ, б) либо равнобедреннымъ; в) либо равностороннимъ.—Упражненія

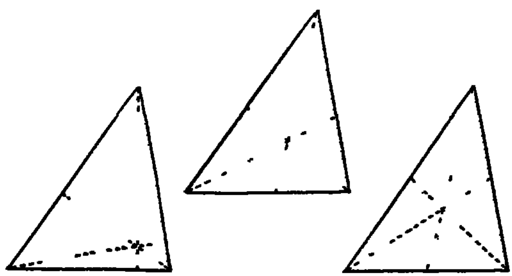
221. Построить прямой уголъ, взять на сторонахъ его по точкѣ и эти точки соединить прямою —Среди угловъ этого треугольника *есть* прямой Какъ называть такой треугольникъ? (Прямоугольнымъ) —Построить острый уголъ, взять по точкѣ на каждой изъ его сторонъ, соединить эти двѣ точки прямой и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе еще углы образовались при этомъ оба ли они острые или же только одинъ изъ нихъ острый, а другой—прямой или тупой —Построить тупой уголъ, взять на его сторонахъ по точкѣ, соединить ихъ прямою линіей и разобраться въ томъ, каковы остальные два угла треугольника —Рѣшить каждую изъ задачъ нѣсколько разъ —Если въ данномъ треугольникѣ *всѣ* углы острые, онъ называется остроугольнымъ треугольникомъ Если одинъ изъ угловъ тупой, то онъ называется тупоугольнымъ А если одинъ изъ угловъ треугольника прямой, то треугольникъ называется *прямоугольнымъ*.

Не надо думать, что эта классификація треугольниковъ преждевременна Хотя ученики и не умѣютъ «доказывать», что въ треугольникѣ только одинъ изъ угловъ можетъ быть прямымъ или тупымъ и что не-

Полезно, для большей ясности, биссекторы угловъ проводить цвѣтнымъ мѣлкомъ или карандашомъ другого цвѣта, или же, въ случаѣ невозможности, оттѣнить ихъ особеннымъ пунктиромъ Сначала надо продѣлать достаточное количество такихъ упражненій на *разностороннихъ* треугольникахъ.

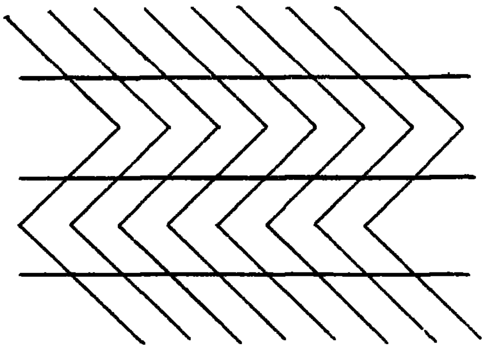
284. Построить равнобедренный остроугольный треугольникъ и начертить равнодѣлящія всѣхъ трехъ его угловъ — Построить равнобедренный остроугольный треугольникъ и начертить всѣ три его высоты и равнодѣлящія всѣхъ трехъ его угловъ. —То же сдѣлать съ прямоугольнымъ равнобедреннымъ треугольникомъ —То же сдѣлать съ равностороннимъ треугольникомъ.—Не замѣчаете ли вы чего-нибудь особеннаго?—Въ равнобедренномъ треугольникѣ его высота и равнодѣлящая его угла при вершинѣ — одна и та же прямая, а въ равностороннемъ треугольникѣ всѣ высоты служатъ въ то же время равнодѣлящими ихъ угловъ.

289. Построить разносторонній треугольникъ, раздѣлить каждую его сторону пополамъ, соединить вершину каждаго угла съ серединой противолежащей стороны —Прямая, соединяющая вершину угла треугольника съ серединою противолежащей стороны, называется *равнодѣлящею стороны треугольника* (или *медіаною треугольника*) —По-



Къ № 289

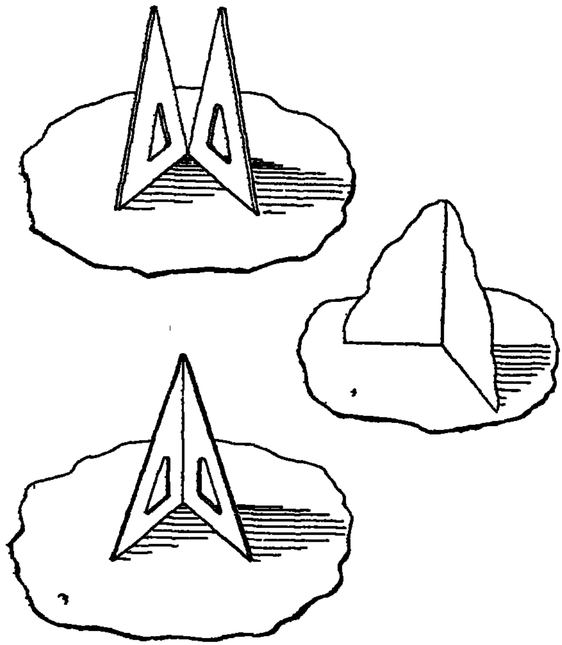
никовъ—не то же, что убѣдиться въ ней съ помощью вырѣзанныхъ изъ бумаги треугольниковъ Въ случаѣ благопріятныхъ результатовъ этой бесѣды, можно обратиться къ № 315а, т-е къ доказательству одной изъ довольно очевидныхъ истинъ —Отличными примѣрами «обмана зрѣнія» могутъ служить а) случай трехъ параллельныхъ, б) случай кажущагося смѣщенія параллельныхъ и в) случай сомнительнаго продолженія.



Къ № 315 (прим)

315а. Построить два треугольника по тѣмъ же условіямъ. которыя приведены въ предыдущемъ № 315 —Соединимъ вершины C и D прямой, перенумеруемъ углы при этихъ вершинахъ 1, 2, 3 и 4, и разсмотримъ эти углы — Уг. 1 = уг 3, а уг 2 = уг. 4, стало-быть, весь уголъ при вершинѣ C = всему углу при вершинѣ D. — Какіе же у насъ получились треугольники? (Треугольники, у которыхъ двѣ стороны AC и BC порознь равны сторонамъ AD и BD, а углы C и D тоже равны между собою) — Равны ли треугольники между собою?

Въ случаѣ если это несвоевременно, можно отложить доказательство этой теоремы до болѣе благопріятнаго времени, когда вообще пойдетъ рѣчь о доказательствѣ всѣхъ извѣстныхъ ученикамъ геометриче-



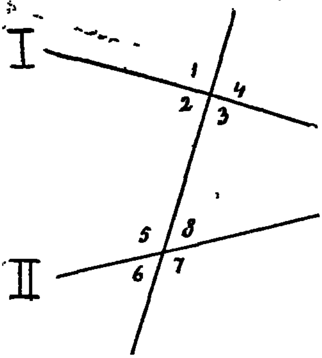
Къ №№ 331б и 331в

для образованія которыхъ и дошкольный, и внѣшкольный опытъ даетъ много матеріала, и не воспользоваться имъ, по меньшей мѣрѣ, неразсудительно.

§ 5. Параллельныя и не параллельныя прямыя.

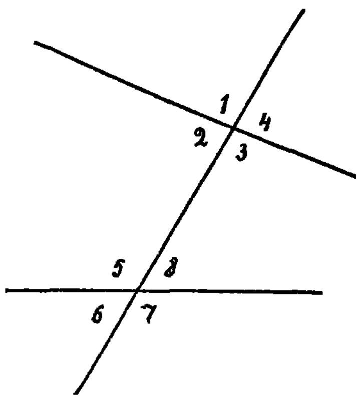
341. Взять на безконечной прямой въ плоскости двѣ точки, черезъ нихъ, въ той же плоскости, провести двѣ конечныя, не пересѣкающіяся на чертежѣ, прямыя и продолжить ихъ въ такихъ направленіяхъ, чтобы онѣ пересѣклись, если онѣ въ предѣлахъ чертежа не пересѣкаются, отдать себѣ отчетъ въ томъ, по которую сторону первой безконечной прямой онѣ пересѣклись бы, если бы ихъ можно было продолжить какъ угодно далеко. — Взять на прямой такъ, чтобы остальныя двѣ стороны имѣли одно и то же направленіе — Сдѣлать это не на-глазъ, а съ помощью линейки и *циркуля* —Для этого необходимо, чтобы углы эти были равны между собою — Необходимо, чтобы стороны были одинаково «наклонены» къ данной прямой

357. Начертить двѣ, не пересѣкающіяся на чертежѣ, прямыя и пересѣчь ихъ третьею прямою — Сколько образовалось угловъ? (8) — Перенумеровать ихъ —1-й, 2-й, 5-й и 6-й лежатъ по одну сторону сѣкущей —1-й и 6-й — внѣшніе углы, лежащіе по одну сторону сѣкущей, 2-й и 5-й — внутренніе углы, лежащіе по одну сторону сѣкущей — 4-й, 3-й, 8-й и 7-й? — Какіе углы—4-й и 7-й?—3-й и 8-й?— Углы 1-й, 4-й, 6-й и 7-й—внѣшніе углы, а 2-й, 3-й, 5-й и 8-й?—1-й и 7-й—внѣшніе «накрестъ-лежащіе» углы, 4-й и 6-й — тоже — А 2-й и 8-й? — А 3-й и 5-й?



Къ № 357

360. Начертить двѣ, не пересѣкающіяся на чертежѣ, прямыя, пересѣчь ихъ третьей, перенумеровать углы. — 1-й уголъ лежитъ поверхъ первой прямой и слѣва сѣкущей. — Какой уголъ лежитъ поверхъ второй прямой и тоже слѣва сѣкущей? (5-й).—Углы 1-й и 5-й называются въ этомъ случаѣ *соотвѣтственными углами.* — А уголъ

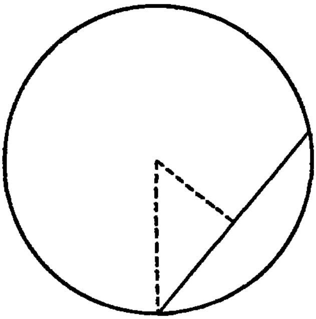


Къ № 360.

зованы углы 1-й и 2-й (Они образованы прямыми линіями, порознь взаимно-перпендикулярными) —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, подобны ли эти два треугольника —Въ какомъ случаѣ они равны между собою?—Какія стороны этихъ двухъ треугольниковъ — сходственныя (соотвѣтственныя)?

Если возможно, то слѣдуетъ не только вывести относящіяся сюда пропорціи, но и проработать ихъ какъ слѣдуетъ Въ случаѣ невозможности послѣдняго, Лучше пропорціи не выводить

402д. Начертить окружность, провести изъ какои-нибудь ея точки касательную и хорду, центръ соединить съ точкой касанія, изъ центра провести къ хордѣ перпендикуляръ, отдать себѣ отчетъ въ томъ, какіе углы равны между собою, и какое отношеніе существуетъ между числомъ градусовъ угла, образованнаго хордой и касательной, и числомъ градусовъ дуги, стягиваемой этой хордою



Къ № 402д

404. Начертить треугольникъ, раздѣлить одну изъ его сторонъ пополамъ, изъ точки дѣленія провести прямыя, параллельныя каждой изъ остальныхъ двухъ сторонъ —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, на какія двѣ части раздѣлятся вторая и третья стороны

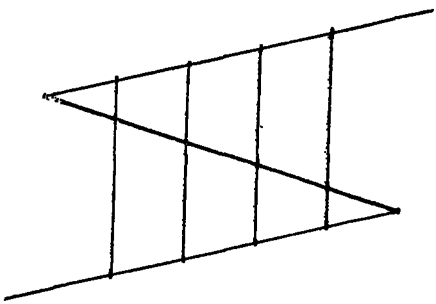
406. Начертить рядъ параллельныхъ прямыхъ на одинаковомъ одна отъ другой разстояніи, пересѣчь ихъ нѣсколькими сѣкущими въ разныхъ направленіяхъ, отдать себѣ отчетъ въ томъ, на какія части каждая сѣкущая раздѣлятся этими параллельными прямыми

408. Начертить уголъ, отъ вершины его на одной изъ сторонъ отложить послѣдовательныи рядъ одинаковыхъ отрѣзковъ, изъ ихъ концовъ провести рядъ параллельныхъ прямыхъ, пересѣкающихъ вторую сторону угла

410. Начертить двѣ взаимно-параллельныя прямыя, отложить на каждой изъ нихъ одинъ и тотъ же отрѣзокъ прямой и соединить концы ихъ двумя, взаимно не пересѣкающимися, прямыми

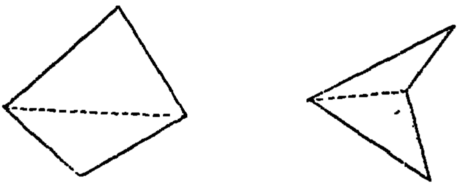
422. Начертить двѣ взаимно-параллельныя прямыя, отложить на каждой изъ нихъ послѣдовательный рядъ одинаковыхъ отрѣзковъ и соединить послѣдовательно первую точку одной прямой съ первой точкой второй, вторую точку первой прямой—со второй точкой второй прямой, и такъ далѣе —Пересѣчь этотъ рядъ прямыхъ линій какою-нибудь прямою и отдать себѣ отчетъ въ томъ, на какія части раздѣляется эта прямая на одинаковыя или разныя

424. Дана конечная прямая, принять ея начало за вершину остраго угла, изъ конца прямой провести прямую въ направленіи, прямо противоположномъ направленію второй стороны начерченнаго угла, отъ вершины каждаго изъ угловъ по сторонамъ, имѣющимъ прямо-противоположныя направленія, отложить одинаковое число равныхъ между собою отрѣзковъ, соединить ихъ концы такимъ образомъ, какъ это показано на чертежѣ (не стоитъ описывать), и отдать себѣ отчетъ въ томъ, на сколько частей раздѣлена данная конечная прямая, и въ томъ, равны ли между собою эти части, или нѣтъ

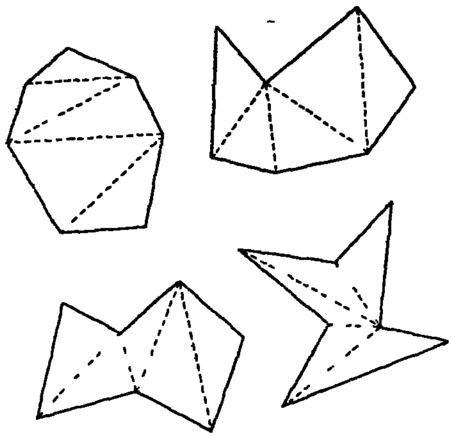


Къ № 424

какъ-разъ суммѣ угловъ многоугольника? — Начнемъ съ четыреугольника. — Перейдемъ къ пятиугольникамъ. — Въ четыреугольникѣ надо провести одну діагональ, въ пятиугольникѣ — двѣ. — Возьмемъ шестиугольники. — Треугольниковъ — четыре. — Пусть даны еще семиугольники. — Въ семиугольникахъ такихъ треугольниковъ можетъ быть только пять. — Замѣтьте въ многоугольникѣ число та-



Къ № 461

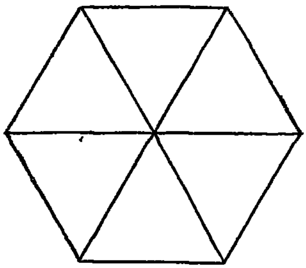


Къ № 461

кихъ треугольниковъ, въ которыхъ сумма угловъ равна какъ-разъ суммѣ угловъ многоугольника, на двѣ единицы меньше числа угловъ многоугольника.

Полезно показать, что если проводить діагонали «зря», то сумма угловъ всѣхъ треугольниковъ можетъ оказаться иною, чѣмъ сумма внутреннихъ угловъ многоугольника.

***494б.** Построить нѣсколько одинаковыхъ равносторонних треугольниковъ и изъ нихъ сложить многоугольникъ тѣмъ же способомъ — Чему равенъ каждый уголъ треугольника? (60°) —Сколько понадобится треугольниковъ для этого построенія? (6)



Къ № 494б

***494в.** Придумайте еще одинаковые равнобедренные треугольники, изъ которыхъ можно было бы составить многоугольникъ въ родѣ ранѣе построенныхъ (Равнобедренные треугольники, въ которыхъ уголъ при вершинѣ равенъ $22\frac{1}{2}^0$, легко построить, такъ какъ легко раздѣлить уголъ въ 45^0 пополамъ) — Еще!

***494г.** Чѣмъ отличается каждый изъ построенныхъ многоугольниковъ отъ другихъ? (Тѣмъ, что въ немъ всѣ стороны равны между собою) —Вычислить чему равенъ каждый уголъ въ *этихъ* многоугольникахъ

Въ четыреугольникѣ	$45^0 + 45^0 = 90^0$
„ восьмиугольникѣ	$[(180^0 - 45^0)\ 2] \times 2 = 135^0$
„ шестиугольникѣ	$60^0 + 60^0 = 120^0$

495. Если въ многоугольникѣ всѣ стороны равны между собою и всѣ углы тоже между собою равны, то многоугольникъ называется *правильнымъ* —Поэтому, равносторонній треугольникъ можно называть также *правильнымъ* треугольникомъ —Квадратъ—правильный четыреугольникъ

495а. Построить правильный двѣнадцатиугольникъ — Это можно выполнить троякимъ образомъ· 1) съ помощью составляющихъ его равнобедренныхъ треугольниковъ, 2) съ помощью угла въ 150^0, и 3) построивши предварительно правильный шестиугольникъ —Почему уголъ правильнаго 12-ти-угольника равенъ 150^0?

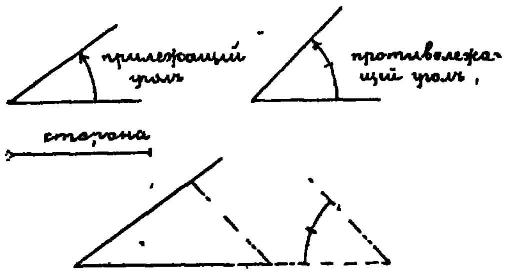
была уложена на окружности, это не то, что нужно геометріи —Ей нужно установить законъ, правило какъ *вычислить* длину окружности круга, если извѣстна длина радіуса этого круга

Ученики могутъ поработать съ ниткой Они должны также понять, что у окружности бо́льшаго радіуса «кривизна» меньше, что небольшія части ея ближе къ хордѣ, соединяющей концы этой части, чѣмъ части окружности меньшаго радіуса, соотвѣтствующія такимъ же хордамъ, что въ этомъ случаѣ «просвѣтъ» между хордой и дугой относительно меньше, что хорда ближе прилегаетъ къ дугѣ, что «стрѣлка» дуги меньше[1]) Все это—представленія простыя и ясныя, но они должны возникнуть путемъ опытовъ надъ окружностями разныхъ радіусовъ, и тогда *элементарное* понятіе о вычисленіи длины окружности будетъ болѣе согласно съ научными и психологическими требованіями вопроса, чѣмъ безъ этихъ опытовъ Такіе опыты сослужатъ большую службу, въ курсѣ систематическомъ, болѣе научному построенію этого тонкаго ученія.

508в. Возьмите хорды вмѣсто дугъ, измѣрьте и вычислите длину периметра этого вписаннаго многоугольника — Какую же единицу мѣры надо, стало-быть, взять. крупную или мелкую? (По возможности мелкую) —Получимъ ли мы истинную величину длины окружности? (Нѣтъ, не получимъ, потому что мы будемъ брать каждый разъ, вмѣсто дуги, только ея хорду, а хорда короче своей дуги) — Чѣмъ мельче будетъ единица мѣры, тѣмъ будетъ лучше

Надо научиться «укладывать», съ помощью циркуля, концы равныхъ хордъ, изъ которыхъ каждая равна единицѣ мѣры Затѣмъ учитель можетъ предложить къ слѣдующему разу рядъ соотвѣтствующихъ задачъ изъ книги для учениковъ, отнюдь не стараясь поскорѣе перейти къ голословному утвержденію о приблизительной величинѣ отношенія длины окружности къ

[1]) Стрѣлкой дуги, какъ извѣстно называется перпендикуляръ, возставленный изъ середины хорды до встрѣчи съ дугою



Къ № 513а.

513а. Построить треугольникъ по сторонѣ, прилежащему къ ней углу и противолежащему ей углу.

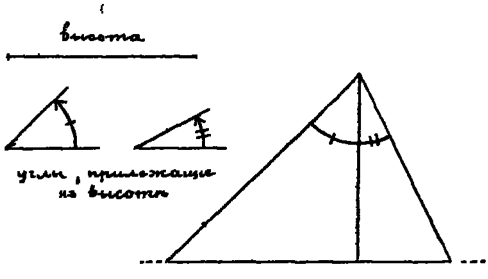
515. Изъ вершины угла остроугольнаго тр—ка опустить перпендикуляръ и разобраться въ этомъ, какіе углы прилежатъ къ этому перпендикуляру

515а. Изъ вершины остраго угла тупоугольнаго тр—ка опустить высоту этого тр—ка и разобраться въ томъ, какіе углы прилежатъ къ высотѣ

515б. Построить треугольникъ по высотѣ и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ Сколько рѣшеній допускаетъ эта задача?

517. Построить треугольникъ по высотѣ и обоимъ угламъ, ей противолежащимъ въ треугольникѣ

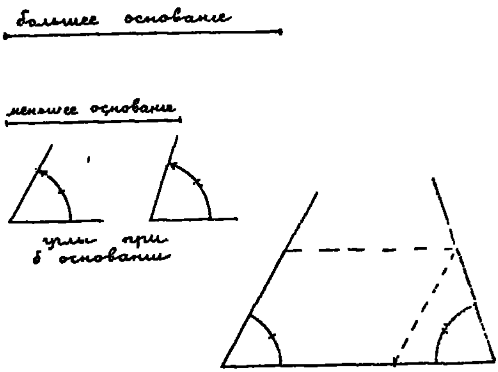
523. Построить треугольникъ по основанію, высотѣ и одной изъ остальныхъ двухъ сторонъ —Всегда ли эта за-



Къ № 513б

548. Построить трапецію по одному основанію, одной діагонали и двумъ не параллельнымъ сторонамъ —Построить трапецію по двумъ ея основаніямъ, одной діагонали и высотѣ.

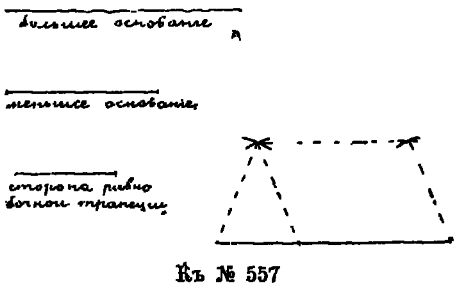
551. Построить трапецію по обоимъ основаніямъ и двумъ угламъ, прилежащимъ къ бóльшему изъ нихъ.



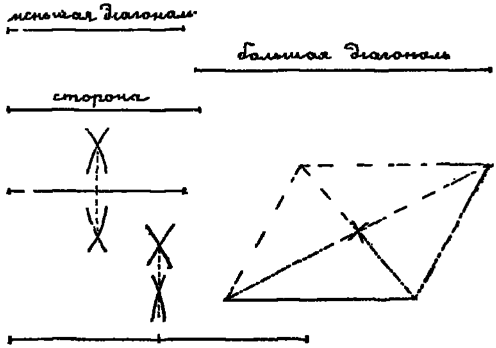
Къ № 551

557. Построить равнобочную трапецію по основаніямъ и одной изъ остальныхъ сторонъ

559. Построить равнобочную трапецію по основанію, одному углу и одной изъ не параллельныхъ сторонъ.



Къ № 557

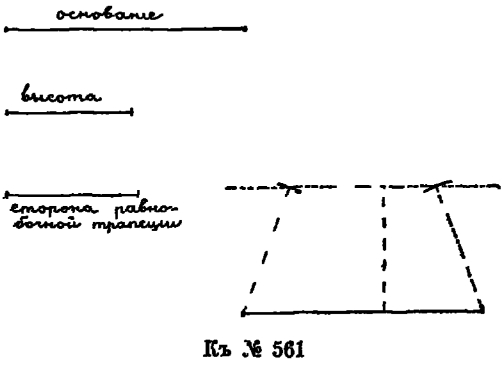


Къ № 547.

561. Построить равнобочную трапецію по одному основанію, одной изъ равныхъ ея сторонъ и высотѣ —Сколько рѣшеній у этой задачи?

563. Построить равнобочную трапецію по діагонали, высотѣ и одной изъ не параллельныхъ сторонъ

565. Построить равнобочную трапецію по слѣдующимъ условіямъ: меньшее основаніе равно каждой изъ не параллельныхъ сторонъ, а даны діагональ и уголъ, образованный діагоналю съ бо́льшимъ основаніемъ



Къ № 561

ремъ и понятій Эти знанія, какъ и многія другія, начинаются не съ опредѣленій, а съ наблюденій надъ окружающими человѣка предметами и явленіями. — Иногда полезно ввести терминъ «скелетъ» многогранника для обозначенія совокупности всѣхъ его реберъ

602в. Измѣрить (хотя бы приблизительно) площадь «боковыхъ» граней призмъ, имѣющихся подъ руками линейки, чертежнаго треугольника, не очиненнаго карандаша и т п.

602г. Тѣ призмы, у которыхъ всѣ грани—параллелограммы (т-е оба основанія тоже параллелограммы), называются иначе *параллелепипедами*, а изъ прямыхъ параллелепипедовъ тѣ, у которыхъ основанія — тоже прямоугольники, — не только прямыми, но и *прямоугольными параллелепипедами* — Форму прямоугольныхъ параллелепипедовъ обыкновенно придаютъ ящикамъ, коробкамъ, балкамъ, чертежнымъ линейкамъ, доскамъ для плотничныхъ и столярныхъ работъ, кирпичамъ — Нарисовать прямой, но не прямоугольный, параллелепипедъ и, полагая, что стороны его основаній равны 7-ми и 8-ми центиметрамъ, а высота 10 центиметрамъ, *начертить* его боковыя грани и вычислить боковую поверхность этого параллелепипеда

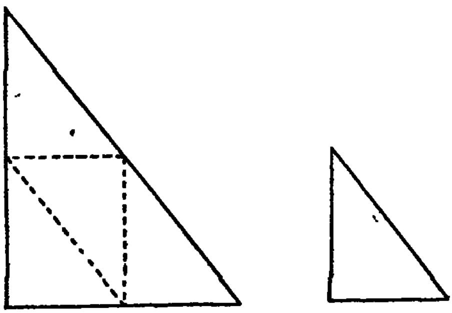
При этомъ учащіеся оказываются въ очень затруднительномъ положеніи, если у нихъ подъ руками нѣтъ соотвѣтствующаго нагляднаго пособія Дѣло въ томъ, что на рисункѣ, сдѣланномъ согласно требованіямъ «кавальерной проекціи», трудно понять, что основаніе не прямоугольнаго параллелепипеда — косоугольный параллелограммъ Поэтому слѣдуетъ прійти къ учащимся на помощь, указавъ имъ, что основаніе его — *косоугольный* параллелограммъ, равный отдѣльно начерченному, а высота равна данной прямой, и потребовавъ отъ нихъ, чтобы они не нарисовали, а начертили отдѣльныя боковыя грани параллелепипеда Еще лучше, если учитель также прибѣгаетъ къ соотвѣтствующему наглядному пособію Ему въ этомъ случаѣ придется, можетъ-быть, прибѣгнуть къ сырой картофелинѣ, къ куску мыла и т п Но бояться безпорядка грамма возможнѣе послѣ уясненія возможности раздѣлить всякій косоугольный параллелограммъ на части, изъ которыхъ можно составить равновеликій съ нимъ прямоугольный параллелограммъ съ тѣмъ же основаніемъ и той же высотой Это поучительное построеніе не зависитъ отъ того, которую изъ сторонъ косоугольнаго параллелограмма мы примемъ за его основаніе

615. Можно ли всякій косоугольный параллелограммъ замѣнить прямоугольникомъ, имѣющимъ то же основаніе и ту же высоту, если вопросъ идетъ о *площади* параллелограмма? (Можно) —Какъ *вычислить* площадь косоугольнаго параллелограмма? (Надо предварительно принять одну изъ его сторонъ, —*все равно какую,* —за основаніе, провести соотвѣтствующую высоту, измѣрить это основаніе и высоту одной единицей мѣры и «помножить основаніе на высоту»)

615а. Нарисовать наклонную призму (треугольную, четыреугольную или многоугольную) и отдать себѣ отчетъ въ томъ, изъ какихъ фигуръ состоитъ ея боковая поверхность и какъ вычислить величину этой поверхности

Вычертить сѣтку наклонной призмы (ср № 602г) на-память далеко не легко, поэтому лучше въ этомъ случаѣ пользоваться моделью, и упражненія въ этомъ далеко не безполезны также и для дальнѣйшаго курса стереометріи Вырѣзывая сѣтки изъ бумаги, ученики на этой ступени занимаются планиметріей, но пріобрѣтаютъ себѣ тѣ пространственныя представленія, которыя подготовляютъ ихъ къ воспріятію ученій о многогранникахъ со стереометрическихъ точекъ зрѣнія

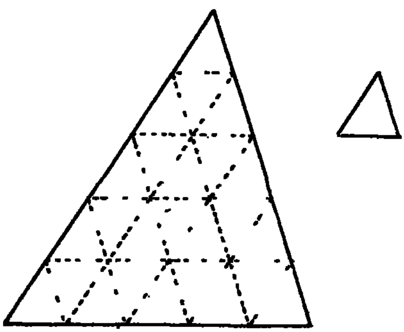
615б. Примите ребра («боковыя») наклонной призмы за основанія тѣхъ параллелограммовъ, которые составляютъ ея боковыя грани, а за высоты этихъ параллелограммовъ примите перпендикуляры, которые проведены слѣдующимъ образомъ изъ одной точки ребра любой грани опустите перпендикуляръ на другое ребро той же грани, изъ основанія этого перпендикуляра опустите перпендикуляръ на о пропорціональности площадей двухъ *квадратовъ* квадратамъ ихъ сторонъ была усвоена учащимися вполнѣ Кстати здѣсь, да и при вычисленіи площади квадрата, можно обратить вниманіе на то, почему произведеніе двухъ одинаковыхъ сомножителей, — 3×3, 7×7, 8×8, 19×19, — называются *квадратами*



Къ № 706.

706а. Построить два подобныхъ треугольника, *изъ которыхъ* въ одномъ сторона вдвое больше соотвѣтствующей стороны второго — Во сколько разъ площадь перваго *больше площади* второго? (Не въ 2 раза, а въ 4 раза) — Убѣдиться въ этомъ, умѣстивъ меньшій треугольникъ въ бо́льшемъ

706б. Построить два подобныхъ треугольника, въ которыхъ *сторона одного въ 5 разъ больше соотвѣтствующей* стороны другого — Во сколько разъ площадь перваго больше площади второго? (Не въ 5 разъ, а въ 25 разъ)

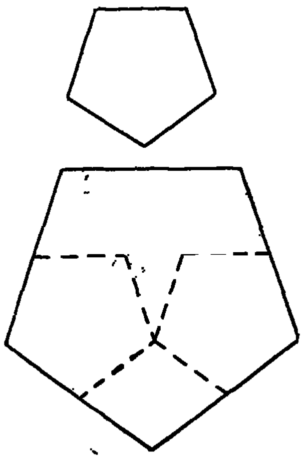


Къ № 706б

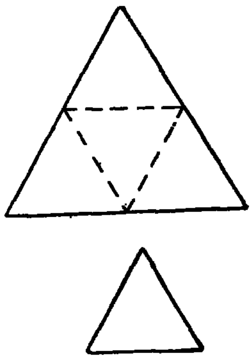
706в. *Построить* два подобныхъ треугольника, изъ которыхъ въ одномъ сторона содержитъ 7 ед длины, соотвѣтствующая ей сторона въ другомъ — *4 единицы длины* — Во сколько разъ площадь перваго больше площади второго?

угольникъ—въ большемъ пятиугольникѣ? (Безъ пробѣловъ не укладывается)

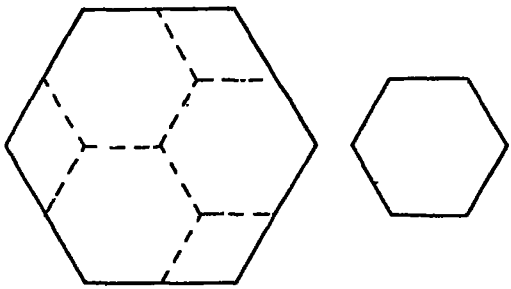
Этотъ вопросъ соприкасается съ весьма интереснымъ вопросомъ о такъ называемыхъ «паркетахъ» изъ одинаковыхъ фигуръ. Паркеты изъ одинаковыхъ фи-



Къ № 708



Къ № 706 (прим.).



Къ № 706 (прим.)

гуръ можно образовать а) изъ равныхъ между собою равностороннихъ, изъ одинаковыхъ равнобедренныхъ и изъ всякихъ равныхъ между собою треугольниковъ, б) изъ равныхъ между собою квадратовъ, в) изъ равцовъ этихъ прямыхъ возставить перпендикуляры такъ, чтобы они пересѣкались внутри построеннаго квадрата, и разобраться въ томъ, чему равны площади тѣхъ фигуръ, на которыя этотъ квадратъ раздѣлился

Подробности см въ книгѣ для учащихся Цѣль этихъ упражненій — планиметрическій смыслъ формулъ квадрата суммы двухъ чиселъ и квадрата суммы нѣсколькихъ чиселъ.

§ 10. Площадь круга.

713. *Найти квадратуру круга съ помощью линейки и циркуля невозможно.*—Но что это значитъ?—Это значитъ, что никакими «засѣчками» дугъ окружностей какихъ-либо круговъ, никакими прямыми линіями и ихъ продолженіями нельзя построить такого квадрата, котораго площадь навѣрное и точно равняется площади даннаго круга —Какъ мы возставляли перпендикуляръ къ прямой изъ точки, взятой на этой прямой?—Какъ дѣлили прямую пополамъ?—Какъ строили прямоугольный параллелограммъ, равновеликій данному треугольнику? (Все пользовались «засѣчками», т-е окружностями и прямыми линіями, т-е съ помощью циркуля и линейки) —Квадратуру круга, если мы хотимъ пользоваться только линейкой и циркулемъ, не прибѣгая ни къ какимъ другимъ инструментамъ и способамъ, *точно* найти невозможно.

713а. Начертить окружность круга радіусомъ, равнымъ семи единицамъ длины, провести два взаимно-перпендикулярныхъ діаметра и рядъ параллельныхъ имъ прямыхъ, одна отъ другой на разстояніи одной единицы длины.—Нѣкоторыя части круга будутъ квадратами, а другія ограничены также дугами окружности —Полные квадратики перенумеровать 1, 2, 3, 4, 5 и т д, а изъ неполныхъ, ограниченныхъ длина *окружности* круга $=$ 28 вершк $\times \frac{22}{7} =$ 88 вершк,

площадь круга $=$ 88 кв вершк $\times 7 =$ 616 кв вершк — Во сколько разъ площадь круга больше площади квадрата, построеннаго на радіусѣ? — Отвѣтъ

616 кв вершк 14^2 кв вершк $=$ 616 196

или 616 кв. вершк. : 196 кв вершк $= \frac{22}{7}$

— Изъ другихъ примѣровъ получится то же

Эти чисто-ариѳметическія вычисленія необходимы ранѣе преобразованій буквенныхъ выраженій, соприкасающихся съ этими вопросами и приведенныхъ въ слѣдующихъ двухъ нумерахъ

722а. Если длина радіуса круга равна R единицамъ длины, то длина окружности круга равна

$$R \text{ ед. длины} \times 2\pi$$

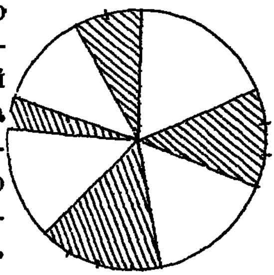
— Почему? (Потому что буквою π обозначають число, которое выражаетъ, во сколько разъ длина окружности больше длины діаметра, т-е больше удвоенной длины радіуса) —Чему равна площадь круга? (Она равна площади прямоугольнаго четыреугольника, въ которомъ длина основанія равна длинѣ окружности этого круга, а длина высоты половинѣ длины радіуса).—Въ какихъ единицахъ выражается площадь прямоугольника? (Въ квадратныхъ единицахъ) —Чему, стало-быть, равна площадь круга?—Она равна

$$C \text{ кв. ед} \times \frac{R}{2},$$

гдѣ буква C обозначаетъ число единицъ *длины*, содержащееся въ длинѣ окружности круга —Говорятъ короче. *площадь круга равна длинѣ его окружности, помноженной на длину половины радіуса*

722б. Чему равняется число C?—Число $C = R\ 2\pi$, т.-е числу единицъ длины, содержащемуся въ длинѣ ра-

730. Часть круга, заключенная между двумя его радіусами и дугою, соединяющею ихъ концы, называется, какъ извѣстно, *секторомъ* круга.—Начертить окружность круга и провести въ ней два радіуса, сколько образуется секторовъ круга?—Начертить окружность круга, взять на ней двѣ дуги изъ которыхъ одна въ 2 раза (3, 4, 5 разъ) больше другой, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, во сколько разъ площадь каждаго изъ нихъ больше площади другого, или какую часть площади каждаго изъ нихъ составляетъ площадь каждаго другого



Къ № 730

734. Начертить окружность круга радіусомъ, равнымъ 14 *мм*, секторъ круга, котораго дуга содержитъ 60^0, и вычислить, чему, приблизительно, равна площадь сектора, принявъ за приближенное значеніе числа π число $3^1/_7$. (Намекъ чему равна площадь всего круга?)

736. Начертить окружность радіусомъ, длина котораго равна R единицамъ длины, и опредѣлить 1) чему равна длина всей окружности, 2) чему равна длина дуги въ 1^0 и 3) чему равна длина дуги въ n^0.—Найти отношеніе длины этой дуги къ длинѣ радіуса.—Это отношеніе есть отвлеченное число.—Опредѣлить это отвлеченное число для угла въ 60^0, въ 30^0, въ 15^0, въ 45^0, въ 57^0

На этой ступени можно вернуться къ понятію объ «отвлеченной мѣрѣ» угла, о «радіанѣ» и объ отношеніи даннаго угла къ радіану. Само собою разумѣется, что для этого понятія требуются, даже при достаточномъ математическомъ развитіи учениковъ, многочисленныя практическія упражненія, приведенныя, въ общихъ чертахъ, ниже

***736a.** Отношеніе длины дуги даннаго центральнаго угла къ длинѣ ея радіуса будемъ называть *отвлеченной* кое резюме. Это резюме, въ видѣ окончательныхъ формулъ, даетъ намъ равенство или уравненіе, существующее между двумя отвлеченными числами —Такое стремленіе отодвинуть слишкомъ отвлеченныя, на первыхъ порахъ, формулы на дальнѣйшія ступени курса ни мало не противорѣчитъ сокращеннымъ способамъ словесной формулировки относящихся теоремъ словами. «площадь треугольника равна *длинѣ* основанія на половину *длины* высоты» или даже словами. «площадь треугольника равна *основанію*, помноженному на половину *высоты*», и т. п Эти словесныя формулировки вводятся сознательно, притомъ сначала только для краткости, и учащимся это должно быть неоднократно внушаемо и повторяемо Формулы же обладаютъ не только краткостью, но и глубиной содержанія, на первыхъ ступеняхъ для учениковъ мало доступною —Употребленіе записей 5 арш $\times$ 5 арш и т п и, вообще, снабженіе линейныхъ единицъ мѣры наименованіями въ обоихъ сомножителяхъ отнесено къ книгѣ для учащихся. Учителю надо только почаще указывать, что записи этого рода именно и выражаютъ, что требуется вычислить *площадь* фигуры Опытъ показываетъ, что если сущность дѣла учащіеся поняли, то эти записи ихъ не затрудняютъ, особенно на высшихъ ступеняхъ основного курса —Гораздо важнѣе буквенныхъ формулъ вопросъ о такъ назыв измѣреніи выраженія *длины* какой-либо линіи и объ «измѣреніи» выраженія *площади* фигуры На этой ступени курса полезно указывать, что сколько бы сомножителей ни потребовалось для вычисленія *длины* линіи, только одинъ изъ сомножителей выражаетъ *длину*, и что сколько бы сомножителей ни потребовалось для вычисленія какой-либо *площади* или *поверхности*, такихъ сомножителей, которые выражаютъ длину, должно быть непремѣнно два —Что всякій объемъ представляетъ собою величину третьяго измѣренія, ученики узнаютъ впослѣдствіи. Это первоначальное понятіе объ «измѣреніи», будучи справедливо для всѣхъ формулъ этой ступени, является первымъ шагомъ къ усвоенію учащимися понятія объ однородности геометрическихъ формулъ.

поверхность второго тоже равна

$$15 \text{ кв мм} \times \frac{44}{7} \times 3,$$

т-е обѣ поверхности равны между собою —Да оно иначе и быть не могло $s_1 = 2\pi R\ h_1$, а $s_2 = 2\pi R\ h_2$, но, по условію, $h_1 = h_2$, а потому $s_1 = s_2$

Это замѣчательное свойство шаровой поверхности настолько для нея характерно, что не дать ему надлежащаго мѣста въ курсѣ было бы, въ смыслѣ образовательномъ, по меньшей мѣрѣ, не разсудительно Но при этомъ надо обратить вниманіе учениковъ и на то обстоятельство, что равенство высотъ двухъ несимметричныхъ шаровыхъ слоевъ влечетъ за собою не только равновеликость *поверхностей* поясовъ, опоясывающихъ эти слои, но также *неравенство* образующихъ дугъ этихъ равновеликихъ поясовъ или неравенство того, что въ просторѣчіи разумѣютъ подъ шириною пояса (Все это требуетъ, конечно, помощи наглядныхъ пособій) Въ противномъ случаѣ занимающее насъ свойство покажется ученикамъ либо не достопримѣчательнымъ, либо непонятнымъ, либо — въ лучшемъ случаѣ — курьезнымъ — Трудность проникновенія въ существо дѣла состоитъ, между прочимъ, въ томъ, что шаръ съ равноотдаленными одинъ отъ другого параллельными кругами, спроектированный на вертикальный экранъ, перпендикулярный къ плоскости экватора этого шара, даетъ въ проекціи кругъ, раздѣленный на полосы *одинаковой* ширины, но различной длины Одинаковая ширина этихъ полосъ сбиваетъ интуицію и сужденіе учениковъ съ вѣрнаго пути, когда они судятъ о поверхности шаровыхъ *поясовъ*, проектирующихся указаннымъ на чертежѣ образомъ въ видѣ плоскихъ фигуръ одинаковой ширины —Безъ наглядныхъ пособій этотъ вопросъ освѣщается не достаточно ярко и не приноситъ достаточной пользы

***858.** До сихъ поръ мы изучали площади нѣкоторыхъ фигуръ и поверхности нѣкоторыхъ тѣлъ —Площади какихъ фигуръ мы умѣемъ вычислять?—Поверхности какихъ тѣлъ

Буквы на чертежахъ

Буквами снабжать точки и линіи на чертежѣ надобно только въ тѣхъ случаяхъ, когда это особенно полезно Чертежи безъ буквъ часто способствуютъ болѣе быстрому соображенію, болѣе живому и быстрому воспріятію учениками существа дѣла и болѣе дѣятельной работѣ ихъ воображенія. Буквы же иногда только утомляютъ вниманіе учениковъ, не принося имъ никакой пользы.

Текстъ задачи.

Текстъ важнѣйшихъ задачъ учитель можетъ диктовать ученикамъ, но тогда онъ долженъ слѣдить за правильностью записей въ тетрадяхъ

Нумера со звѣздочками

Задачи и упражненія, нумера которыхъ снабжены звѣздочкой, учитель можетъ временно опустить съ тѣмъ, чтобы впослѣдствіи къ нимъ вернуться Нѣкоторые параграфы можно перемѣстить, цѣликомъ или частью, одинъ на мѣсто другого Но въ предѣлахъ одного и того же параграфа перемѣщать упражненія одно на мѣсто другого можно только съ нѣкоторою осторожностью. Особенно удобно перемѣщаются нумера, относящіеся до вычисленія нѣкоторыхъ площадей и объемовъ, до вычерчиванія „сѣтокъ“ нѣкоторыхъ многогранниковъ и до изображенія многогранниковъ по правиламъ кавальерной проекціи

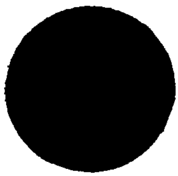
Мелкій шрифтъ

Болѣе мелкимъ шрифтомъ въ книгѣ для учителей отпечатаны методическія указанія относительно способовъ проработки того или иного геометрическаго вопроса и относительно цѣли и значенія нѣкоторыхъ упражненій

Наглядныя пособія

Необходимо, чтобы въ распоряженіи учителя и класса находились: 1) коллекція готовыхъ наглядныхъ пособій, тѣлесныхъ и проволочныхъ („скелетовъ“ многогранниковъ); 2) классные чертежные инструменты: циркуль, линейка, чертежный треугольникъ (послѣдніе два предмета — на всемъ протяженіи одинаковой толщины и безъ приколоченныхъ къ нимъ остріемъ карандаша вычертить («описать») окружность круга.—Неподвижная точка, въ которой стояло остріе циркуля,—«центръ» круга или окружности круга.—Короче, *съ помощью циркуля начертить окружность круга*.—Есть ли у отрѣзка прямой (или у конечной прямой) начало и конецъ, крайнія точки?—Можно ли конечную прямую продолжить?—Есть ли у «луча» начало?—Есть ли конецъ?—Можно ли лучъ продолжить?—Есть ли у безконечной прямой начало и конецъ? (Нѣтъ).—Взять точку на плоскости,—можно ли ее принять за начало окружности? (Можно).—Взять точку на плоскости, принять ее за начало окружности, а другую точку на плоскости—за центръ круга, и начертить окружность круга.

66а. Гдѣ было начало окружности круга?—Гдѣ ея конецъ? («Совпадаетъ», «сливается» съ началомъ).—Представьте себѣ, что на плоскости проведена безконечная прямая, что она сдѣлаетъ съ плоскостью? (Раздѣлитъ ее на двѣ части).—Раздѣляетъ ли окружность круга данную плоскость на двѣ части? (Раздѣляетъ. окружность выдѣляетъ изъ плоскости часть, которая и есть кругъ).—Отъ остальной части плоскости кругъ отдѣляется его окружностью.—Выдѣленная окружностью круга, опредѣленная часть плоскости и есть «кругъ».—Начертить кругъ, зачернить его и указать, гдѣ *окружность* круга?—Кругъ—«замкнутая» фигура, окружность круга—«замкнутая» линія.

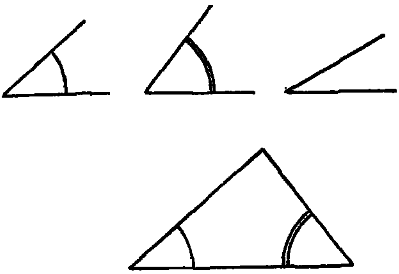

Къ № 66а.

66б. Провести окружность черезъ данную точку.—Что это значитъ? (Это значитъ провести такую окружность, на которой лежала бы данная точка).—Сколько окружностей можно провести черезъ данную точку? (Сколько угодно).—Проведите нѣсколько окружностей, проходящихъ черезъ данную точку, чтобы всѣ ихъ центры лежали на одной и

***158.** *Начерченъ кругъ, но центръ его не отмѣченъ; найти этотъ центръ* —Для этого отдадимъ себѣ отчетъ въ томъ, не долженъ ли этотъ центръ лежать на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ середины какой-либо хорды къ этой хордѣ? (Долженъ) —Что, стало-быть, наро раньше всего сдѣлать? (Провести хорду).—А потомъ что сдѣлать? (Изъ середины хорды возставить перпендикуляръ).—Много ли на этомъ перпендикулярѣ точекъ? (Безчисленное множество) —Есть ли среди этихъ точекъ одна, которая должна быть центромъ круга? (Есть) —Почему вы думаете, что есть? (Потому что каждая точка на этомъ перпендикулярѣ находится на равномъ разстояніи отъ концовъ хорды, и что всѣ точки, изъ которыхъ каждая находится на равномъ разстояніи отъ концовъ хорды, лежатъ на этомъ перпендикулярѣ, а центръ находится на равномъ разстояніи отъ концовъ хорды).—Нашли ли мы центръ? (Нѣтъ, не нашли) —Что же мы нашли? (Мы нашли одну прямую, на которой лежитъ центръ) —Какъ же найти центръ круга?—Для этого возьмемъ еще одну хорду, что мы съ нею сдѣлаемъ? (Раздѣлимъ пополамъ и изъ ея середины тоже проведемъ перпендикуляръ) —Лежитъ ли центръ круга и на этомъ перпендикулярѣ? (Лежитъ) —Поищемъ, гдѣ же центръ? И т д

***158a.** Начерчена дуга нѣкотораго круга, но центръ ея не отмѣченъ, найти этотъ центръ

Это первые сознательные опыты учениковъ въ использованіи свойствъ геометрическаго мѣста точекъ, удовлетворяющихъ данному условію, — опыты, основанные сначала на непосредственномъ усмотрѣніи Понятно, что они требуютъ особенно тщательной методической отдѣлки, только въ общихъ чертахъ намѣченной выше Постепенное пріученіе къ этому методу, конечно, безъ общихъ опредѣленій, можетъ придать основному курсу геометріи характеръ, который важнѣе, чѣмъ доказательства, — въ особенности тѣхъ теоремъ, которыя слишкомъ очевидны и на первыхъ порахъ нами —Въ чемъ же дѣло?—Дѣло, повидимому, въ томъ, что нельзя требовать, чтобы данные углы непремѣнно были порознь равны угламъ треугольника —Напримѣръ, нельзя требовать, чтобы два прямыхъ угла были углами треугольника —Замѣтьте. *два угла треугольника опредѣляютъ величину третьяго*, и третiй уголъ, стало-быть, можетъ быть только такой величины, какая возможна при условiи, что остальные два угла—углы треугольника — Два угла треугольника могутъ быть какiе угодно, лишь бы сумма ихъ не была больше суммы двухъ прямыхъ угловъ или равна суммѣ двухъ прямыхъ, третiй же уголъ треугольника *зависитъ* ужъ отъ величины этихъ двухъ угловъ.

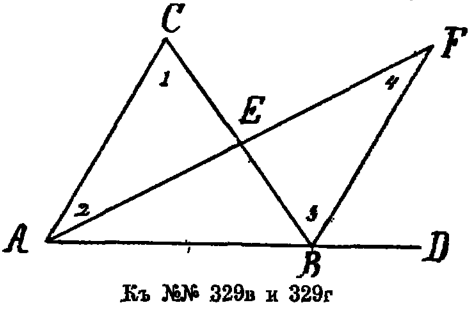


Къ № 263а.

Вопросъ этого упражненiя тѣснѣйше соприкасается съ вопросомъ о суммѣ угловъ треугольника, и въ то же время онъ безспорно соприкасается также съ задачей построенiя треугольника по сторонѣ и двумъ угламъ, къ ней прилежащимъ Но лучше въ свое время переходить къ ученiю о параллельныхъ линiяхъ и о суммѣ угловъ треугольника съ нѣкоторымъ *пониманiемъ* (хотя и не извѣстной въ подробностяхъ) функцiональной зависимости третьяго угла треугольника отъ величины остальныхъ двухъ угловъ его, чѣмъ безо всякаго разумѣнiя Не даромъ же Евклидъ въ своихъ «Началахъ» *предпосылаетъ* своей системѣ 11-ю свою аксiому Такая постановка вопроса тѣмъ нужнѣе, что только съ ея помощью построенiе треугольника по двумъ угламъ его и сторонѣ, лежащей между ихъ вершинами, получаетъ достаточное освѣщенiе и прочную основу Важно это равнымъ образомъ также для своевременнаго образованiя въ умѣ учениковъ первоначальнаго представленiя о *подобiи* тресебѣ отчетъ въ томъ, у какихъ треугольниковъ, вслѣдствіе сдѣланнаго построенія, равны порознь стороны (У треугольниковъ ACE и AEB ст AE «общая», ст CE = ст BE; у треугольниковъ ABC и ABF только ст AB общая и т д)

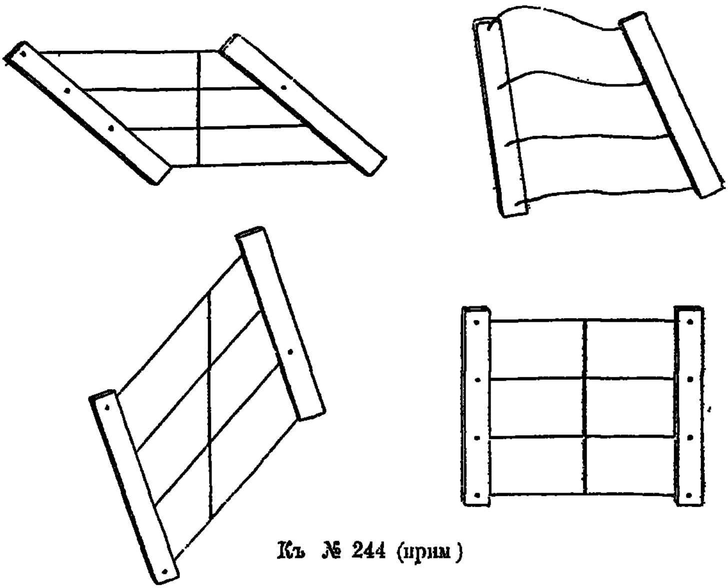
Здѣсь-то и обнаруживается чаще всего, что ученики впадаютъ въ рядъ логическихъ ошибокъ Если $\triangle ABC$ равнобедренный или близкій къ равнобедренному, въ которомъ AC приблизительно равна AB, то ученики иногда утверждаютъ, что углы при вершинѣ E прямые Еще чаще они готовы утверждать, что $AC = BF$, еще не доказавъ, что $\triangle AEC = \triangle BEF$, т-е ссылаясь на то, что не дано и что вытекаетъ изъ утвержденія, подлежащаго доказательству Предостерегать отъ подобныхъ логическихъ ошибокъ надо не мимоходомъ, а настойчиво, обращая вниманіе учениковъ именно на эту трудность Цѣль подобныхъ упражненій не въ томъ, чтобы поскорѣе убѣдить учащихся въ томъ, въ чемъ они и безъ того часто убѣждены, а въ томъ, чтобы научить ихъ расчлененію вопроса и должной осторожности въ сужденіяхъ и утвержденіяхъ

***329г.** Въ томъ же чертежѣ отыскать треугольники, въ которыхъ уголъ одного равенъ углу другого (Въ треугольникахъ ACE и ABE углы при точкѣ A, можетъ-быть, и не равны между собою,—мы объ этомъ ничего не знаемъ, то же относится къ угламъ CAE и EFB, то же—къ угламъ ACE и ABC, къ угламъ ACE и EBF Только $\angle AEC = \angle BEF$ навѣрное, потому что они — вертикальные)



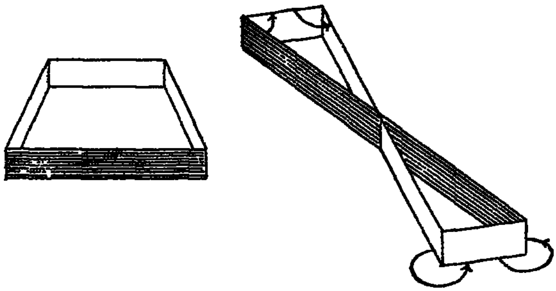
Къ №№ 329в и 329г

Научиться раздѣленію конечной прямой на нѣсколько одинаковыхъ частей учащимся слѣдовало бы гораздо раньше, чѣмъ они доберутся до занимающей насъ ступени курса геометріи Это было бы крайне полезно также при изученіи ими свойствъ обыкновенныхъ дробей, и не представляется никакихъ особенныхъ затрудненій къ тому, чтобы освоить учащихся съ этимъ «механизмомъ» дѣленія на какой угодно ступени обученія —Можно построить приборъ для подобнаго раздѣленія Онъ состоитъ изъ двухъ линеекъ съ нитями одинаковой длины между ними Когда нити натянуты, линейки параллельны, и нити также взаимно параллельны Конечная прямая, начерченная на бумагѣ и упирающаяся своими концами въ двѣ натянутыя нити, раздѣляется остальными промежуточными нитями на одинаковыя части —Линейки можно сдѣлать изъ картона, плотной бумаги и т п , можно вмѣсто линеекъ взять двѣ палочки, и къ нимъ прикрѣпить нити параллельно одна другой, и т п



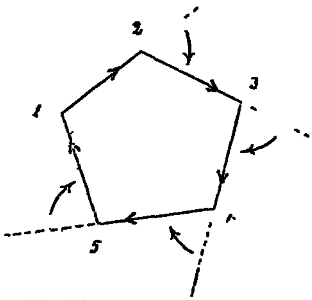
Къ № 244 (прим)

Въ многоугольникахъ не выпуклыхъ (или, какъ иногда говорятъ, со «входящими» углами) «изломъ» представляется

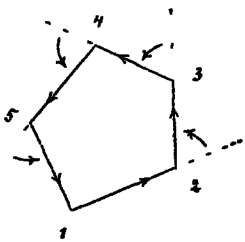


Къ № 448б (прим.)

мѣняющимъ свое направленіе.—Напр., на черт. III (стр. 157) «изломъ» идетъ такъ (наблюдатель двигается отъ 1-й точки до 2-й):

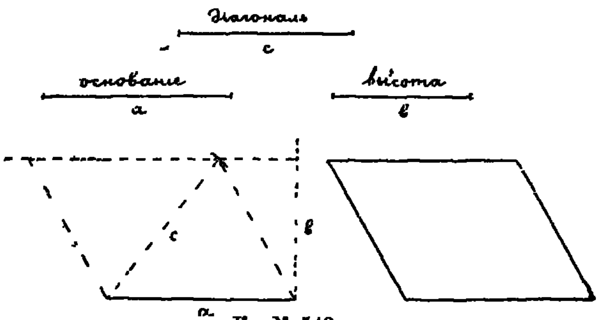


Къ № 450а, черт. I



Къ № 450а, черт. II

во	2-й	точкѣ	изломъ	въ	напр.	час.	стрѣлки,
въ	3-й	»	»	»	»	»	»
»	4-й	»	»	»	»	»	»
»	5-й	»	»	»	»	»	»
»	6-й	»	»	»	»	»	»
»	7-й	»	»	»	»	обратномъ,	
»	8-й	»	»	»	»	»	
»	9-й	»	»	»	»	час.	стрѣлки.

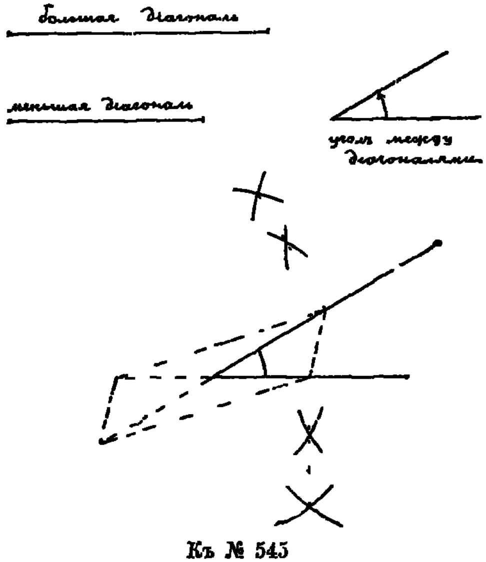


Къ № 543

изъ конца этой высоты прямую, параллельную основанію.

545. Построить параллелограммъ по двумъ діагоналямъ и одному изъ угловъ между ними

547. Построить параллелограммъ по сторонѣ и діагоналямъ.



Къ № 545

602а. Измѣрить длину, ширину и высоту пенала, записать относящіяся сюда числа и вычислить площадь верхней грани, площадь нижней, площадь боковой, площадь второй боковой грани, передней и задней — Нарисовать кубъ, — у него шесть одинаковыхъ, равныхъ граней, изъ которыхъ каждая — квадратъ, — и вычислить его боковую поверхность, если считать, что длина стороны каждаго квадрата равна 5-ти дюймамъ — Вычислить величину всей его поверхности — Что наз ребромъ многогранника?

602б. Вычислить боковую поверхность не очиненнаго карандаша, у котораго шесть боковыхъ граней и два шестиугольныхъ основанія, если извѣстно, что высота (длина) его равна 75 мм , а длина основанія каждой грани 3,5 мм — Имѣетъ ли карандашъ форму многогранника? — Если въ многогранникѣ основанія — равные между собою треугольники или многоугольники съ соотвѣтственно параллельными сторонами, а боковыми ребрами служатъ прямыя линіи, соединяющія вершины соотвѣтственно равныхъ угловъ оснований, то такой многогранникъ называется *призмой* — Имѣетъ ли сигарный ящикъ призматическую форму? — Всякій ли параллелепипедъ представляетъ собою призму? — Стороны граней призмы, за исключеніемъ сторонъ обоихъ основаній, называются боковыми ребрами этой призмы — Показать всѣ ребра призмы и боковыя ея ребра — Если боковыя ребра призмы перпендикулярны къ плоскостямъ основаній, то призма называется «*прямою*» — Возможны ли не прямыя («косыя») призмы? — Отрѣжьте отъ карандаша кусокъ «вкось» съ одной стороны и параллельно — съ другой)

Полная наглядность, изобильные примѣры изъ жизни, многочисленныя модели (изъ дерева, глины, картофеля, папки) обязательны на этой ступени Полезны упражненія въ лѣпкѣ моделей, а не только словесныя опредѣленія Выклеиваніе моделей учениками изъ папки и бумаги можетъ быть крайне полезно для полнаго уразумѣнія почти всѣхъ стереометрическихъ теоесли буква *a* обозначаетъ число вершковъ, содержащееся въ основаніи, а *h*—число тѣхъ же единицъ длины, содержащееся въ высотѣ Сокращенныя записи дозволительны не на первыхъ ступеняхъ обученія

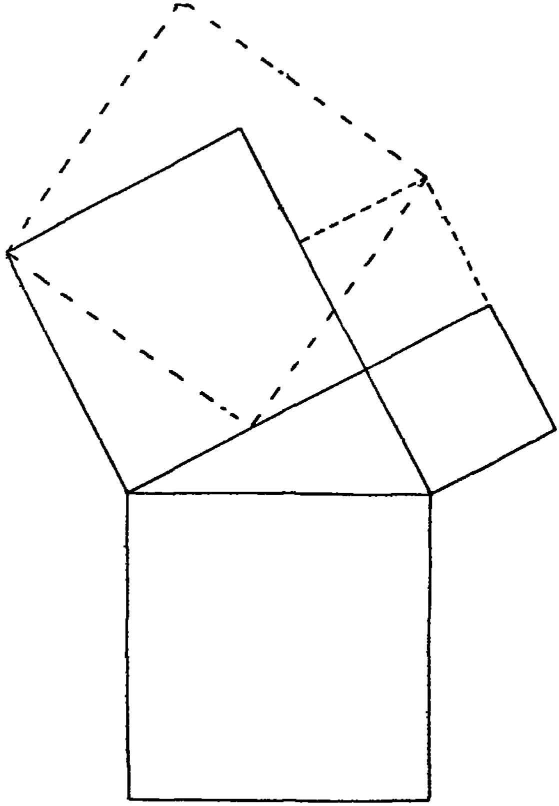
625 На какія двѣ фигуры діагональ параллелограмма раздѣляетъ этотъ параллелограммъ? — Равны ли эти треугольники? — Всякій ли треугольникъ составляетъ половину нѣкотораго параллелограмма? — Убѣдитесь въ этомъ чертежомъ, принявъ сторону треугольника за діагональ нѣкотораго параллелограмма — Что отсюда слѣдуетъ, если имѣть въ виду *площадь* треугольника?—Какъ вычислить площадь *даннаго* треугольника? (Вычислить площадь параллелограмма, у котораго то же основаніе и та же высота, что у даннаго треугольника, и полученный результатъ раздѣлить пополамъ) —Чему, стало-быть, равняется площадь треугольника?

Здѣсь точно такъ же, какъ и при проработкѣ № 621, слѣдуетъ писать, что площадь треугольника, въ которомъ длина основанія равна *a* вершк , а длина высоты *h* вершк , равна

$$\frac{a \text{ кв вершк} \times h}{2} = \frac{ah}{2} \text{ кв вершк}$$

626. Чему равна площадь треугольника? (Основанію его, помноженному на половину высоты, либо (что—то же) половинѣ произведенія изъ основанія на высоту) —Получится ли одно и то же число? (Получится) —Почему? (Потому что это все равно сначала одно число помножить на другое и *полученное* раздѣлить пополамъ, или первое число помножить на половину второго числа)

628. Видали ли вы когда-нибудь на рисункѣ изображеніе египетскихъ пирамидъ?—Какъ вы себѣ представляете треугольную пирамиду? (Многогранникъ, основаніе котораго убѣждаться въ томъ, что отъ приличнаго сложенія полученныхъ трехъ фигуръ, на которыя распалась сумма двухъ квадратовъ, получается, дѣйствительно, квадратъ, т.-е. прямоугольникъ съ одинаковыми сторонами. Этого достигнуть не трудно.



Къ № 678

675а. Разсмотрѣть, какимъ сторонамъ каждаго изъ треугольниковъ, отрѣзанныхъ отъ суммы двухъ квадратовъ, равны стороны слагаемыхъ квадратовъ и какой сторонѣ этого треугольника равна сторона квадрата, въ который

Іто—периметрамъ основаній пирамиды? (Окружности осно-аній) —Что—апоѳемѣ пирамиды? (Образующая) —Какъ вы-:ислить боковую поверхность усѣченнаго параллельно осно-анію прямого *конуса?*

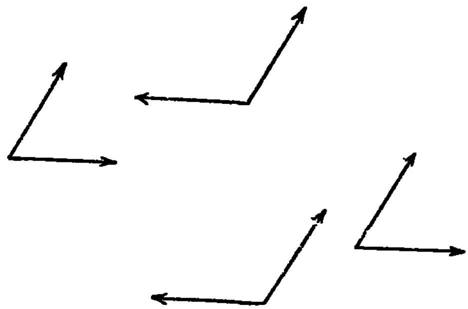
Параллели эти долженъ провести не только учитель, и дѣлать это онъ долженъ не разъ. Учащіеся тоже должны потрудиться надъ ихъ проведеніемъ —Особенно важно, что кругъ разсматривается какъ правильный многоугольникъ (хотя онъ не многоугольникъ), имѣющій безчисленное множество сторонъ (хотя многоугольникъ не можетъ имѣть безчисленнаго множества сторонъ)

790. *Основныя формулы этого отдѣла* Пусть буква R обозначаетъ отвлеченное число, выражающее, сколько азъ единица мѣры длины содержится въ длинѣ радіуса осно-анія цилиндра или конуса, буква R'—отвлеченное число, ыражающее, сколько разъ единица мѣры длины содержится ъ длинѣ радіуса средняго сѣченія прямого, усѣченнаго :араллельно основаніямъ, конуса; буква L — отвлеченное исло, выражающее, сколько единицъ длины содержится въ бразующей даннаго прямого цилиндра, прямого конуса или рямого, усѣченнаго параллельно основанію, конуса; буква C обозначаетъ отвлеченное число, выражающее, сколько диницъ длины содержится въ длинѣ окружности, буква K—отвлеченное число, выражающее, сколько кв единицъ одержится въ площади круга, греческая буква π—отвле-енное число, которое выражаетъ отношеніе длины окруж-ости круга къ длинѣ его діаметра, пусть, наконецъ, сово-упность буквъ $S_ц$ обозначаетъ отвлеченное число, обозна-ающее, сколько одноименныхъ квадратныхъ единицъ мѣры одержится въ боковой поверхности прямого цилиндра, со-окупность буквъ $S_к$ — отвлеченное число, которое выра-:аетъ, сколько одноименныхъ кв единицъ содержится въ оковой поверхности прямого конуса, и совокупность буквъ $S_{ус\ к}$ — отвлеченное число, выражающее, сколько одноименгоды цѣлесообразныхъ задачъ", надъ разработкою которой составитель теоретически и практически работаетъ въ теченіе свыше четверти вѣка *) Обѣ книги составлены такъ, чтобы. пользуясь ими, можно было начинать занятія геометріей съ учащимися 10-ти, 11-ти, 12-ти-лѣтняго возраста Возрастъ этотъ наиболѣе подходитъ для введенія учениковъ въ геометрическіе интересы Дѣти въ этомъ возрастѣ еще не способны заниматься геометріей въ обычной ея постановкѣ, при которой господствуютъ преимущественно діалектическія точки зрѣнія Имъ еще совершенно чуждъ интересъ къ аксіомамъ, опредѣленіямъ, теоремамъ, леммамъ, слѣдствіямъ, доказательствамъ, излагаемымъ догматически въ учебникахъ Имъ еще чуждо даже пониманіе того, что какія-то „истины" надо принимать безъ доказательства, а другія непремѣнно надо доказывать Они не могутъ въ этомъ, да и въ болѣе позднемъ возрастѣ, ясно понимать, для чего собственно доказываютъ такія очевидныя истины, какъ та, что конечная прямая короче ломаной, имѣющей тѣ же концы, что перпендикуляръ короче наклонной, что изъ точки, взятой на прямой въ плоскости, къ этой прямой въ той же плоскости можно провести только одинъ перпендикуляръ, и т п Они даже не въ состояніи понять стремленія учителя къ точной формулировкѣ опредѣленій и теоремъ, и т п То же самое отчасти справедливо и относительно большинства учащихся 14-ти-лѣтняго

*) „Геометрія на задачахъ" не имѣетъ ничего общаго съ обнародованнымъ мною въ 1892 году и нынѣ уже устарѣлымъ да и вообще неудачнымъ „Учебникомъ геометріи для среднихъ учебныхъ заведеній", о чемъ считаю своимъ долгомъ предупредить читателя — О необходимости курса геометріи, подобнаго пропагандируемому нынѣ въ Зап Европѣ, я говорилъ между прочимъ, на страницахъ „Русской Школы" свыше 20-ти лѣтъ тому назадъ, а также въ брошюрѣ своей подъ заглавіемъ „Цѣль и средства преподаванія низшей математики съ точки зрѣнія требованій общаго образованія" (Спб, 1892 г)

395а. Начертить треугольники разной величины, которыхъ стороны порознь параллельны, перебрать, съ помощью моделей, всѣ возможные случаи ихъ взаимнаго расположенія въ плоскости и въ пространствѣ

398. Начертить два угла, удовлетворяющіе слѣдующему условію. двѣ стороны имѣютъ одно и то же направленіе, а другія двѣ — прямо-противоположныя направленія — Чему равна сумма этихъ двухъ угловъ?



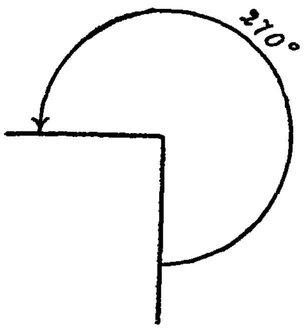
Къ № 398

400. Начертить двѣ параллельныя прямыя и третью, которая была бы параллельна второй изъ нихъ — Будетъ ли она параллельна первой?

400а. Найти параллельныя прямыя въ обыденныхъ предметахъ — Начертить прямую и двѣ симметричныхъ по отношенію къ ней параллельныхъ прямыхъ

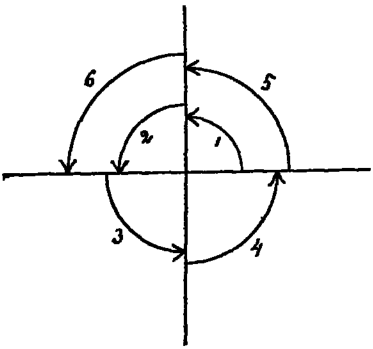
400б. Дана ось проекцій, провести отрѣзокъ прямой, къ ней параллельной въ той же плоскости, найти его проекцію на ось проекцій и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какъ велика проекція этого отрѣзка (Она равна данному отрѣзку)

Къ № 400б.

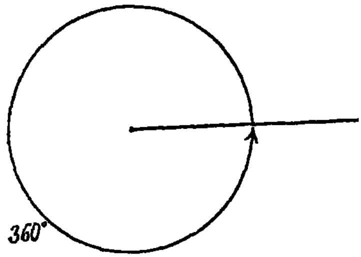


Къ № 459 черт *A*

вленія прямо-противоположныя; отъ прибавленія еще одного прямого получаемъ «уголъ», начерченный на черт *A*, отъ прибавленія еще одного угла получимъ «уголъ», начерченный на чертежѣ *B*, отъ прибавленія еще одного прямого угла получимъ уголъ, котораго одна часть (пятый прямой уголъ) совмѣстилась съ одною, уже имѣющеюся на-лицо, частью (съ первымъ прямымъ угломъ), наконецъ, прибавивъ еще одинъ прямой уголъ, получимъ «уголъ», котораго еще одна часть (шестой прямой



Къ № 459, черт *C*



Къ № 459, черт *B*

уголъ) совмѣстилась еще съ одною, уже имѣющеюся на-лицо, частью (а именно, со вторымъ прямымъ угломъ) — Лучше всего сумма выражается въ градусахъ $90^0 \times 6 = 540^0$, и можно поэтому сказать, что сумма угловъ выпуклаго пятиугольника равна 540^0 (черт *C*)

461. Сколько получается въ многоугольникѣ такихъ треугольниковъ, въ которыхъ сумма всѣхъ угловъ равна діуса, помноженному на 2π —Если вмѣсто буквы C поставить въ формулѣ площади круга значеніе этой буквы C, то получимъ, что площадь круга равна

$$R \text{ кв ед} \times 2\pi \times \frac{R}{2} \text{ или } R^2 \text{ кв ед} \times \pi$$

Содержаніе этихъ двухъ №№ *нуждается*, *во-первыхъ*, *во* многочисленныхъ предварительныхъ численныхъ примѣрахъ по типу № 722 и, во-вторыхъ, въ особенно тщательной методической отдѣлкѣ и многочисленныхъ упражненіяхъ учениковъ при учителѣ На этой ступени ученики впервые встрѣчаются *съ* вычисленіемъ такихъ величинъ, которыя предварительно не измѣрены непосредственно. Ибо въ этомъ случаѣ длина *окружности* непосредственно не измѣряется, а тоже вычисляется, притомъ только приблизительно, на основаніи ранѣе принятой на вѣру формулы —Ученики могутъ каждый изъ секторовъ, ими принятыхъ во вниманіе, отмѣчать, зачернивъ ихъ, а каждую дугу, ими принимаемую во вниманіе, вторично обвести, если возможно, цвѣтнымъ карандашомъ, и т п Однимъ словомъ, они должны непосредственнымъ чувственнымъ воспріятіемъ убѣждаться въ томъ, что они, дѣйствительно, постепенно приближаются къ площади круга, беря послѣдовательный рядъ площадей треугольниковъ, его приблизительно составляющихъ Но, конечно, невозможно опираться на непосредственное чувственное воспріятіе для доказательства права нашего на замѣну сектора прямолинейнымъ треугольникомъ Это можно постигнуть только воображеніемъ и силою усмотрѣнія (интуиціи) Послѣднему процессу указанная выше работа не только не препятствуетъ, а, наоборотъ, помогаетъ, если учащійся умомъ понимаетъ. 1) что неточность замѣны сектора прямоугольнымъ треугольникомъ не велика, 2) что онъ не умѣетъ этого доказать разсужденіемъ, 3) что доказательство этого существуетъ, и 4) что *формула* площади круга точна, хотя вычисленіе площади можно выполнить только приблизительно. —Послѣдній пунктъ особенно труденъ и требуетъ особеннаго вниманія въ связи съ 2-мъ и 3-мъ.

бою) —Какъ мы будемъ называть такой треугольникъ? (Равностороннимъ)

212. *Начертить треугольникъ, въ которомъ всѣ три стороны равны между собою, т-е равносторонній треугольникъ*

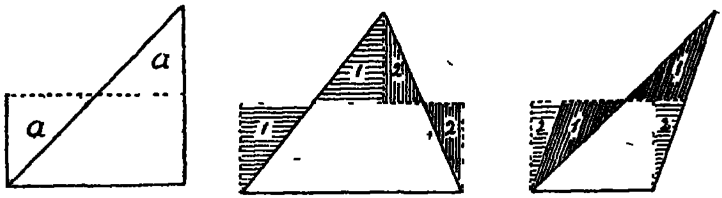
212а. Начертить нѣсколько равностороннихъ треугольниковъ съ одинаковыми сторонами во всѣхъ треугольникахъ.—Начертить нѣсколько равностороннихъ треугольниковъ, которые отличались бы одинъ отъ другого своими сторонами —Начертить два «совмѣстимыхъ» равностороннихъ треугольника —Начертить два *несовмѣстимыхъ* равностороннихъ треугольника —Похожи ли эти послѣдніе два треугольника одинъ на другой своей «формой» или не похожи?

> Это—первый шагъ къ образованію въ умѣ учениковъ *понятія* о возможности полнаго сходства двухъ фигуръ, отличающихся своими размѣрами, въ отношеніи *ихъ формы, каковое сходство въ наукѣ* и носитъ названіе «подобія» Начиная съ этого момента, учитель можетъ исподволь обращаться къ вопросу о сходствѣ и различіи въ *формѣ* фигуръ

215. Взять конечную прямую, принять одинъ ея конецъ за центръ и радіусомъ, бо̀льшимъ, чѣмъ эта прямая, начертить дугу, принять другой конецъ той же прямой за центръ, сдѣлать еще бо̀льшимъ радіусомъ засѣчку на первой дугѣ и соединить прямыми эту засѣчку съ концами взятой прямой. —Получится треугольникъ —Равны ли между собою какія-либо стороны этого треугольника? —Если всѣ стороны треугольника не одинаковы, то такой треугольникъ называется *разностороннимъ* —Начертить еще одинъ разносторонній треугольникъ

> Нѣкоторые термины должны быть придуманы самими учащимися Къ числу такихъ терминовъ могутъ принадлежать термины «треугольникъ», «разносторон-

шейся трапеціи.—Остроугольный треугольникъ можно разрѣзать сначала на два прямоугольныхъ, а потомъ ужъ поступать съ каждымъ изъ этихъ прямоугольныхъ треугольниковъ такъ, какъ раньше—Съ тупоугольнымъ можно поступить точно такъ же, опустивъ перпендикуляръ изъ вершины *тупого* угла на противолежащую сторону.—Нельзя ли поступить иначе?—Можно нѣсколько иначе раздѣлить наибольшую сторону его и еще одну сторону пополамъ, соединить середины ихъ прямою, обратить треугольникъ въ косоугольный параллелограммъ, а косоугольный параллелограммъ—въ прямоугольникъ—Какъ велика площадь треугольника? (Площадь треугольника равна площади такого параллело-



Къ № 621

грамма, у котораго основаніе такое же, какъ у треугольника, а высота равна половинѣ высоты треугольника).—Хорошенько обслѣдовать этотъ выводъ!—Какъ *вычислить* площадь треугольника? (Помножить его основаніе на половину высоты)—Какъ это понимать?—Чему равна площадь треугольника?—Въ какихъ единицахъ мѣры выражается площадь треугольника?

Впослѣдствіи можно установить условный смыслъ умноженія длины на длину, площади на длину и т п Но сначала учащіеся должны писать, что площадь треугольника, въ которомъ основаніе въ длину 7 вершк, а высота—6 вершк, равна

$$7 \text{ кв вершк} \times 3 = 21 \text{ кв вершк и вообще}$$

$$a \text{ кв вершк} \times \frac{h}{2} = \frac{a\ h}{2} \text{ кв вершк},$$

цамъ ребра, идущаго изъ вершины раздѣленнаго прямого угла основанія, въ направленіи движенія часовой стрѣлки (если смотрѣть сверху), и тогда вторая треугольная призма займетъ положеніе, намѣченное штрихованной фигурой — Пунктиромъ нарисовать полуокружности, которыя опишутъ при вращеніи концы сторонъ прямого угла каждаго изъ основаній повернутой треугольной призмы См. № 990

Не только деревянныя модели, но и вырѣзанныя изъ бумаги и скрѣпленныя какимъ-нибудь образомъ въ расходящихся граняхъ своихъ, модели прямыхъ треугольныхъ призмъ, достаточны для того, чтобы ученикамъ стала очевидной возможность составленія прямоугольнаго параллелепипеда изъ двухъ совмѣстимыхъ прямыхъ треугольныхъ призмъ, если только основанія ихъ прямоугольные треугольники Полезно изготовленіе моделей-скелетовъ изъ лучинокъ, скрѣпляемыхъ проволокой или ниткой

1005. Начертить два параллелепипеда одинъ—прямоугольный, а другой—прямой, но не прямоугольный, провести въ нихъ по одной діагональной плоскости черезъ два ребра, перпендикулярные къ основаніямъ параллелепипедовъ.

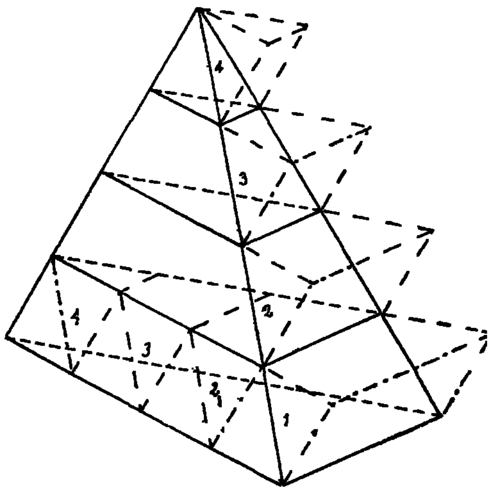
1007. Начертить *прямой* (но не прямоугольный) параллелепипедъ, провести въ немъ діагональную плоскость черезъ два ребра, перпендикулярные къ основаніямъ, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, совмѣстимы ли получившіяся при этомъ двѣ прямыя треугольныя призмы или не совмѣстимы.—Онѣ совмѣстимы —Замѣтьте *прямой,* хотя бы и не прямоугольный, параллелепипедъ діагональной плоскостью, *перпендикулярною къ основаніямъ,* раздѣляется на двѣ *совмѣстимыя* треугольныя призмы

1009. Начертить наклонный параллелепипедъ съ прямоугольнымъ основаніемъ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, совмѣстимы ли тѣ двѣ наклонныя треугольныя призмы, на которыя этотъ параллелепипедъ раздѣляется діагональною плоскостью. — *Вообще* онѣ не совмѣстимы

Для учениковъ важно развивать свое пространственное воображеніе, а не ограничиваться только общей теоремой, объединяющею всѣ случаи раздѣленія параллелепипеда діагональною плоскостью въ слѣдующей обобщенной формулировкѣ діагональная плоскость всякаго параллелепипеда дѣлитъ его на двѣ равновеликія призмы —При такой общей формулировкѣ, теорема эта оставляетъ совершенно незатронутыми вопросы о томъ, почему непремѣнно надо говорить только о равновеликости, а не о равенствѣ (совмѣстимости) этихъ призмъ, всегда ли эти призмы только равновелики, или же онѣ иногда бываютъ и равны между собою, а если и бываютъ равны между собою, то когда именно, и т д Нѣтъ сомнѣнія, что для цѣлей истиннаго математическаго образованія вниманіе къ этимъ вопросамъ весьма важно —Случай, когда основанія наклоннаго параллелепипеда ромбы и когда проекція одного изъ реберъ параллелепипеда на плоскость основанія совпадаетъ съ одною изъ діагоналей основанія, надо разсмотрѣть отдѣльно тогда діагональная плоскость, проходящая не черезъ это ребро, раздѣляетъ наклонный параллелепипедъ съ ромбическимъ основаніемъ на двѣ совмѣстимыя призмы —Это кстати выясняетъ и разнообразіе въ наклонѣ наклонныхъ параллелепипедовъ,—вопросъ очень важный для яснаго уразумѣнія вопроса объ объемѣ параллелепипеда

1010. Построить наклонный параллелепипедъ —Возможно ли, чтобы плоскости двухъ граней этого параллелепипеда были перпендикулярны къ плоскостямъ основаній? (Возможно).—Возможно ли, чтобы наклонный параллелепипедъ оказался прямымъ, когда за его основаніе примемъ другую грань? (Возможно) —Возможно ли, чтобы въ наклонномъ параллелепипедѣ основанія были прямоугольниками? (Возможно) —Возможно ли, чтобы никакія грани параллелепипеда не были перпендикулярны къ плоскости основанія? (Возможно).

Всѣ эти вопросы могутъ быть разрѣшаемы съ помощью нѣсколькихъ четвертушекъ бумаги, изъ котоусѣченной не параллельно основанію —Выясните, почему.— Многогранникъ, дополняющій усѣченную пирамиду до призмы съ тѣмъ же основаніемъ и тою же высотою, будемъ называть *дополнительной призмой* —Построить треугольную пирамиду и пристроить къ ней дополнительный многогранникъ —Что онъ собою представляетъ?



Къ № 1069

1069. Построить треугольную пирамиду, раздѣлить ее высоту на нѣсколько равныхъ частей, черезъ точки дѣленія провести плоскости, параллельныя основанію, а затѣмъ дополнить каждую изъ усѣченныхъ пирамидъ и «верхнюю» полную пирамиду ихъ дополнительными многогранниками — Разобраться въ томъ, что больше · сумма ли всѣхъ этихъ дополнительныхъ многогранниковъ или наибольшая призма, которой основаніе равно основанію данной призмы, а высота равна взятой долѣ высоты всей призмы —Эта призма больше —Чтобы въ этомъ убѣдиться, представьте себѣ, что она «открыта» сверху и что вы въ нее постараетесь положить

Центръ тяжести преподаванія началъ ариѳметики все-таки придется оставить въ *пониманіи смысла и цѣли ариѳметическихъ дѣйствій* и въ быстромъ, устномъ и письменномъ, возможно изящномъ и *сознательномъ* вычисленіи. Умѣніе достигнуть именно этой цѣли весьма простыми и *надежными средствами*, несомнѣнно, обнаруживается въ томъ мастерствѣ, съ которымъ расчлененъ въ «Задачникѣ для учениковъ» и въ тѣсно связанномъ съ нимъ «Задачникѣ для учителей» необходимый матеріалъ теоріи и практики ариѳметическихъ дѣйствій. Здѣсь всюду видна рука стараго, опытнаго учителя, имѣвшаго многосторонній педагогическій опытъ и умѣющаго понять требованія, налагаемыя на учителя возрастомъ ученика, мѣрою и способомъ пониманія содержанія ариѳметики («Русская Школа», № 3, за 1907 г.)

Въ «Геометріи на задачахъ» авторъ смѣлой рукой ставитъ преподаваніе начальнаго (*или пропедевтическаго*) и, *въ то же время, полнаго* курса геометріи на реальную почву, на почву наблюденія, опыта, непосредственнаго созерцанія (интуиціи). Мало того: по всей книгѣ разсыпаны *методическія указанія и намеки, которые во-время и кстати* подаютъ учителю руку помощи («Народное Образованіе», книга X за 1907 г.)

Можетъ-быть, для «современной школы» такая книга (Геометрія на задачахъ, книга для учителей) и подъ-стать, но въ правильно устроенныхъ учебныхъ заведеніяхъ преподаваніе по «правилу смѣшенія» не можетъ быть терпимо («Ж. Мин. Нар. Просв.», январь 1908 г., отзывъ г. В. Соллертинскаго.)

Въ разработкѣ курса (Геометрія на задачахъ, кн. для учителей) виденъ неутомимый труженикъ, регистрировавшій и заносившій въ сокровищницу *опыта всѣ случаи и шаги на своемъ многолѣтнемъ* педагогическомъ поприщѣ («Русск. Шк.», № 4 за 1908 г.)

Разбирать подробно достоинства предлагаемаго самоучителя (Геометрія на задачахъ, кн. для учащихся) значило бы писать о ней объемистый трактатъ («Русская Школа», № 4 за 1908 г.)

Трудъ г. Шохоръ-Троцкаго «Геометрія на задачахъ» составляетъ весьма цѣнный вкладъ въ нашу учебно-математическую литературу. Книга эта *заслуживаетъ полнаго вниманія гг. преподавателей* математики и вообще лицъ, которымъ дорого учебное дѣло въ Россіи («Вѣстникъ опытной физики и элементарной математики», № 464 за 1908 г.)

«Геометрія на задачахъ» не подходитъ ни подъ одну изъ программъ нашихъ школъ. Тѣмъ не менѣе, она можетъ явиться прекраснымъ подспорьемъ при прохожденіи курса какъ въ средней школѣ, такъ и въ го-

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

вопросовъ, разрабатываемыхъ или затрагивамыхъ въ этой книгѣ, и собственныхъ именъ, въ ней упоминаемыхъ

Числовыя обозначенія относятся къ нумерамъ задачъ — Методическія примѣчанія обозначены такъ прим

правильные многоугольники можно построить съ помощью линейки и циркуля, что не всякое уравненіе выше четвертой степени можетъ быть разрѣшено въ радикалахъ, и т п — Важно только, чтобы ученики не считали даннаго имъ *метода* разсмотрѣнія того или иного вопроса строгимъ *доказательствомъ* справедливости той или иной теоремы

ЗАКЛЮЧЕНІЕ.

1201. Напишите всѣ *формулы*, которыя вы знаете! — Сумма угловъ треугольника, многоугольника — Площади треугольника, прямоугольника, параллелограмма, правильнаго многоугольника, круга —Боковыя поверхности прямой призмы, прямого параллелепипеда, наклонной призмы, прямого цилиндра, правильной пирамиды, прямого конуса — Поверхность шара — Объемы — Пиѳагорова теорема — Квадратъ стороны, противолежащей острому углу треугольника — Квадратъ стороны, противолежащей тупому углу тупоугольнаго треугольника — Формулы для сторонъ правильныхъ многоугольниковъ треугольника, квадрата и шестиугольника — Формулы тригонометрическія

Обозначенія надо ввести единообразныя углы — буквами A, B, C, стороны — a, b, c, основаніе треугольника b, радіусъ описаннаго круга R, вписаннаго r, прямой уголъ прямоугольнаго треугольника A, гипотенуза a, высота H въ тѣлахъ и h въ треугольникѣ, периметры p и P, апоѳема прав пирамиды, ребро призмы и образующія цилиндра и конуса L, площади q и Q, длина окружности C, площадь круга K, и т д — Цѣль упражненій, въ родѣ приведенныхъ выше — восполненіе пробѣловъ въ знаніи учениковъ и приведеніе однородныхъ вопросовъ въ систему

1202. Какія задачи вы умѣете рѣшать *съ помощью линейки и циркуля?* — Перпендикуляръ къ прямой ! — Раздѣсо сферическимъ основаніемъ къ прямолинейному треугольнику или плоскому прямолинейному многоугольнику.—Что будетъ высотою такой (обыкновенной) пирамиды? (Прямая, весьма близкая, по длинѣ своей, къ радіусу шара) —Представимъ себѣ, что мы раздѣлили шаръ на неисчислимое множество центральныхъ пирамидъ со сферическими основаніями, и что мы всѣ эти пирамиды поставили вплотную основаніями одну къ другой, а вершинами—врозь, на плоскость стола —Получимъ тогда нѣкоторый участокъ плоскости съ поставленными на него «гвоздями» (трехгранными и многогранными), у которыхъ вмѣсто «головки» сферическое закругленіе —Объемъ каждаго такого «гвоздя» равняется нѣк. числу q_n (площади основанія), помноженному на $\frac{R}{3}$ —Почему? (Потому, что каждый такой гвоздь—почти пирамида, въ которой площадь основанія равна q_n, а высота R) —Получимъ, что объемъ всѣхъ этихъ пирамидъ или

$$V_{\text{шара}} = q_1 \frac{R}{3} + q_2 \frac{R}{3} + q_3 \frac{R}{3} + $$

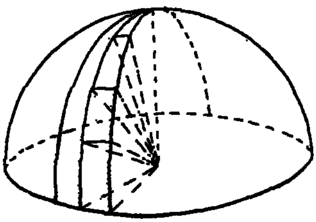
Это—объемъ всего шара —Взявъ сомножителя $\frac{R}{3}$ каждаго изъ этихъ слагаемыхъ общимъ множителемъ, получимъ

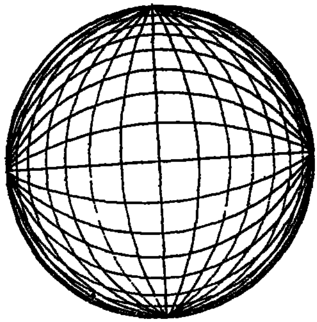
$$V_{\text{шара}} = (q_1 + q_2 + q_3 + \quad) \frac{R}{3}$$

—Но что представляетъ собою сумма, заключенная въ скобки? —Она представляетъ собою сумму сферическихъ основаній всѣхъ центральныхъ пирамидъ шара, т.-е всю поверхность шара —Обозначимъ всю поверхность шара совокупностью буквъ $S_{\text{шара}}$, получимъ, стало-быть, что

$$V_{\text{шара}} = S_{\text{шара}} \frac{R}{3},$$

или что объемъ шара равенъ поверхности его, помноженной меридіональныхъ плоскостей на части, когда это сдѣлано, черезъ обѣ точки пересѣченія перваго меридіана съ экваторомъ проведите по возможности больше плоскостей — Такъ же поступить еще съ двумя противоположными точками экватора, и т д — Тогда шаръ раздѣлится тоже на множество центральныхъ пирамидъ съ треугольными основаніями у полюсовъ и на множество центральныхъ пирамидъ съ четыреугольными и многоугольными основаніями





Къ № 1171

Съ этими точками зрѣнія на шаръ надо учениковъ сроднить на чертежахъ и рисункахъ и, если возможно, на наглядныхъ пособіяхъ и примѣрахъ Арбузъ, покупаемый «на-взрѣзъ», отличный примѣръ, если представить себѣ, что взрѣзъ дѣлается до самаго центра — Не надо избѣгать ни установки того факта, что равновелики, при такихъ способахъ раздѣленія шара на пирамиды со сферическими основаніями, которые предложены выше, только нѣкоторыя пирамиды, основанія которыхъ совмѣстимы, ни вопроса объ уменьшеніи объемовъ этихъ пирамидъ по мѣрѣ удаленія отъ экватора къ полюсамъ, ни даже вопроса о возможности вписать въ шаръ правильный многогранникъ съ нѣкоторымъ опредѣленнымъ числомъ сторонъ, которое можетъ быть равно только 4-мъ, 6-ти, 8-ми, 12-ти и 20-ти Этотъ послѣдній вопросъ, конечно, труднѣе остальныхъ Но, хотя вопросъ о возможныхъ правильныхъ (Платоновыхъ)

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

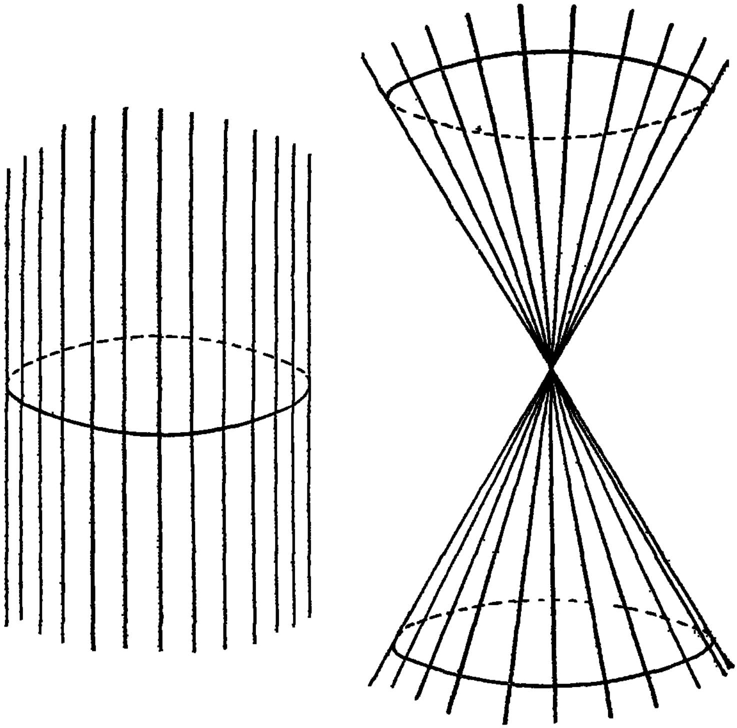
Что это значитъ?—Это значитъ, что если измѣрить радіусъ шара какою-нибудь единицею мѣры длины, и такихъ единицъ въ радіусѣ окажется R (гдѣ R можетъ быть числомъ цѣлымъ, дробнымъ или смѣшаннымъ), то объемъ шара *можно вычислить, помноживъ сначала* R^3 *одноименныхъ* кубическихъ единицъ мѣры на численное значеніе π, а полученное -на $\frac{4}{3}$ — Численные примѣры'

Ученикамъ полезно понять, что связь между *всякимъ* слоемъ прямого цилиндра и соотвѣтствующими слоями полушарія и прямого конуса дѣйствительно замѣчательна, если эти три тѣла удовлетворяютъ условіямъ № 1162 Изъ этихъ условій одно совершенно не обычно а именно, конусъ необходимо опрокинуть вершиной внизъ —Побольше вниманія надо удѣлить служебной теоремѣ («леммѣ») упомянутаго № 1162, лежащей въ *основѣ* дальнѣйшаго вывода —Усвоеніе формулы объема шара, въ случаѣ достаточнаго вниманія къ этой леммѣ, сильно помогаетъ выдѣлить особенную структуру формулы объема шара изъ числа другихъ формулъ, не столь сложныхъ, и поэтому легко учащимися смѣшиваемыхъ —Аналогичное справедливо также относительно упражненій, предшествующихъ формуламъ площади треугольника, длины окружности, площади круга, боковыхъ поверхностей правильной пирамиды и прямого конуса, объемовъ пирамиды и прямого конуса и т п Для лучшаго усвоенія этихъ' формулъ, надо обращаться не непосредственно къ нимъ, а къ предварительнымъ разсужденіямъ и теоремамъ, имъ предшествующимъ и лежащимъ въ ихъ основѣ —*Для* пріобрѣтенія учащимися большей власти надъ соотношеніями между цилиндромъ конусомъ и полушаріемъ полезно, чтобы они добились и такихъ результатовъ, по которымъ, при охарактеризованныхъ въ № 1162, условіяхъ

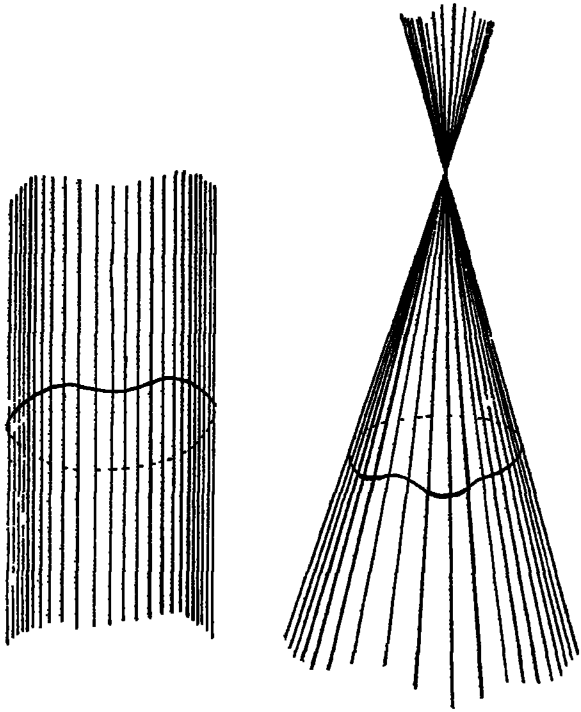
$$V_{\text{ц}} \quad V_{\text{к}} = 3, \quad V_{\text{пшр}} \quad V_{\text{ц}} = 2 \quad 3$$

$$V_{\text{пшр}} \quad V_{\text{к}} = 2, \quad V_{\text{пшр}} \quad 2 = V_{\text{к}} \quad \text{и т п.}$$

несовмѣстимы, и объ условіяхъ ихъ совмѣстимости. Наглядное пособіе — нѣсколько вязальныхъ спицъ, крѣпко перевязанныхъ ниткой или, еще лучше, мягкой мѣдной проволокой —Здѣсь же иногда возможно дать хотя бы отдаленное понятіе о такъ называемыхъ «линейчатыхъ» поверхностяхъ, описываемыхъ прямыми линіями при перемѣщеніи этихъ прямыхъ, въ пространствѣ Въ случаѣ если это сдѣлано, ученики въ состояніи свои понятія о плоскости, цилиндрической поверхности и поверхности конической подвести подъ болѣе общее понятіе о линейчатой поверхности.



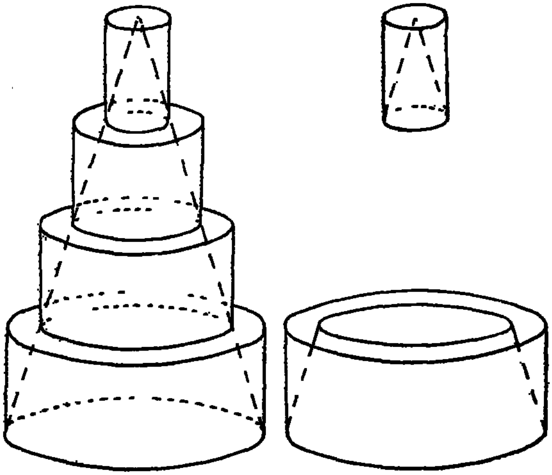
Къ № 1151а



Къ № 1151

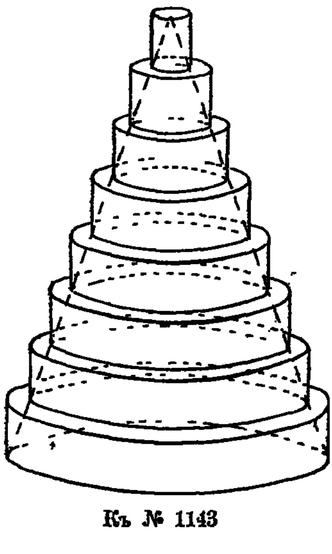
или не замкнуты, поверхности безразлично называются цилиндрическими или коническими

1151а. Если данъ кругъ и прямая, перпендикулярная къ его плоскости, и если она перемѣщается параллельно самой себѣ, такъ что одна ея точка совпадаетъ съ нѣкоторою точкою окружности круга, то какъ называть такую поверхность? — Ее можно называть цилиндрическою поверхностью «съ круговымъ, перпендикулярнымъ къ образующей, сѣченіемъ» — Какъ опредѣлить коническую поверхность съ круговымъ, перпендикулярнымъ къ ея оси, основаніемъ? — Нельзя ли для этого опредѣленія исходить изъ двухъ вза-



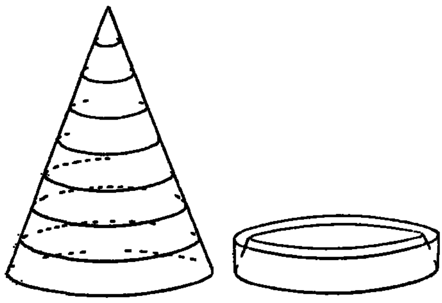
Къ № 1143

въ томъ, равновелики ли эти сѣченія (Равновелики). — Равны ли между собою объемы такихъ слоевъ этихъ тѣлъ, въ которыхъ основанія ихъ взяты на одномъ и томъ же разстояніи отъ основаній (или отъ вершинъ этихъ тѣлъ), т.-е если толщина (высота) слоевъ одинакова? (Равны) — Отдать себѣ отчетъ въ томъ, почему эти объемы одинаковы (Намекъ: для этого надо себѣ представить, что всѣ слои снова разрѣзаны на слои, еще болѣе тонкіе, и что около слоевъ пирамидъ описаны системы призмъ, а около слоевъ прямого конуса — соотвѣтствующія системы описанныхъ прямыхъ цилиндровъ)

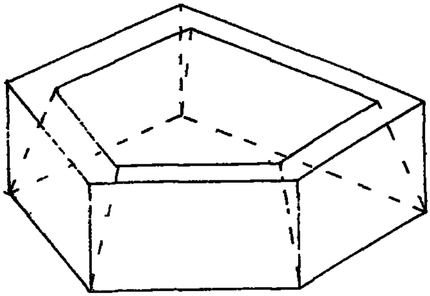


Къ № 1143

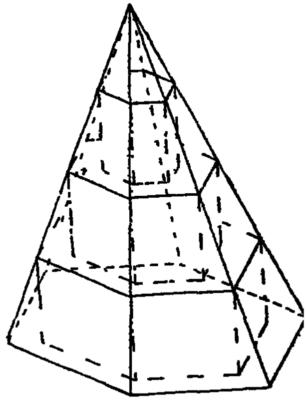
1143. Начертить прямой конусъ, раздѣлить его на нѣсколько слоевъ одинаковой высоты, проведя рядъ послѣдовательныхъ сѣченій, параллельныхъ его основанію, на одинаковомъ одно отъ другого разстояніи —Начертить, отдѣльно отъ него, наибольшій изъ усѣченныхъ конусовъ (наибольшій «слой»); «описать» около него прямой цилиндръ той же высоты, въ которомъ основаніе равно нижнему основанію слоя — Начертить прямой конусъ и описать около него прямой цилиндръ съ тою же высотой и съ основаніемъ, совпадающимъ съ основаніемъ конуса — Начертить прямой конусъ, раздѣлить его на четыре «слоя» съ одинаковыми высотами и описать около этого конуса систему описанныхъ прямыхъ цилиндровъ —Получится четыре «шашки», четыре цилиндра, малъ-мала-меньше — Нарисовать отдѣльно добавочныя части этой системы описанныхъ цилиндровъ — Сумма ихъ объемовъ меньше какого объема? (Меньше объема нижняго описаннаго цилиндра) —Чѣмъ больше прямыхъ цилиндровъ описано около даннаго прямого конуса, тѣмъ объемъ системы описанныхъ цилиндровъ ближе къ объему конуса — Можно ли разсматривать прямой конусъ, разрѣзанный плоскостями, параллельными основанію, на слои, какъ совокупность нѣкоторыхъ прямыхъ цилиндровъ? — Если слоевъ одинаковой высоты безчисленное множество, то можно говорить, что каждый слой — прямой цилиндръ.



Къ № 1142.



Къ № 1137



Къ № 1138

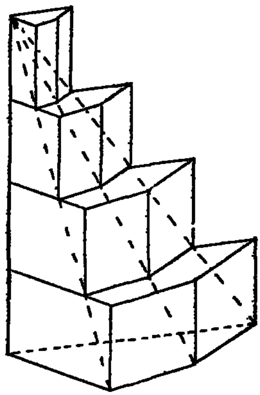
Въ случаѣ системы описанныхъ призмъ «ступени» пристроены, въ системѣ вписанныхъ призмъ ступени «выдолблены». — Не должно остаться для учащихся незамѣченнымъ, что всякая система вписанныхъ въ пирамиду призмъ является по отношенію къ нѣкоторой новой пирамидѣ системою описанныхъ, а всякая система описанныхъ около пирамиды призмъ—для нѣкоторой новой пирамиды—системою вписанныхъ

1141. Начертите двѣ треугольныя пирамиды съ одинаковыми высотами и равновеликими (несовмѣстимыми) основаніями, проведите въ нихъ на одинаковомъ разстояніи отъ основаній параллельныя имъ сѣченія и отдайте себѣ полный отчетъ въ томъ, равновелики ли эти сѣченія, равновелики ли объемы отсѣченныхъ ими пирамидъ и равновелики ли усѣченныя ими пирамиды

Затрудненія представляетъ только первый вопросъ, если ученики не достаточно хорошо разбираются въ вопросѣ объ отношеніи площадей двухъ подобныхъ фигуръ Поэтому, на всякій случай, слѣдуетъ вернуться къ этому послѣднему вопросу и заняться фигурами чертежей, подобныхъ относящемуся къ этому нумеру.

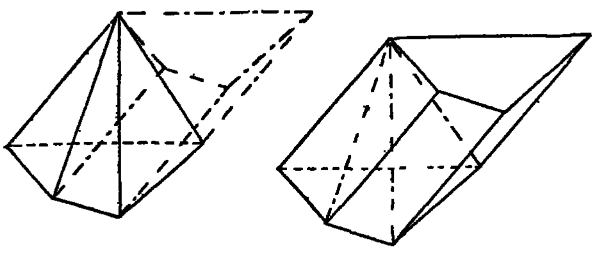
женъ По подобная экскурсія должна быть предпринята только въ связи съ аналогичными вопросами о площадяхъ прямолинейныхъ фигуръ и объ объемахъ параллелепипедовъ и призмъ. — *Полезно повести дѣло* такъ, чтобы ученики нашли нѣкоторое сходство между разсужденіемъ объ объемѣ пирамиды, какъ о нѣкоторомъ предѣлѣ, и опредѣленіями длины окружности, площади круга, боковыхъ поверхностей прямого цилиндра, прямого конуса, поверхности шара и объема прямого цилиндра Это сближеніе важно не только съ практической точки зрѣнія, но особенно въ образовательномъ смыслѣ

1127. Начертить четыреугольную пирамиду, раздѣлить ее на «слои» одинаковой высоты и то же сдѣлать съ пятиугольной пирамидой —Начертить усѣченную параллельно основанію четыреугольную пирамиду и дополнить ее такими призмами, чтобы получилась призма — Начертить четыреугольную пирамиду и дополнить ее такими многогранниками, чтобы получилась призма.



Къ № 1127

Если упражненія №№ 1067—1076 учениками исполнены старательно, то № 1127 для них занимателенъ,



Къ № 1127.

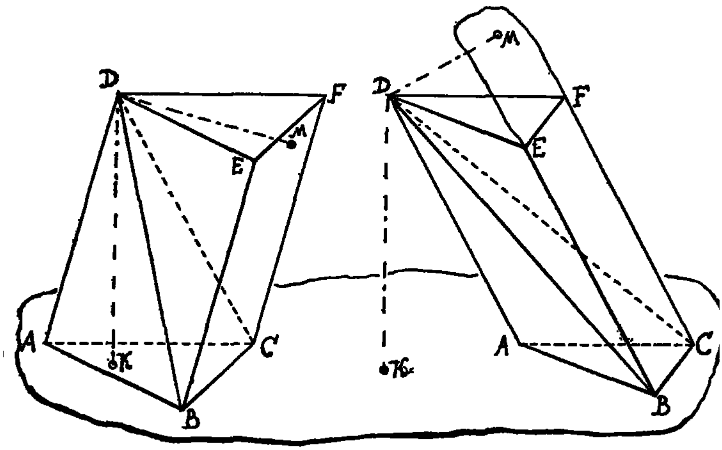
нулю Аналогичное справедливо для круга, который можно разсматривать, какъ прямой конусъ вращенія, котораго основаніе равно кругу, а высота равна нулю. Тогда апоѳема прав пирамиды не будетъ смѣшиваться съ высотою послѣдней, а образующая конуса—съ его высотою.

1117. Начертить нѣсколько правильныхъ пирамидъ: треугольныхъ, четыреугольныхъ и шестиугольныхъ въ прямоугольныхъ проекціяхъ и въ проекціи кавальерной —Вычислить *по прямоугольнымъ проекціямъ* объемъ каждой пирамиды, измѣривъ высоты и необходимые элементы основаній.

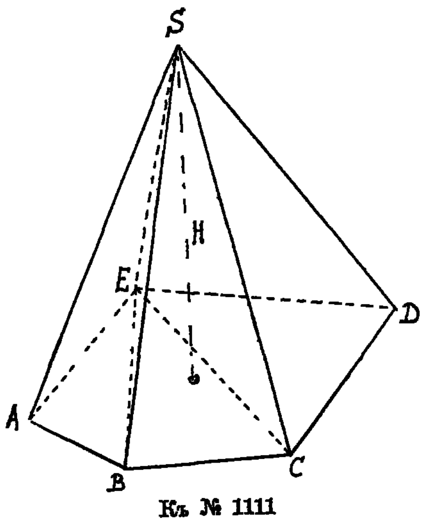
Если учащіеся владѣютъ извлеченіемъ квадратныхъ корней изъ чиселъ, то дѣло сводится къ составленію и вычисленію формулъ.

$a_3=\sqrt{3R^2}$	a_3 обознач сторону прав треугольн.
$q_3=\sqrt{\frac{27}{16}R_4}$	q_3 » площ » »
$a_6=R$	a_6 » сторону » шестиуг.
$q_6=\frac{\sqrt{27R^4}}{2}$	q_6 » площ » »
$a_4=\sqrt{2R^2}$	a_4 » сторону квадрата.
$q_4=2R^2$	q_4 » площ »

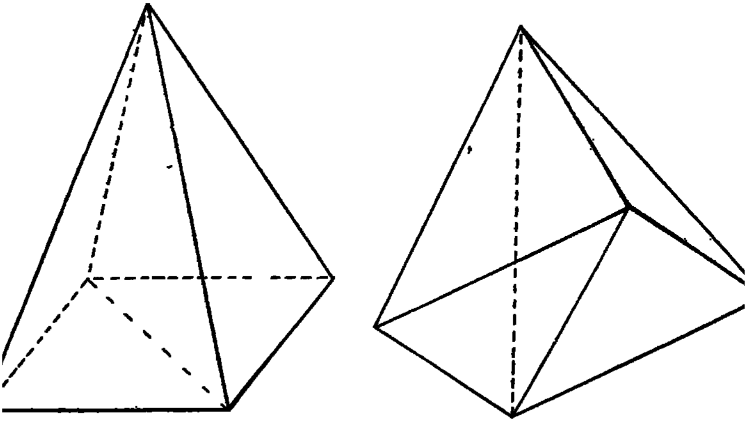
Если же ученики извлеченіемъ корней не владѣютъ, то надо дѣло свести (да это и вообще полезно) къ приблизительнымъ измѣреніямъ нужныхъ въ этомъ случаѣ элементовъ. Лучше умѣть справляться съ вопросомъ хотя бы только при помощи масштаба, чѣмъ быть только безпомощнымъ знатокомъ теоремъ, не приложимыхъ къ жизни —При этомъ учителю не надо забывать, что степень неточности непосредственныхъ измѣреній, если они дѣлаются болѣе или менѣе старательно на вѣрныхъ моделяхъ и на болѣе или менѣе старательныхъ чертежахъ, вовсе не такъ велика, какъ это кажется непосвященному, и что, поэтому, пренебрегать упражненіями № 1117 не слѣдуетъ



Къ № 1101



Къ № 1111

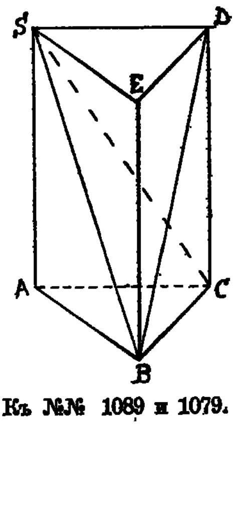


Къ № 1085 (прим.).

1085. Начертить прямую треугольную призму и сначала раздѣлить ее на двѣ пирамиды одну треугольную и одну четыреугольную, а затѣмъ эту послѣднюю—на двѣ треугольныя

Всѣ случаи разложенія треугольной призмы на три равновеликія треугольныя пирамиды должны быть разсмотрѣны учениками. Только при этомъ условіи подобное разложеніе не будетъ казаться ученикамъ результатомъ какой-то случайности, требующимъ будто бы особенной сообразительности. Полезно брать отдѣльныя четыреугольныя пирамиды въ разныхъ положеніяхъ (то съ видимымъ, то съ невидимымъ, то съ лежащимъ горизонтально, то съ негоризонтальнымъ основаніемъ).

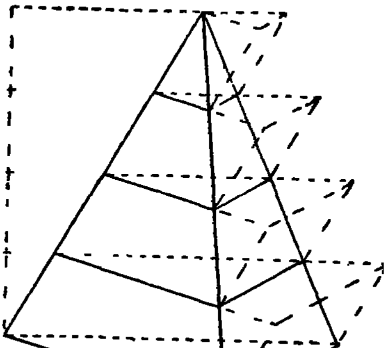
1089. Разобраться въ томъ, равновелики ли три треугольныя пирамиды, на которыя можно разложить данную *прямую* треугольную призму, или не равновелики —Онѣ равновелики: у пирамиды $SABCS$ основаніе ABC, а высота—SA, у пирамиды же $BSEDB$ основаніе SED, высота BE,



Къ №№ 1089 и 1079.

Только послѣ того, какъ предыдущее усвоено вполнѣ, можно ознакомить учащихся съ системою вписанныхъ призмъ —Въ системѣ описанныхъ призмъ мы «пристраиваемъ ступени», дополнительныя призмы, въ системѣ вписанныхъ мы удаляемъ «излишнія» призмы, «выдалбливаемъ ступени» Соотвѣтствующіе чертежи ученики должны умѣть дѣлать съ помощью линейки и чертежнаго треугольника или съ помощью линейки и циркуля Желательно, чтобы они умѣли пользоваться для этихъ чертежей глазомѣромъ и одной линейкой, а также свободно рисовать ихъ отъ-руки —Само собою разумѣется, что всѣ утвержденія этого нумера могутъ быть обращены въ вопросы, если ученики не въ состояніи прослѣдить ходъ руководящихъ мыслей этого нумера Но свести ихъ воедино ученикамъ необходимо, и надо пріучить учащихся къ систематическому, безъ наводящихъ вопросовъ, изложенію этихъ мыслей — Наглядныя пособія и ихъ изготовленіе учащимися очень полезны на этой ступени.

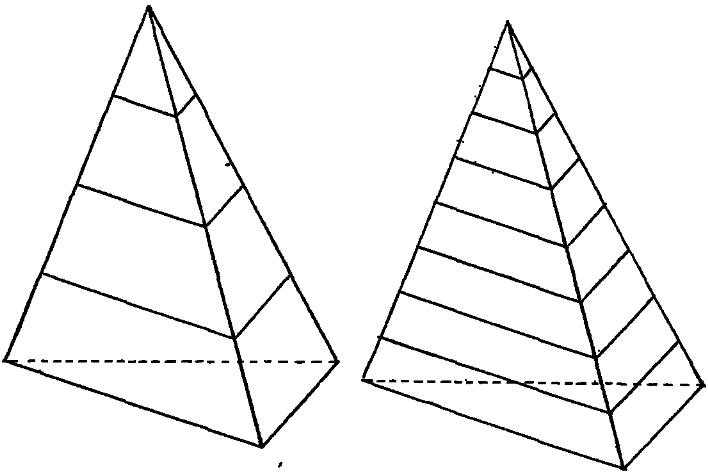
1076a. Разскажите, пользуясь чертежомъ, порядокъ разсужденій —Можно ли разсматривать треугольную пирамиду, разрѣзанную на слои плоскостями, параллельными основанію, какъ совокупность нѣкоторыхъ треугольныхъ призмъ? (Можно, если считать, что слоевъ одинаковой высоты безчисленное множество, то можно говорить, что каждый слой — призма)



Къ №№ 1069 и 1076

1079. Начертить прямую треугольную призму и раздѣлить ее на двѣ пирамиды одну треугольную, другую—четыреугольную первая должна имѣть основаніемъ нижнее основаніе призмы, вершину же въ одной изъ вершинъ ему дополнительные многогранники они не только улягутся въ эту призму, но даже не заполнятъ ея —Многогранникъ, состоящій изъ пирамиды и дополнительныхъ ея многогранниковъ, будемъ называть *системою описанныхъ призмъ* данной пирамиды.

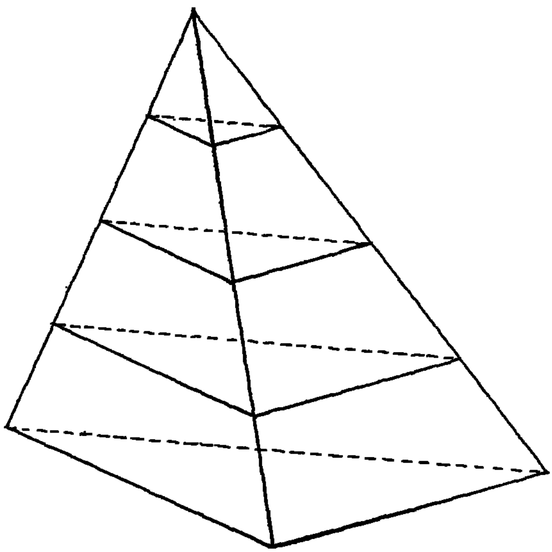
1073. Начертить треугольную пирамиду, раздѣлить ее на возможно большее число частей плоскостями, параллель-



Къ № 1069

ными основанію и находящимися одна отъ другой на одинаковомъ разстояніи —Невидимыхъ сторонъ основаній лучше не чертить!—Мысленно построить совокупность всѣхъ дополнительныхъ ея многогранниковъ и разобраться въ томъ, въ какомъ случаѣ объемъ системы описанныхъ призмъ данной пирамиды больше. въ томъ ли случаѣ, когда призмъ счетомъ больше, или же въ томъ, когда ихъ меньше счетомъ?—Сумма дополнительныхъ призмъ меньше наибольшей призмы, которой основаніе равно основанію пирамиды, а высота—взятой въ данномъ случаѣ долѣ высоты —Въ томъ случаѣ, когда дополнительныхъ многогранниковъ счедобная нашей призмѣ), а остальныя — четыреугольныя, у которыхъ обѣ основанія — трапеціи

1063. Начертить наклонную треугольную призму, и въ ней сдѣлать построеніе на подобіе того, которое сдѣлано въ предыдущемъ нумерѣ



Къ № 1065

1065. Построить треугольную пирамиду, раздѣлить одно боковое ребро на одинаковыя части, черезъ точки дѣленія провести плоскости, параллельныя плоскости ея основанія, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, на какія части раздѣлилась пирамида — Она раздѣлилась на части, изъ которыхъ только одна представляетъ собою полную пирамиду (подобную данной), а остальныя представляютъ собою усѣченныя параллельно основанію пирамиды одинаковой высоты, — боковыя грани ихъ — трапеціи, а основанія — подобгдѣ буква V обозначаетъ число кубическихъ единицъ, содержащееся въ объемѣ тѣла, буква q — число одноименныхъ квадратныхъ единицъ въ площади основанія, и буква H — число одноименныхъ единицъ длины въ длинѣ высоты).— Какія мы знаемъ формулы для объемовъ наклоннаго параллелепипеда и наклонной призмы? — По двѣ.

$$V = q\ H \text{ и } V = q'\ L,$$

гдѣ буквы V, q и H имѣютъ то же значеніе, что выше (а именно?), буквы же q' и L обозначаютъ первая—число квадратныхъ единицъ въ площади *перпендикулярнаго къ ребру* сѣченія, а вторая — число одноименныхъ линейныхъ единицъ въ длинѣ ребра

Въ основномъ курсѣ вполнѣ умѣстны понятіе о цилиндрическихъ поверхностяхъ вообще и о поверхности и объемѣ всякаго прямого цилиндра, каково бы ни было его основаніе — Если взять замкнутую, плоскую, себя не пересѣкающую, кривую линію какой угодно формы, то возможно установить слѣдующія понятія 1) о приблизительной квадратурѣ ограниченной ею части плоскости, съ помощью сѣти взаимно-перпендикулярныхъ прямыхъ, раздѣляющихъ плоскость чертежа на квадраты, 2) о прямомъ цилиндрѣ, образованномъ движеніемъ конечной прямой линіи, перпендикулярной къ плоскости кривой линіи, при условіи проведенія плоскости черезъ второй, свободный, конецъ перпендикуляра, 3) о боковой поверхности и 4) объ объемѣ этого прямого цилиндра особой формы. Для этого объема справедлива та же формула $V = q\,.\,H$, а для бок пов — формула $S = p\ L$, гдѣ буква p обозначаетъ длину «периферіи» основанія, а L длину образующей — Тутъ же умѣстно взвѣшиваніемъ пластинки цилиндрической формы (въ болѣе общемъ смыслѣ этого слова) найти *площадь* основанія Однакоже послѣднее въ основномъ курсѣ дозволительно только при полномъ освѣщеніи этого вопроса съ помощью опыта изъ образовавшихся такимъ образомъ треугольныхъ призмъ и чему равенъ объемъ всей многоугольной призмы —Объемъ всякой прямой призмы равенъ площади ея основанія, помноженной на высоту призмы

1049. Начертить *наклонную* многоугольную призму, черезъ одно ея ребро провести всѣ діагональныя плоскости этой призмы и разсудить, чему равенъ объемъ каждой изъ треугольныхъ призмъ, при этомъ образовавшихся, и чему равенъ объемъ всей призмы — Объемъ всякой призмы равенъ либо а) площади перпендикулярнаго сѣченія, помноженной на ребро призмы, либо б) площади основанія призмы, помноженной на высоту призмы

Всѣ разсужденія на этой ступени только тогда приводятъ къ цѣли, если основаніе ихъ, т-е ученіе объ объемахъ параллелепипеда и треугольной призмы, проработано вполнѣ наглядно и основательно Въ противномъ случаѣ, дѣло сводится къ запоминанію не вполнѣ выясненныхъ фактовъ

1053. Какъ получается прямой цилиндръ? (Вращеніемъ прямоугольнаго параллелограмма около его высоты) —Что представляетъ собою цилиндръ, если считать, что кругъ есть правильный многоугольникъ съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ? — Прямой цилиндръ представляетъ собою прямую правильную многоугольную призму съ безчисленнымъ множествомъ сторонъ — Ср №№ 745, 762 и 764

1054. Чему равенъ объемъ прямого цилиндра? (Объемъ прямого цилиндра равенъ площади его основанія, помноженной на длину его высоты или его образующей) —Представить себѣ, что основаніе прямого цилиндра раздѣлено на квадраты (см чертежъ къ № 713а) и что черезъ всѣ хорды, при этомъ проведенныя на нижнемъ основаніи, проведены плоскости, перпендикулярныя къ основанію до пересѣченія съ верхнимъ основаніемъ — Какія фигуры получатся на верхнемъ основаніи? (Такія же, какъ на нижнемъ, т-е квадраты, и, сверхъ *кулярнымъ къ нимъ основанiемъ*, мы тѣмъ самымъ и двѣ наклонныя треугольныя призмы, его составляющiя, обращаемъ въ двѣ *прямыя призмы, которыя совмѣстимы* одна съ другой)

1022. *Вычислить объемъ наклоннаго параллелепипеда*, въ которомъ ребро содержитъ 7 вершковъ, а площадь поперечнаго (перпендикулярнаго къ ребру) сѣченiя 12 кв вершковъ —Надо ли знать непремѣнно *площадь* поперечнаго сѣченiя, и не достаточно ли знать стороны поперечнаго сѣченiя? (Надо знать непремѣнно *площадь* поперечнаго сѣченiя и знать только стороны его недостаточно) —Почему этого недостаточно? (Потому что по сторонамъ параллелограмма нельзя вычислить площадь его)

> Всѣ эти и соприкасающiеся съ ними вопросы должны быть выяснены путемъ упражненiй и наглядныхъ пособiй вполнѣ основательно. Въ противномъ случаѣ ученики не разберутся въ томъ, *почему* надобно а) прежде всего пересѣчь ребро параллелепипеда плоскостью, къ нему перпендикулярной, б) потомъ изъ этихъ двухъ частей составить прямой параллелепипедъ, в) изъ этого прямого параллелепипеда, разрѣзавъ его плоскостью, перпендикулярною къ сторонѣ основанiя, на двѣ части, составить новый, прямоугольный, параллелепипедъ, г) убѣдиться въ томъ, что изъ наклоннаго параллелепипеда можно сдѣлать прямоугольный, который состоитъ изъ кубовъ или частей куба

1029. Замѣтьте объемъ всякаго *прямоугольнаго* параллелепипеда равенъ произведенiю площади его основанiя на высоту, поэтому и объемъ всякаго *прямого* параллелепипеда равенъ произведенiю площади его основанiя на его высоту —*Можно ли всякiй наклонный параллелепипедъ обратить* въ прямой съ тѣмъ же основанiемъ и той же высотой? (Можно) —Замѣтьте объемъ всякаго (стало-быть, и наклоннаго) параллелепипеда равняется площади его основанiя на что изъ двухъ совмѣстимыхъ наклонныхъ треугольныхъ призмъ вообще невозможно составить параллелепипедъ (См 1001) —Повторите все доказательство —Мы сначала раздѣлили параллелепипедъ дiагональною плоскостью на двѣ части, затѣмъ разрѣзали его же плоскостью, перпендикулярною къ ребру, тоже на части, далѣе сложили всѣ части такъ, что наклонныя къ ребру основанiя совпали, тогда мы получили *прямой* параллелепипедъ, въ которомъ обѣ треугольныя призмы его совмѣстимы, а онѣ получились изъ двухъ наклонныхъ призмъ, которыя должны быть, поэтому, равны по объему, т -е равновелики

1016. Можетъ ли случиться такъ, что перпендикулярная къ ребру плоскость не образуетъ полнаго перпендикулярнаго сѣченiя? (Можетъ, на подобiе того, какъ косоугольный параллелограммъ можетъ быть такой, чтобы нельзя было опустить перпендикуляра изъ точки, взятой на одной сторонѣ на другую сторону)

> Этотъ пунктъ требуетъ серьезной и наглядной проработки, потому что въ противномъ случаѣ остается неясною возможность обращенiя *всякаго* косоугольнаго параллелепипеда въ прямой съ тѣми же боковыми ребрами

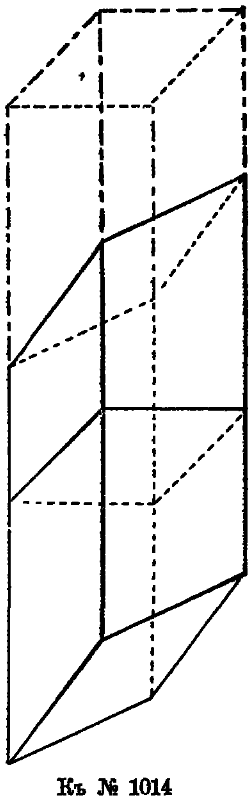
1020. Такой наклонный параллелепипедъ, въ которомъ основанiе *прямоугольникъ*, но въ которомъ нельзя провести *полнаго перпендикулярнаго къ* основанiю сѣченiя, обратите въ такой, въ которомъ это сѣченiе провести можно — Если бы мы захотѣли провести сѣченiе, перпендикулярное къ боковымъ ребрамъ начерченнаго параллелепипеда, то это удалось бы.—Но его можно разрѣзать и на такiя части, чтобы, сложивъ ихъ иначе, получить прямоугольный параллелепипедъ *съ тѣмъ же основанiемъ* и съ нимъ равновеликiй

> Сначала надо поработать надъ наклонными параллелепипедами, въ которыхъ плоскости двухъ взаимно

рыхъ можно выкроить совокупность всѣхъ граней параллелепипеда Коробка или нѣсколько коробокъ отъ шведскихъ спичекъ также могутъ сослужить службу при наглядномъ разрѣшеніи этихъ вопросовъ Первый вопросъ этого нумера можно формулировать и выяснить слѣдующимъ образомъ можно ли между двухъ параллельныхъ стѣнъ поставить на полъ такой наклонный параллелепипедъ, котораго двѣ грани сливались бы, каждая съ нѣкоторою частью поверхности стѣны?

1012. Построить наклонный параллелепипедъ, раздѣлить его діагональною плоскостью на двѣ треугольныя призмы и отдать себѣ отчетъ въ томъ, совмѣстимы ли эти двѣ призмы или нѣтъ, и если не совмѣстимы, то равновелики ли онѣ или не равновелики? (Вообще несовмѣстимы, но всегда равновелики)

Необходимы наглядныя пособія Но лучше всего, если они изготовлены самими учащимися и состоятъ изъ пары наклонныхъ треугольныхъ призмъ, вмѣстѣ составляющихъ наклонный параллелепипедъ —Случай, когда основанія наклоннаго параллелепипеда ромбы и когда проекція одного изъ реберъ параллелепипеда совпадаетъ съ одною изъ діагоналей основанія, надо разсмотрѣть отдѣльно Только тогда понятно добавленіе слова *«вообще»* къ характеристикѣ несовмѣстимости призмъ, на которыя діагональная плоскость раздѣляетъ наклонный параллелепипедъ

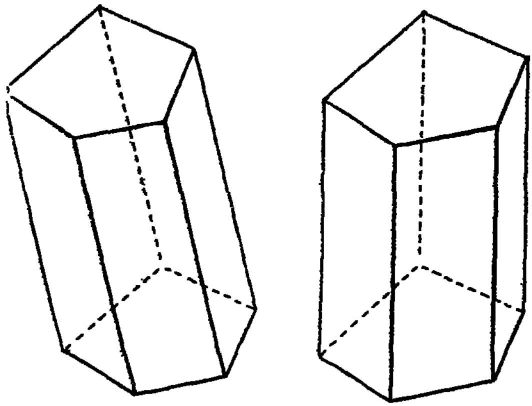


Къ № 1014

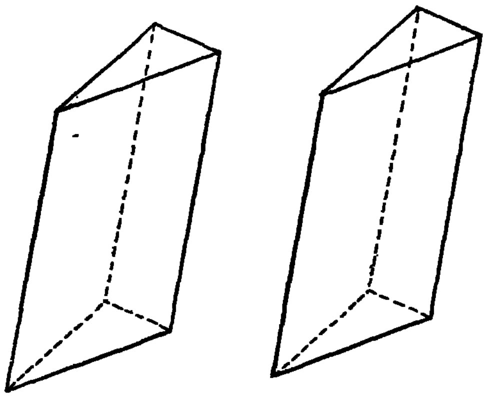
1001а. Приложимъ одну наклонную треугольную призму къ другой наибольшею ея гранью · 1-ый уголъ наибольшей грани второй призмы не совмѣстится со 2-мъ, а можетъ совмѣститься только либо съ 1-мъ, либо съ 3-мъ угломъ 1-ой призмы, но тогда призмы получаютъ положенія, изображенныя на чертежѣ —То же справедливо относительно всякихъ другихъ двухъ граней, которыя мы пожелали бы привести въ совмѣщеніе

1001б. Разсмотрѣть случай, когда одна изъ граней одной наклонной треугольной призмы и одна грань другой призмы, совмѣстимой съ первою, представляетъ собою равные между собою прямоугольники, а остальныя боковыя грани одной изъ нихъ не равны между собою, но порознь равны гранямъ другой —При этомъ, если мы совмѣстимъ одну прямоугольную грань съ другою, мы тоже не получимъ параллелепипеда, мы получимъ а) либо многогранникъ, въ которомъ ни верхнія, ни нижнія грани не лежатъ въ одной плоскости, б) либо многогранникъ, въ которомъ равныя между собою боковыя грани не противолежатъ одна другой, какъ это необходимо для образованія параллелепипеда, а прилежатъ одна къ другой, —такъ что и въ этомъ случаѣ тоже не получается параллелепипеда

1002. Начертить двѣ совмѣстимыя одна съ другою *прямыя* треугольныя призмы —Можно ли изъ нихъ составить параллелепипедъ? (Можно) —Каков это будетъ параллелепипедъ? (Прямой) —Сколько различныхъ по формѣ параллелепипедовъ можно составить изъ двухъ прямыхъ треугольныхъ призмъ?—Если всѣ боковыя грани одинаковы, а основанія, поэтому, равные между собою равносторонніе треугольники, то всѣ параллелепипеды получаются только одной и той же формы, если же только двѣ боковыя грани въ каждой изъ данныхъ двухъ прямыхъ треугольныхъ призмъ равны между собою, а основанія, равныя между собою, —равнобедренные треугольники, то можно составить



Къ № 995



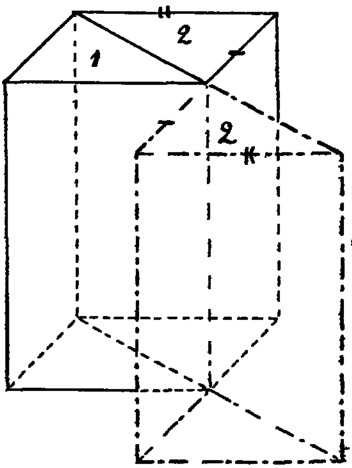
Къ № 1001

1001. Построить двѣ совмѣстимыя *наклонныя* треугольныя призмы, основанія которыхъ разносторонніе треугольники — Отдать себѣ отчетъ въ томъ, можно ли изъ нихъ составить параллелепипедъ объемъ всякаго прямого параллелепипеда —Объемъ прямого параллелепипеда тоже равенъ площади основанія на высоту —Не напоминаетъ ли это чего-нибудь въ ученіи о площади параллелограмма?—Чему равна площадь прямоугольнаго параллелограмма?—Почему?—Чему равна площадь косоугольнаго параллелограмма?—Почему?

Сближенія извѣстныхъ теоремъ изъ области стереометріи съ соотвѣтствующими теоремами изъ области планиметріи полезно въ очень многихъ отношеніяхъ

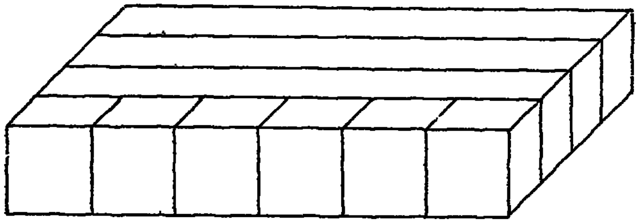
986. Повторимъ это упражненіе разсѣчемъ нашъ прямой, но не прямоугольный, параллелепипедъ на двѣ части плоскостью, перпендикулярною къ взаимно-параллельнымъ сторонамъ обоихъ оснований, приставимъ призму, которая стоитъ направо къ призмѣ, стоящей налѣво, такъ, чтобы правая боковая грань 1-го совмѣстилась съ лѣвою боковой гранью 2-го, а основанія сдѣлались прямоугольными —Получится прямоугольный параллелепипедъ, объемъ котораго равенъ объему ранѣе даннаго и въ которомъ основанія равновелики основаніямъ ранѣе даннаго, а высота равна высотѣ даннаго — Что отсюда слѣдуетъ? — Отсюда слѣдуетъ, что объемъ прямого, хотя бы и не прямоугольнаго, параллелепипеда, тоже равенъ площади *его* основанія, помноженной на высоту.—Упражненія

990. Начертить *прямоугольный* параллелепипедъ и провести черезъ два его ребра плоскость, разсѣкающую его на двѣ треугольныя призмы — Совмѣстимы ли эти двѣ призмы? (Совмѣстимы) —Эта плоскость назыв *діагональною*



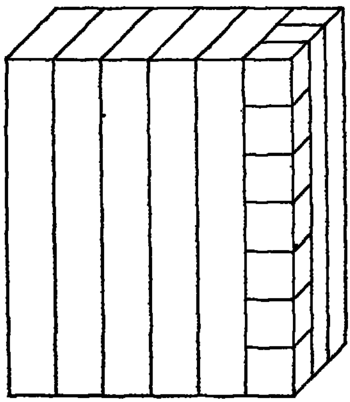
Къ № 990

отчетъ въ томъ, чему *равна площадь* основанія этого параллелепипеда (Она равна 6 квадратнымъ цм $\times 4 = 24$ кв цм) —Еще примѣръ высота прямоугольнаго параллеле-



Къ № 973

пипеда 1 цм, длина 7 цм, ширина — 5 цм — Чему равна площадь его основанія? 7 кв цм $\times 5 = 35$ кв цм. Чему равенъ его объемъ? 7 куб цм $\times 5 = 35$ куб цм И т п — Замѣтьте объемъ прямоугольнаго параллелепипеда, котораго высота равна одному цм, содержитъ столько же кубическихъ цм, сколько квадратныхъ цм содержится въ площади основанія этого параллелепипеда



Къ №№ 975 и 975а

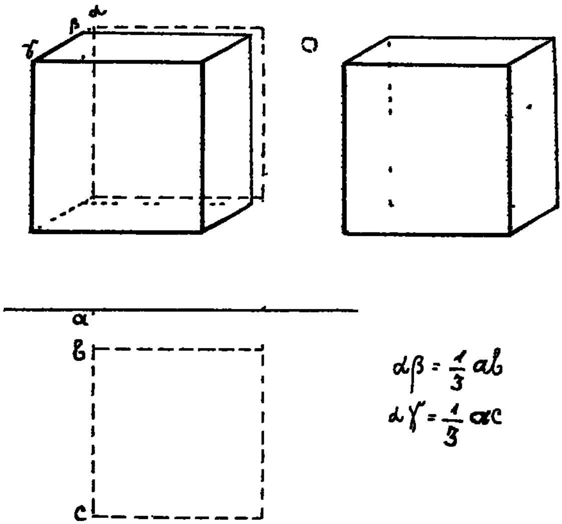
Условный смыслъ умноженія 7-ми кв цм на 1 цм, дающаго въ произведеніи 7 *кубическихъ* цм, здѣсь не затронутъ Равнымъ образомъ не затронутъ условный смыслъ записи 1 цм $\times$ 1 цм $\times$ 1 цм, *обозначающей* 1 куб цм

975. Построить прямоугольный параллелепипедъ, котораго длина равна 6 цм, высота—7 цм и ширина—3 цм, вызываютъ нежелательныя явленія нарушенія дисциплины. Бояться чего-нибудь такого на урокахъ математики только потому, что обыкновенно математика преподается отвлеченно, нѣтъ основанія Когда-то и отрасли естествознанія преподавались отвлеченно, безъ всякаго «показа», а только съ помощью лекцій, чертежей и разсказа —При невозможности добыть матеріалъ для лѣпки, можно пользоваться картофелемъ или мыломъ и изъ нихъ вырѣзывать модели требуемой формы.

967. «Построить» (на чертежѣ) кубъ, котораго ребро имѣетъ въ длину одинъ дюймъ —Какъ называется *объемъ* этого куба? (Кубическимъ дюймомъ) —Что называется кубическимъ вершкомъ? (*Объемъ* куба,—не самый кубъ—у котораго длина ребра равна одному линейному вершку) — Что такое куб. дециметръ? И т п

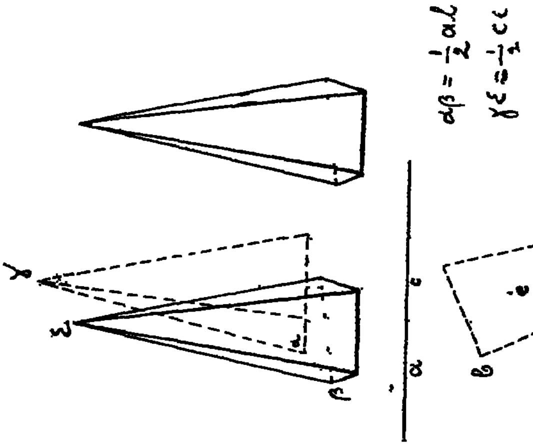
Ошибочно считать и учить, что самый кубъ, котораго ребро равно одному вершку, называется кубическимъ вершкомъ такой кубъ, какъ и всякій другой кубъ, есть только многогранникъ, тѣло Только объемъ его есть величина, которая можетъ служить единицею мѣры для измѣренія объемовъ всякихъ тѣлъ какой угодно формы и которая, въ *отличіе* отъ другихъ объемовъ, носитъ особое имя «кубическаго вершка». Ср примѣчанія къ №№ 505 и 585

968. Построить прямоугольный параллелепипедъ, котораго три ребра, выходящія изъ общей вершины, порознь равны 7 цм, 5 цм и 3 цм —Эти три ребра наз *измѣреніями* прямоугольнаго параллелепипеда одно—высотой, другое—длиной, третье—шириной или толщиной, иногда—глубиной —Все—въ зависимости отъ положенія и др условій — Примѣры лежащая балка, стоящій вертикально столбъ, линейка, комната, колодецъ, ящикъ, листъ бумаги —Каждую грань *прямоугольнаго* параллелепипеда можно называть *основаніемъ* его, а ребро, къ нему перпендикулярное, *высотою* —Обыкновенно за основаніе параллелепипеда принимають грань горизонтальную, а изъ двухъ болѣе или ме-

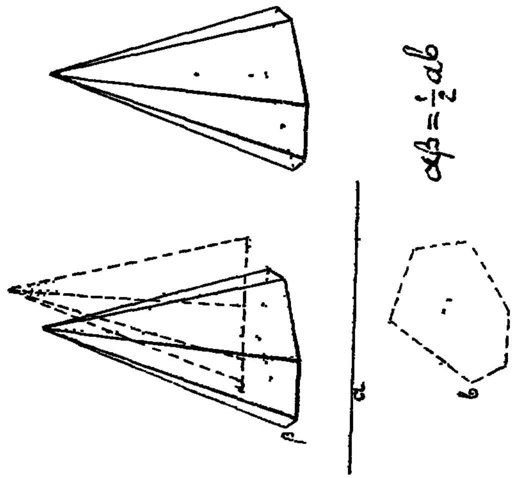


Къ № 961

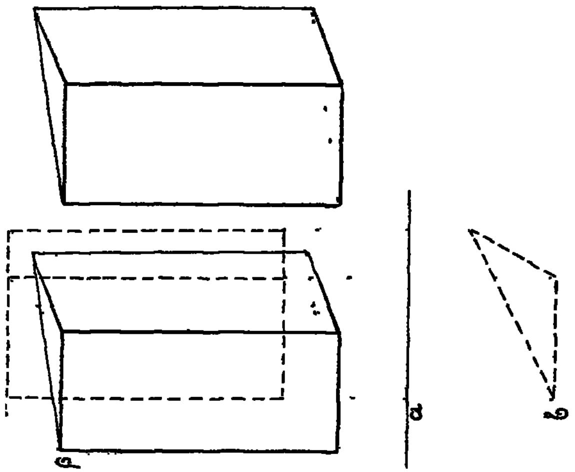
знакомъ съ матеріаломъ этой главы, то ему предварительно только придется самому съ карандашомъ, циркулемъ и линейкой въ рукахъ проработать упражненія этого параграфа При этомъ онъ долженъ принять во вниманіе полную условность такъ называемыхъ «сокращеній» какъ прямыхъ, такъ и угловъ, лежащихъ въ плоскостяхъ, которыя не параллельны вертикальной плоскости проекцій —Рѣшеніе обратныхъ задачъ (т -е построеніе ортогональныхъ проекцій по заданной кавальерной), конечно, тоже въ высшей степени поучительно Отъ учителя и особенностей класса зависитъ внесеніе вопросовъ этого рода въ курсъ


$\alpha\beta = \frac{1}{2} al$
$\gamma\varepsilon = \frac{1}{2} cc$

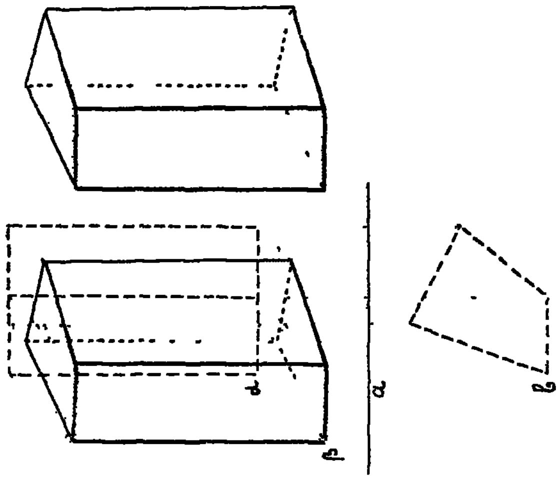
Къ № 957


$\alpha\beta = \frac{1}{2} ab$

Къ № 957



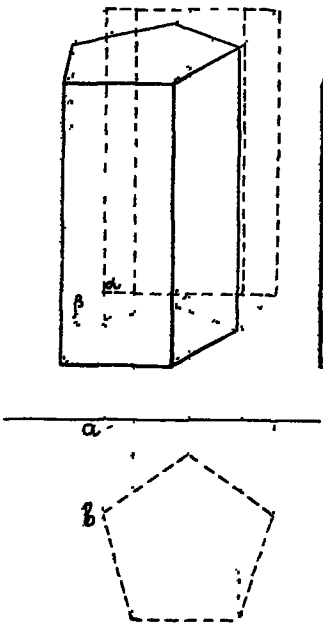
Къ № 947, черт I



Къ № 947, черт II

945. Начертить прямоугольныя проекціи наклонныхъ призмъ треугольной, четыреугольной, пятиугольной и шестиугольной, взявъ ихъ «въ наиболѣе удобно́мъ положеніи» — Начертить ихъ въ кавальерной проекціи (стр 346 и 347)

947. «Прочесть» чертежи относящіеся къ № 947.— I прямая, треугольная призма, основаніе которой тупо-



Къ № 943

угольный треугольникъ, II прямая четыреугольная призма, III. прямая пятиугольная призма (стр 349—350)

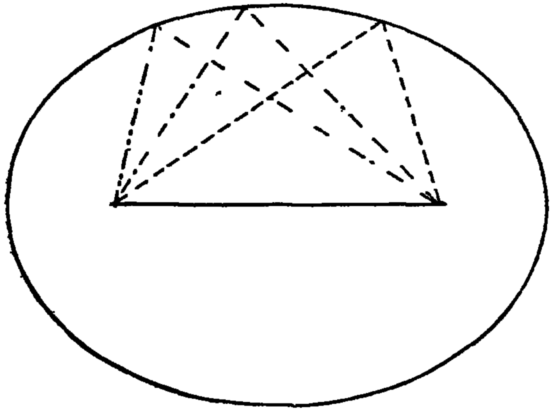
950. Начертить прямоугольныя проекціи правильныхъ пирамидъ, взявъ послѣднія «въ наиболѣе удобномъ положеніи». — Не забудьте показать на чертежѣ горизонтальную срединѣ, «поставить» одну часть четвертушки перпендикулярно къ другой и начертить проекцію какой-либо точки находящейся внутри этого двуграннаго угла

Упражненія въ этомъ случаѣ необходимы не опредѣленія даютъ знаніе и власть надъ представленіями и словами, ихъ вызывающими, а упражненія. Опредѣленія вытекаютъ изъ фактовъ или устанавливаются условно. Но учащимися они усваиваются либо только на-память,—это мало полезно,—либо изъ примѣненій къ явленіямъ природы и фактамъ обыденной жизни — Наглядныя пособія. двѣ доски на шарнирахъ, картонъ, палки, проволока.

921. Проведите плоскость черезъ обѣ проектирующія прямыя Aa_1 и Aa_2 и разберитесь въ томъ, въ какихъ прямыхъ эта плоскость пересѣчетъ плоскости проекцій и въ какой точкѣ она пересѣчетъ «ось» проекцій. — Она пересѣчетъ ихъ въ прямыхъ a_1o и a_2o, а ось проекцій въ точкѣ o —Разберитесь въ томъ, перпендикулярны ли прямыя a_1o и a_2o къ оси проекцій, или не перпендикулярны. Разберитесь въ томъ, какія прямыя въ этомъ рисункѣ равны между собою ($Aa_1 = a_2o$, $Aa_2 = a_1o$) — Какъ велико разстояніе точки A отъ *горизонтальной* плоскости проекцій? (Оно равно длинѣ прямой Aa_1 или длинѣ прямой a_2o, т.-е. разстоянію *вертикальной* проекціи точки A до оси). — А чему равно разстояніе точки A до *вертикальной* плоскости проекцій? (Длинѣ прямой Aa_2 или длинѣ прямой a_1o, т.-е разстоянію *горизонтальной* проекціи точки A до оси) — Многочисленныя упражненія.

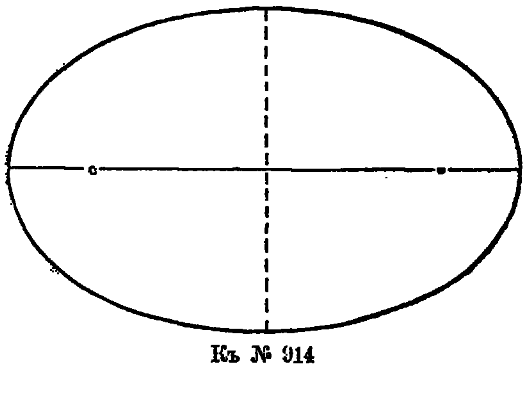
922. Но все это сдѣлано на рисункѣ, въ «перспективѣ» это не чертежъ, и вѣрно судить о размѣрахъ истиннаго разстоянія точки до каждой изъ плоскостей проекцій невозможно, потому что въ рисункѣ эти прямыя «сокращены», и мы не знаемъ, во сколько разъ сокращены, а прямыя линіи, параллельныя на дѣлѣ, иногда не параллельны на рисункѣ — Напримѣръ?

периферіей эллипса въ двухъ ея точкахъ.—Эта конечная прямая называется *малой осью* эллипса



Къ № 914

914а. Когда хотятъ нарисовать кругъ, не лежащій въ плоскости чертежа, приблизительно рисуютъ эллипсъ —



Къ № 914

Сидѣнье вѣнскаго стула, отверстіе чайной чашки и края блюдца на рисункѣ представляютъ собою эллипсы —Чтобы нарисовать основанія прямого цилиндра, прямого конуса шины съ проекціями остальныхъ двухъ точекъ) —Когда проекція угла на плоскость равна самому углу? (Тогда, когда обѣ стороны параллельны плоскости проекцій) —Когда проекція угла представляетъ собою лучъ? (Когда плоскость угла перпендикулярна къ плоскости проекцій и проекція вершины не лежитъ между проекціями точекъ, взятыхъ на сторонахъ угла) —Когда проекція угла представляетъ собою прямую, проведенную въ обоихъ направленіяхъ отъ одной точки? (Тогда, когда плоскость угла перпендикулярна къ плоскости проекцій, а проекція вершины лежитъ между проекціями точекъ, взятыхъ на сторонахъ угла) См чертежи на стр. 63 и 64.

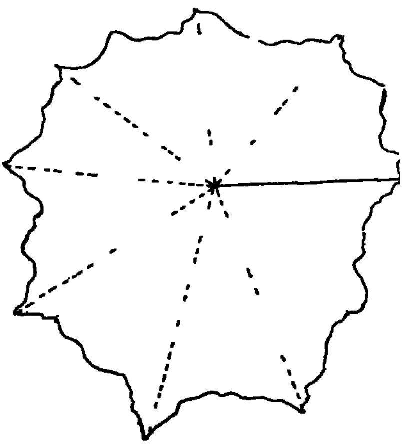
911. Отдать себѣ отчетъ въ томъ, какой уголъ представляетъ собою проекція прямого угла на плоскость, лежащую внѣ его (Либо прямой уголъ, либо острый, либо тупой, либо прямую линію)

912. Отдать себѣ отчетъ въ томъ, какую фигуру представляетъ собою прямоугольная проекція треугольника? (Либо треугольникъ, равный данному, либо треугольникъ, не равный данному, либо прямую линію)

913. Дана плоскость и внѣ ея прямоугольникъ.—Отдать себѣ отчетъ въ томъ, какую фигуру представляетъ собою его проекція (Одну изъ четырехъ: прямоугольникъ, ему равный, либо прямоугольникъ, ему не равный, либо косоугольный параллелограммъ, либо конечную прямую линію) —Какія прямыя линіи будутъ въ проекціи прямоугольника проекціями діагоналей его? (Діагонали проекціи)

914. Проекція даннаго круга, лежащаго внѣ плоскости проекцій, представляетъ собою либо кругъ, равный данному, либо прямую линію, равную его діаметру, *либо эллипсъ* — Эллипсъ *безъ помощи линейки и циркуля* можно начертить слѣдующимъ образомъ возьмите двѣ точки на отдѣльной четвертушкѣ бумаги, положите ее на столъ, вколотите въ эти двѣ точки перпендикулярно къ плоскости чертежа двѣ буправленіе сгибанія —Получимъ не выпуклый многогранный уголъ —Выпуклаго многограннаго угла нельзя построить, *если требуется, чтобы сумма его плоскихъ угловъ равнялась суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ* —Сдѣлать соотвѣтствующую модель изъ бумаги

896б. Взять уголъ, который больше суммы 4-хъ прямыхъ угловъ (т -е болѣе, чѣмъ 360⁰), раздѣлить его на части и изъ этихъ частей сложить многогранный уголъ.— Этотъ уголъ не можетъ быть выпуклымъ. — Замѣтьте сумма плоскихъ угловъ «выпуклаго» многограннаго угла всегда должна быть меньше, чѣмъ 360⁰



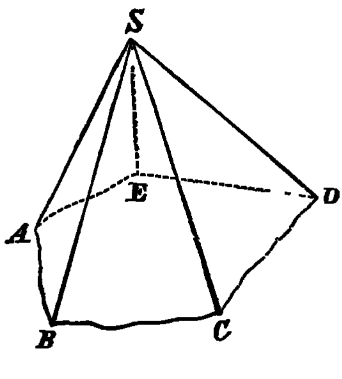
Къ № 896а

898. Въ какихъ изъ извѣстныхъ намъ многогранниковъ встрѣчаются многогранные углы? (Въ многоугольныхъ пирамидахъ) — Разобраться въ томъ, чему равны 1) сумма плоскихъ угловъ трехграннаго угла куба и 2) сумма плоскихъ угловъ трехграннаго угла правильной треугольной пирамиды, въ которой всѣ грани — треугольники равносторонніе

899. Нарисованъ двугранный уголъ, нарисовать его линейный уголъ, провести плоскость черезъ его стороны.— Отдать себѣ отчетъ въ томъ, перпендикулярна ли къ ребру двуграннаго угла всякая прямая, которую мы проведемъ въ плоскости его линейнаго угла черезъ вершину этого послѣдняго. (Перпендикулярна) —Замѣтьте. *если прямая перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ въ данной плоскости, то она перпендикулярна ко всякой прямой, проведенной въ той же плоскости черезъ основаніе* можно повести съ помощью нагляднаго пособія Да и обычное доказательство опирается па рядъ операцій, требующихъ самой настоятельной помощи пространственнаго воображенія Съ помощью куска картона и съ карандашомъ въ рукахъ всѣ эти операціи можно произвести на модели трехграннаго угла, сдѣланнаго изъ этого куска картона, при чемъ рисунокъ — не чертежъ!—является только рисункомъ, воспроизводящимъ какъ-разъ тѣ операціи, которыя, при доказательствѣ, приходится дѣлать на модели —Въ *учебникахъ* геометріи иначе, какъ на рисункѣ, изображающемъ модель, этого доказательства провести нельзя Но отсюда вовсе не слѣдуетъ, что *на урокѣ* геометріи должно прибѣгать только къ рисункамъ, а прибѣгать къ моделямъ не дозволительно.

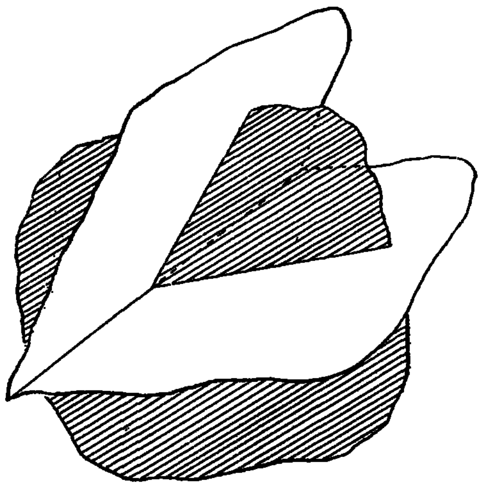
895a. Въ какихъ многогранникахъ мы наталкиваемся на трехгранные углы?

896. Возьмемъ уголъ, — лучше всего большій, чѣмъ сумма двухъ прямыхъ угловъ (т-е большій, чѣмъ 180°),—и проведемъ изъ его вершины нѣсколько прямыхъ линій, которыя разрѣзали бы его на нѣсколько частей —Согнемъ фигуру по пунктированнымъ ея прямымъ, но будемъ сгибать все «къ себѣ» или все «отъ себя», и совмѣстимъ свободную сторону угла I со свободной стороной VI угла — Получимъ новый уголъ, который называется угломъ *многограннымъ*, притомъ *выпуклымъ* многограннымъ угломъ —Можетъ ли сумма плоскихъ его угловъ (его «граней») равняться суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ (360°) или



Къ № 896

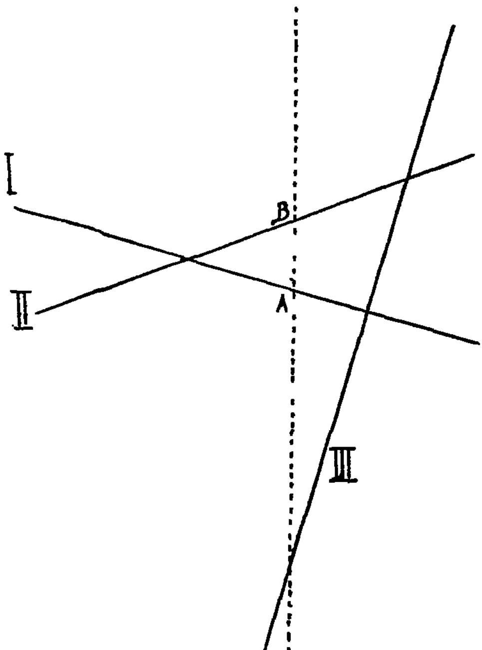
гутъ проходить черезъ одну и ту же прямую линію, наконецъ, г) каждая съ каждой можетъ взаимно пересѣкаться — Въ первомъ случаѣ образуются ли какіе-нибудь углы? (Никакихъ угловъ не образуется, если не считать, что двѣ параллельныя плоскости образуютъ уголъ, равный нулю) — Во второмъ случаѣ образуется 8 плоскостныхъ или двугран-



Къ № 891

ныхъ угловъ —Въ третьемъ—6 послѣдовательныхъ, прилежащихъ одинъ къ другому, угловъ —Въ четвертомъ образуются не одни только двугранные углы

893. Вырѣжьте изъ бумаги какой-нибудь уголъ, лучше всего вогнутый, т-е большій ста восьмидесяти градусовъ, и раздѣлите его на три какія-нибудь части, перегнувши уголъ I по пунктиру, идущему отъ вершины, то же сдѣлайте съ угломъ III, приведите эти три угла въ такое положеніе въ пространствѣ, чтобы не пунктированныя стороны I и III угловъ слились въ одну прямую линію —Получимъ нею съ ея проекцiей на плоскость —Примѣры и наглядное освѣщенiе вопроса —Всегда ли называють угломъ прямой съ данной плоскостью тотъ уголъ, который образованъ прямою со своей проекцiей на данную плоскость? (Нѣтъ, не всегда: когда прямая перпендикулярна къ плоскости, то



Къ № 865

у такой прямой нѣтъ проекцiи на плоскость, которая съ прямой образовала бы какой-нибудь уголъ).

***865.** Плоскость можно разсматривать, какъ слѣдъ движенiя нѣкоторой безконечной прямой линiи.—Во-первыхъ, представимъ себѣ въ пространствѣ двѣ неподвижныя пересѣкающiяся прямыя; начертимъ третью прямую, одна

AB съ плоскостью *P* —Если принимать и это во вниманіе, если, далѣе, прямая и плоскость не взаимно-параллельны и не взаимно-перпендикулярны и если направленіе прямой неизвѣстно, то можно говорить, что прямая и плоскость образуютъ *четыре* угла —При этомъ подъ направленіемъ плоскости можно разумѣть два прямо-противоположныхъ направленія (направленіе проекціи прямой и направленіе продолженія этой проекціи), а подъ направленіями прямой— тѣ два направленія, въ которыхъ надо взять лучи ея, исходящіе изъ точки ея пересѣченія съ плоскостью, для того, чтобы получить четыре угла.

***867.** Плоскость продолжить въ нѣкоторомъ направленіи, совпадающемъ съ направленіемъ одного изъ лучей, взятыхъ на ней —Для этого надо только продолжить лучъ, провести въ плоскости прямую, перпендикулярную къ этому лучу, и заставить эту прямую двигаться параллельно самой себѣ, сохраняя съ лучомъ нѣкоторую общую точку

870. Дана плоскость, изъ точекъ, взятыхъ на ней, къ ней возставить перпендикуляры —Разобраться въ томъ, параллельны ли эти перпендикуляры другъ другу

870а. Данъ пучокъ взаимно-параллельныхъ прямыхъ, пересѣчь ихъ нѣкоторою плоскостью такъ, чтобы одна изъ этихъ прямыхъ линій была перпендикулярна къ этой плоскости —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, перпендикулярны ли всѣ эти прямыя къ плоскости —Дана плоскость и внѣ ея нѣсколько точекъ, изъ этихъ точекъ опустить на плоскость перпендикуляры —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, параллельны ли всѣ эти перпендикуляры одинъ другому

872. Дана плоскость и конечная прямая внѣ ея, изъ концовъ ея опущены перпендикуляры на эту плоскость, и проекціи этихъ концовъ соединены прямою —Какъ называется эта прямая? (Проекціей данной прямой на данную плоскость) —Равна ли данной прямой эта проекція?—Когда она ей равна? (Когда отрѣзокъ параллеленъ плоскости) —

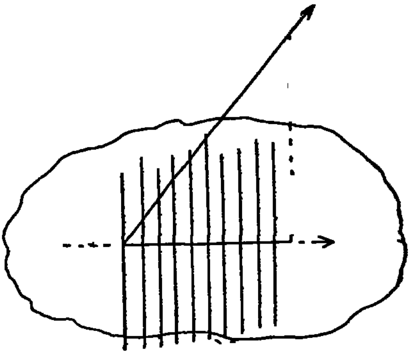
прямой —Сколько плоскостей можно провести черезъ три точки, не лежащія на одной прямой? (Только одну) —Плоскость «опредѣляется» тремя своими точками, не лежащими на одной прямой —Что это значитъ «опредѣляется»?

877. Существуютъ ли такія поверхности, на которыхъ прямая линія умѣщается всѣми своими точками, если нѣкоторыя двѣ точки ея совмѣщаются съ двумя точками поверхности? (Существуютъ. таковы, напр, всѣ цилиндрическія и коническія поверхности) —Но въ цилиндрическихъ и коническихъ поверхностяхъ можно найти безчисленное множество и такихъ точекъ, что если прямая проходитъ черезъ нихъ, то ни одна изъ остальныхъ точекъ прямой не умѣщается на поверхности, и въ этихъ точкахъ прямая только пересѣкаетъ поверхность —Существуетъ ли такая поверхность, чтобы прямая, проведенная черезъ любыя двѣ ея точки, всѣми своими точками лежала на этой поверхности?—Какъ такая поверхность называется?—Какое основное свойство плоскости? (Прямая, проведенная черезъ *любыя* двѣ точки плоскости, всѣми своими точками лежитъ на этой плоскости)

Прямыя линіи, какъ бы «прокалывающія» коническую или цилиндрическую поверхности, могутъ демонстрироваться на свернутомъ въ трубку или въ воронку кускѣ бумаги съ помощью вязальной спицы и потомъ зарисовываться на чертежѣ.

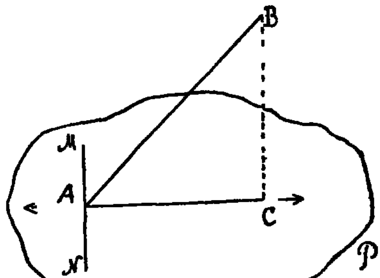
878. Какъ узнать, достаточно ли близка поверхность доски къ плоской поверхности? (Вывѣрить линейкой).

Опредѣленіе плоскости (плоскостью называется поверхность, опредѣляемая тремя ея точками, не лежащими на одной прямой) можно дать. Но чѣмъ раньше дано это опредѣленіе плоскости, тѣмъ менѣе оно даетъ ученикамъ въ смыслѣ образовательномъ.—Чтобы данное выше опредѣленіе плоскости выдѣлило плоскость изъ другихъ «линейчатыхъ» поверхностей (т-е поную къ этой проекціи. — Далѣе предположите, что эта прямая передвигается въ плоскости параллельно самой себѣ въ указанномъ стрѣлкою направленіи. — Это направленіе совпадаетъ съ направленіемъ проекціи луча. — Тогда можно говорить, что часть плоскости, по которой это движеніе совершается, тоже имѣетъ направленіе — Когда говорятъ объ углѣ, образованномъ прямою съ плоскостью, къ которой эта прямая не параллельна и не перпендикулярна, то при этомъ обыкновенно



Къ № 865а

имѣютъ въ виду *острый* уголъ, образованный этой прямою со своей проекціей на плоскость — Можно ли говорить, что прямая въ этомъ случаѣ образуетъ еще одинъ уголъ, притомъ тупой, который дополняетъ острый до 180°? (Можно) — Для этого надо только продолжить проекцію въ обратномъ направленіи, провести черезъ прямую и продолженіе проекціи плоскость и считать, что та часть плоскости, въ которой лежитъ это продолже-



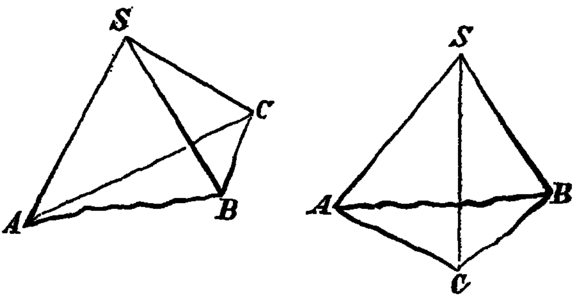
Къ № 865а

ніе, начиная съ прямой *MN*, имѣетъ направленіе, обратное направленію, образующему съ прямой *AB* тотъ уголъ *BAC*, который называется также угломъ прямой у каждой изъ двухъ прямыхъ только одно направленіе, то считаютъ, что образовался только одинъ уголъ, если направленія прямыхъ неизвѣстны, то считаютъ, что при этомъ образовались четыре угла, если извѣстно направленіе только одной изъ прямыхъ, то можно имѣть въ виду два угла) —А есть ли у двухъ взаимно пересѣкающихся плоскостей направленія?—Можно условиться если изъ какой-нибудь точки линіи пересѣченія двухъ плоскостей провести въ каждой изъ нихъ по перпендикуляру къ этой линіи пересѣченія, то можно считать, что направленіе каждой плоскости совпадаетъ съ направленіемъ перпендикуляра, проведеннаго въ ней изъ этой точки

889. Нарисовать плоскостный уголъ, взять на линіи пересѣченія плоскостей, его образующихъ, точку, изъ точки этой провести въ каждой «грани» плоскостнаго угла по перпендикуляру къ этой линіи пересѣченія и провести плоскость черезъ эти два перпендикуляра.—Уголъ, образованный этими перпендикулярами, называется *линейнымъ угломъ* даннаго плоскостнаго или двуграннаго угла —Зависитъ ли величина этого линейнаго угла отъ того, гдѣ взята его вершина? (Не зависитъ гдѣ бы ни взять вершину его, для каждаго двуграннаго угла получатся одинаковой величины линейные углы) —Наглядно

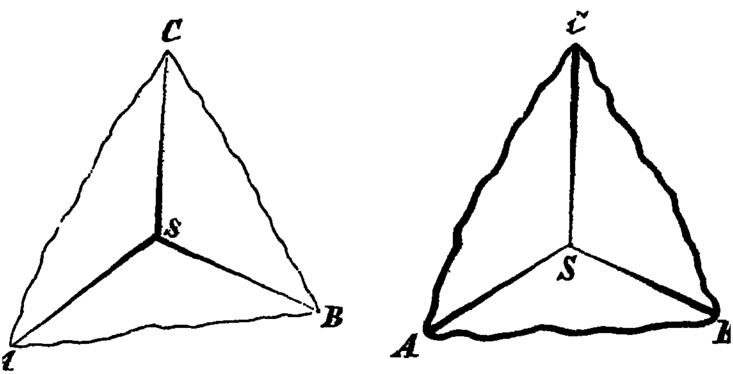
889a. Отдать себѣ отчетъ въ томъ а) равны ли или не равны между собою линейные углы двухъ равныхъ (совмѣстимыхъ) плоскостныхъ угловъ, б) обратно равны ли или не равны между собою такіе плоскостные углы, у которыхъ углы линейные равны между собою, в) пропорціональны ли углы двугранные своимъ линейнымъ —Можно ли выражать въ градусахъ двугранные (плоскостные) углы?

891. Какое положеніе могутъ имѣть въ пространствѣ три различныя плоскости?—Онѣ могутъ быть а) всѣ три параллельны, б) двѣ изъ нихъ могутъ быть взаимно-параллельны, при чемъ третья ихъ пересѣкаетъ, в) всѣ три мово второмъ углѣ прямая SC дальше, чѣмъ точки A и B; въ третьемъ вершина S ближе къ наблюдателю, и



Къ № 893 (прим.)

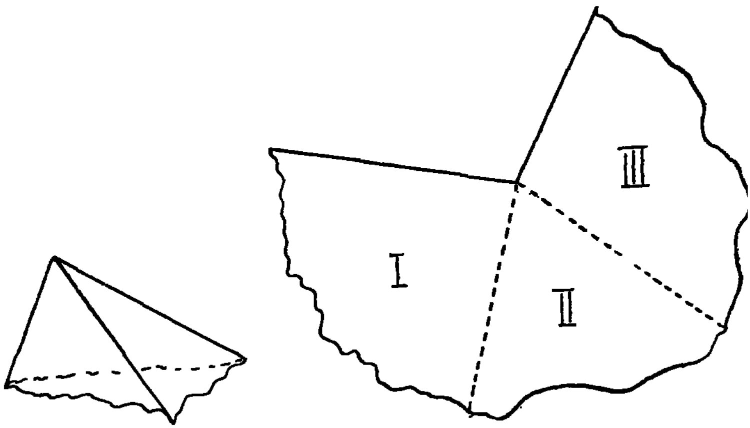
трехгранный уголъ обращенъ къ нему вершиной, въ четвертомъ вершина S отъ зрителя отстоитъ дальше, чѣмъ точки A, B и C реберъ трехграннаго угла, и



Къ № 893 (прим.)

уголъ обращенъ къ зрителю отверстіемъ.—Этотъ способъ черченія и рисованія согласованъ съ условными требованіями «стержневой» перспективы.

такимъ образомъ «модель» *трехграннаго угла*.—*Сторонами* или гранями его называются образующіе его «плоскіе» углы: I, II и III.—Кромѣ плоскихъ угловъ и трехграннаго, имѣемъ еще двугранные: одинъ образованъ плоскостями I и II, другой—плоскостями II и III, а третій—плоскостями I и III.—Плоскіе и двугранные углы трехграннаго угла можно считать *элементами* трехграннаго угла.



Къ № 893

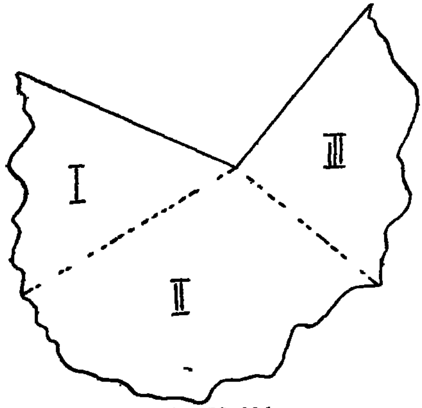
Полезно научиться выполненію чертежей трехгранныхъ угловъ въ разныхъ положеніяхъ. При этомъ полезно установить три условія, которыя хоть отчасти устраняютъ оптическое явленіе такъ наз. «миганія» стереометрическихъ чертежей, при которомъ трудно разобрать, какія точки менѣе и какія—болѣе удалены отъ наблюдателя. Эти условія состоятъ въ слѣдующемъ: 1) невидимыя линіи выполняются пунктиромъ, 2) болѣе близкія къ наблюдателю части линій вычерчиваются толще болѣе отдаленныхъ, и 3) по мѣрѣ удаленія, части линіи становятся все тоньше и тоньше. Такъ, въ первомъ трехгранномъ углѣ точки A и B ближе къ наблюдателю, чѣмъ вершина S трехграннаго угла, а грань ASC позади остальныхъ двухъ граней, верхностей, описываемыхъ прямою линіей при ея движеніи въ пространствѣ), ученикамъ надо имѣть въ своемъ распоряженіи хотя бы самое элементарное представленіе о существованіи линейчатыхъ поверхностей, напр, цилиндрической и конической въ общемъ смыслѣ этихъ терминовъ — Съ другой стороны, можно заниматься рѣшеніемъ задачъ, относящихся до фигуръ, взятыхъ на плоскости, вовсе не задаваясь вопросомъ объ *опредѣленіи* плоскости первоначальное представленіе о плоскости для этой работы вполнѣ достаточно. — На занимающей насъ ступени слѣдуетъ повторить упражненія, относящіяся до плоскости и фигуръ въ пространствѣ и предложенныя ранѣе, напр, въ №№ 140а, 195б — 195е, до значенія слова «опредѣляется» и т п

§ 14. Двугранные и многогранные углы.

887. Какое положеніе могутъ имѣть двѣ плоскости въ пространствѣ? — Только двоякое 1) онѣ могутъ по достаточномъ и «приличномъ» продолженіи пересѣчься въ нѣкоторой прямой линіи, и 2) онѣ могутъ быть взаимно-параллельны, т.-е имѣть такія положенія въ пространствѣ, что въ какихъ бы направленіяхъ ихъ ни продолжить, онѣ никогда не пересѣкутся. — Примѣры

888. Даны двѣ взаимно пересѣкающіяся плоскости, отдать себѣ отчетъ въ томъ, могутъ ли точки, общія у обѣихъ плоскостей, лежать не на одной и той же прямой. (Не могутъ, потому что, въ противномъ случаѣ, у плоскостей были бы *три* общія точки, не лежащія на одной и той же прямой, и плоскости должны были бы слиться въ одну, а не взаимно пересѣкаться) — Если направленія плоскостей неизвѣстны, то двѣ взаимно пересѣкающіяся плоскости образуютъ четыре угла, называемые плоскостными или «двугранными» углами — Почему — «двугранными»? — Когда говорятъ объ углѣ, образованномъ двумя прямыми на плоскости, то имѣютъ ли въ виду направленія прямыхъ? (Если

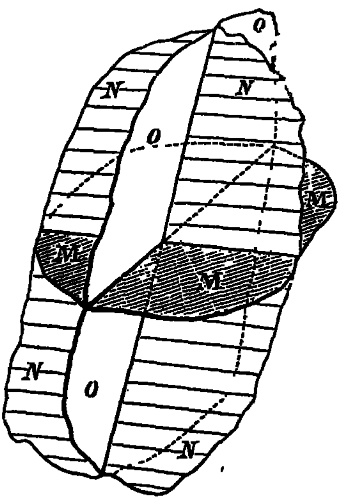
894. Отдать себѣ отчетъ въ томъ, когда не пунктированныя стороны I-го и III-го плоскихъ угловъ не сольются.—Такихъ случаевъ можетъ быть два 1) если сумма 2-хъ плоскихъ угловъ меньше третьяго, и 2) если сумма 2-хъ угловъ равна третьему.



Къ № 894

Полная наглядность въ этихъ упражненіяхъ обязательна и, ни мало не противорѣча научнымъ требованіямъ, только удовлетворяетъ также требованіямъ психологическимъ. Ибо научно изучать то, чего себѣ даже не представляешь, значитъ итти и противъ научныхъ, и противъ психологическихъ требованіи

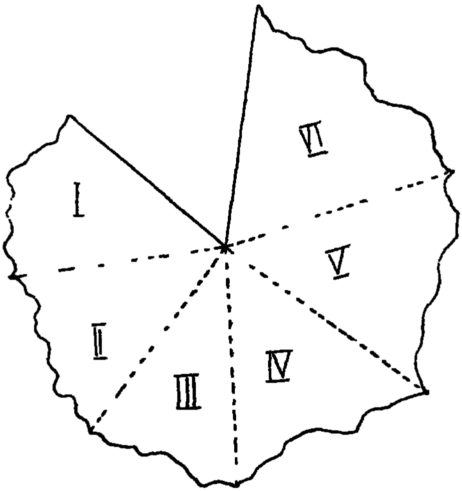
895. Сколько трехгранныхъ угловъ образуютъ три взаимно пересѣкающихся плоскости?



Къ № 895.

Что сумма двухъ плоскихъ угловъ трехграннаго угла всегда больше третьяго, при надлежащей постановкѣ вопроса, является въ этомъ курсѣ только *условіемъ* образованія трехграннаго угла, а не теоремой. Но само собою разумѣется, что и доказательство этой теоремы не можетъ? (Не можетъ) —Можетъ ли она быть больше суммы четырехъ прямыхъ угловъ? (Не можетъ) —Она должна быть меньше 360-ти градусовъ.

Это условіе происхожденія и существованія выпуклаго многограннаго угла тоже требуетъ нагляднаго усвоенія, и доказательство теоремы, сюда относящей-



Къ № 896

ся, въ основномъ курсѣ смѣло можно опустить — Дальнѣйшіе два нумера служатъ только для непосредственнаго чувственнаго воспріятія учениками того факта, что *выпуклаго* многограннаго угла изъ плоскихъ угловъ, сумма которыхъ равна 360° или больше 360°, не образовать никоимъ образомъ

896a. Взять уголъ, равный суммѣ четырехъ прямыхъ угловъ, раздѣлить его на части и изъ его частей сложить многогранный уголъ —Когда это возможно?—Это возможно только въ томъ случаѣ, если мы будемъ сгибать грани не все «отъ себя» и не все «къ себѣ»: хоть разъ перемѣнимъ на-

этого перпендикуляра.—Такую прямую и называютъ перпендикуляромъ къ данной плоскости.

Для иллюстраціи этой теоремы требуется не одно упражненіе съ наглядными пособіями. Наилучшее изъ нихъ—кусокъ бумаги съ неровно оборванными краями, согнутый пополамъ и снабженный надрѣзомъ, перпендикулярнымъ къ сгибу. Карандаши, палочки и спички тоже пригодны.—Линія пересѣченія двухъ стѣнъ на первыхъ порахъ не совсѣмъ удобна, какъ примѣръ перпендикуляра къ плоскости пола, такъ какъ всѣ три плоскихъ угла трехграннаго угла, образованнаго поверхностями двухъ стѣнъ и пола, углы прямые, а это вовсе не необходимо для перпендикулярности прямой къ плоскости.

§ 15. Проекціи фигуръ и тѣлъ на плоскость [1]).

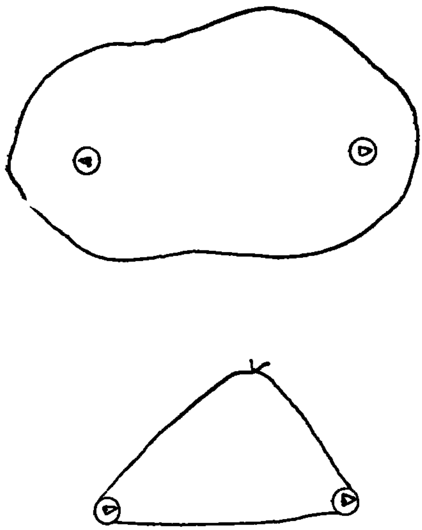
(Азбука проекціоннаго черченія).

910. Дана плоскость и прямолинейный уголъ внѣ ея.—Что надо сдѣлать, чтобы найти его прямолинейную проекцію на плоскость? (Опустить три перпендикуляра на плоскость: одинъ изъ вершины угла, другой—изъ точки, взятой на одной его сторонѣ, третій—изъ точки, взятой на другой сторонѣ, а затѣмъ соединить проекцію вер-

---

[1]) Какъ уже указывалось въ другихъ мѣстахъ книги, этотъ параграфъ можетъ занимать въ курсѣ и иное мѣсто. Можно его и совсѣмъ опустить, если ученики обладаютъ хорошимъ пространственнымъ воображеніемъ, если они, хорошо рисуя, поэтому хорошо разбираются въ различіи между рисункомъ и чертежомъ и инстинктивно пользуются такъ наз. «косой» или «кавальерной перспективой». Однакоже учитель, совершенно опускающій содержаніе этого параграфа, лишаетъ учениковъ возможности своевременно освоиться съ азбукой проекціоннаго черченія, доступной всякому здравомыслящему человѣку и полезной какъ въ практическомъ, такъ и въ образовательномъ отношеніи. Кромѣ того, у такого учителя не можетъ быть увѣренности въ томъ, что его ученики достаточно отчетливо будутъ разбираться въ чертежахъ, выполненныхъ интуитивно въ косыхъ проекціяхъ.

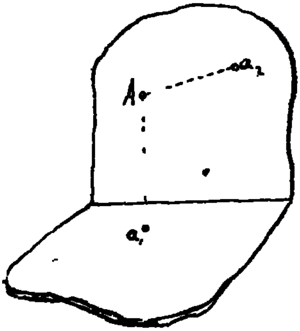
лавки (или, лучше, двѣ кнопки, но если кнопки, то не вплотную къ бумагѣ), свяжите концами нитку такой длины, чтобы обѣ кнопки лежали внутри фигуры, образованной лежащею ниткой; натяните нитку такъ, чтобы ее задерживали обѣ кнопки, въ третью вершину получившагося треугольника поставьте карандашъ такъ, чтобы онъ держалъ въ натянутомъ состояніи всю нитку и въ то же время могъ чертить, и чертите все время карандашомъ на плоскости такую линію, которая получится, если все время нитка будетъ натянута.—Полученная фигура называется *эллипсомъ*, обѣ неподвижно закрѣпленныя точки—его *фокусами*, линія, его ограничивающая,—«периферіей эллипса» (или тоже эллипсомъ), обѣ прямыя, соединяющія каждый изъ фокусовъ съ точками периферіи эллипса,—*радіусами-векторами* эллипса.—Основное свойство эллипса состоитъ въ томъ, что сумма любой пары его радіусовъ-векторовъ, проведенныхъ къ одной точкѣ периферіи эллипса, равна суммѣ всякой другой пары радіусовъ-векторовъ, проведенной къ другой точкѣ этой периферіи.—Конечная прямая, соединяющая двѣ точки эллипса и проходящая черезъ его фокусы, называется *большою осью* эллипса.—Начертите эллипсъ, проведите его большую ось и изъ середины ея проведите, перпендикулярно къ большой оси, прямую до встрѣчи съ



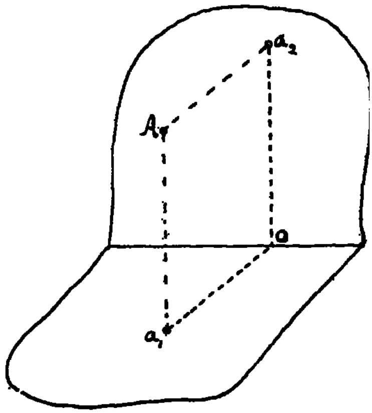
Къ № 914

и большой кругъ шара, не совпадающія съ плоскостью чертежа, мы рисуемъ фигуры эллиптической формы

920. Рисунокъ даетъ вѣрное представленіе о *формѣ* тѣла; но для того, чтобы сдѣлать хорошій рисунокъ, нужно умѣть рисовать —Иногда нужны *даже особенныя способности*, талантъ —Другое дѣло чертежъ здѣсь болѣе нужны знанія и *опредѣленныя правила* —Представьте себѣ часть нѣкоторой плоскости, лежащую въ плоскости нашего чер-



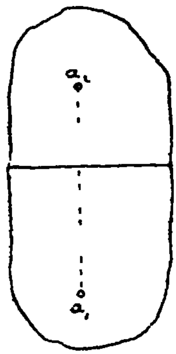
Къ № 920



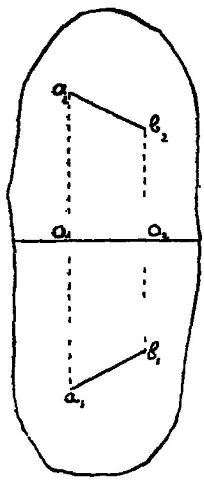
Къ № 921

тежа и отъ одной прямой этой плоскости часть другой плоскости, перпендикулярной къ первой —Это—какъ бы часть плоскости нѣкоторой стѣны предъ нами и часть плоскости пола —Положимъ, стало-быть, что первая плоскость вертикальна, а вторая горизонтальна —Возьмемъ внутри этого двуграннаго угла точку А, найдемъ ея проекцію на горизонтальную плоскость (короче — ея горизонтальную проекцію), и пусть это будетъ точка a_1; пусть вертикальная проекція точки А будетъ точка a_2 —Показать это въ «воздухѣ», принявъ стѣну и полъ за плоскость проекцій и взявъ точку на столѣ —Перегнуть четвертушку бумаги по-

Это требуетъ усердныхъ разъясненій —Если учитель даже не умѣетъ рисовать, то онъ можетъ сослаться на то, что во всякомъ изображеніи предметовъ въ пространствѣ на рисункѣ дѣлаются сокращенія Если хотимъ *нарисовать* столъ, мы не чертимъ ширины и длины его, иногда рисуемъ вмѣсто прямыхъ угловъ острые и тупые, рисуемъ короче и ширину стола, и длину его, и т п



Къ № 923

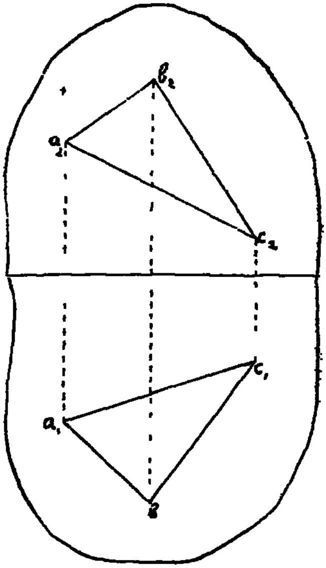


Къ № 925.

923. Чтобы сдѣлать *чертежъ,* дающій точные размѣры разстоянія точки отъ каждой изъ плоскостей проекцій, прямой двугранный уголъ, въ которомъ находится данная точка, такъ сказать, «распластываютъ»,—его горизонтальную грань отгибаютъ на 90^0, т-е достигаютъ того, чтобы вертикальная грань составила съ горизонтальной одну плоскость, или, какъ говорятъ въ этихъ случаяхъ, «совмѣщаютъ» обѣ плоскости проекцій —Тогда получается уже *чертежъ,* въ которомъ обѣ проекціи a_1 и a_2 данной точки A лежатъ на одной прямой и въ которомъ прямая a_2o равна прямой, проектирующей точку A на *горизонтальную* плоскость, а прямая a_1o равна прямой, проектирующей точку

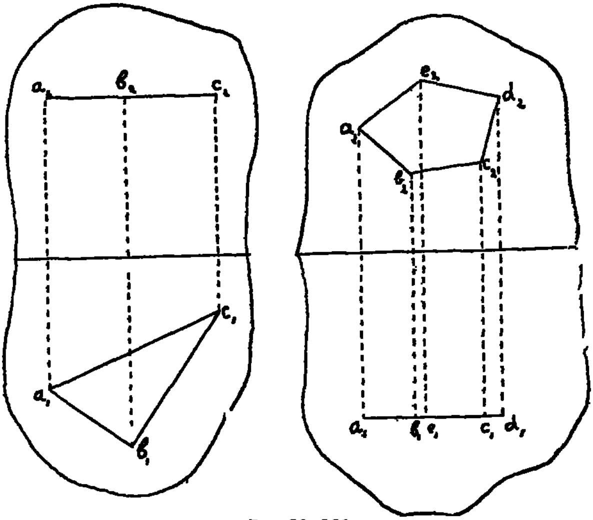
А на вертикальную плоскость проекцій —Короче говорять такъ a_2o равно разстоянію точки А отъ горизонтальной плоскости проекцій, a_1o—разстоянію точки А отъ вертикальной плоскости проекцій. — Упражненія

925. Даны проекціи отрѣзка прямой, взятаго внутри перваго угла, образованнаго плоскостями проекцій —«Прочесть» этотъ чертежъ значитъ отдать себѣ отчетъ въ слѣдующемъ а) параллельна ли эта прямая къ оси проекцій (не параллельна), б) параллельна ли она хоть одной изъ плоскостей (не параллельна), в) какъ велико разстояніе точки А отъ горизонтальной плоскости проекцій? (a_2o_1), г) какъ велико разстояніе точки А отъ вертикальной плоскости проекцій (a_1o_1), д) какъ велико разстояніе точки В отъ горизонтальной плоскости проекцій? (b_2o_2), и е) какъ велико разстояніе точки В отъ вертикальной плоскости проекцій? (b_1o_2) —По этому чертежу человѣкъ, изучавшій «начертательную геометрію», можетъ точно узнать еще и многое другое, напр какъ велика длина прямой, какой уголъ образуетъ прямая *AB* съ каждой изъ плоскостей проекцій и какой уголъ она образуетъ съ осью проекцій —Но это намъ сейчасъ не нужно —Замѣтьте одно: если горизонтальная плоскость проекцій «совмѣщена» съ вертикальной плоскостью, такъ что составляетъ уже ея продолженіе, то обѣ проекціи одной и той же точки лежатъ на одной прямой, перпендикулярной къ оси проекцій

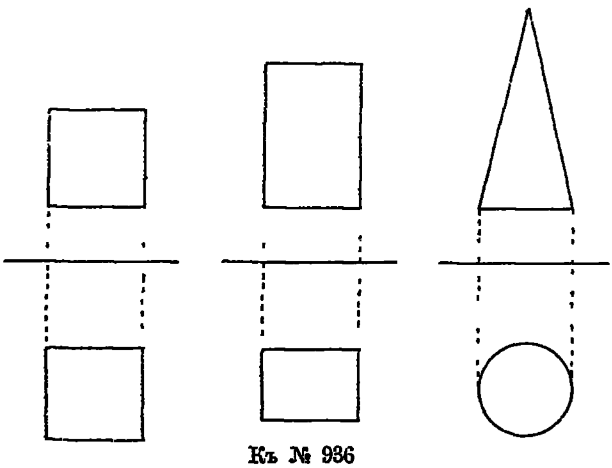


Къ № 926

926. Проекціи какой фигуры на плоскости проекцій даны (стр. 333) на чертежѣ? (Проекціи треугольника) — Что мы видимъ на чертежѣ? (Разстоянія его вершинъ до плоскостей проекцій и проекціи тр—ка)

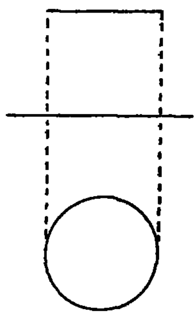


Къ № 929.



Къ № 936

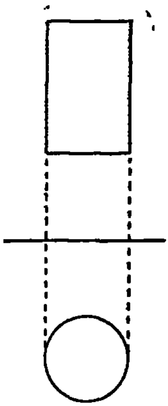
929. «Прочесть» чертежи, относящіеся къ этому нумеру.—Первый даетъ обѣ проекціи треугольника, плоскость котораго параллельна горизонтальной плоскости проекцій и находится на разстояніи a_2o отъ этой плоскости, вершины тр—ка не одинаково удалены отъ вертикальной плоскости проекцій, тр—къ равенъ своей горизонтальной проекціи — Второй чертежъ даетъ проекціи пятиугольника, равнаго своей вертикальной проекціи, и плоскость его параллельна вертикальной плоскости —На какомъ разстояніи онъ находится отъ нея?—На какихъ разстояніяхъ отъ горизонтальной плоскости находятся его вершины?— Третій чертежъ даетъ проекціи круга, плоскость котораго параллельна горизонтальной плоскости —На какомъ разстояніи отъ этой плоскости находится этотъ кругъ?—Какъ великъ его діаметръ? его радіусъ?



Къ № 929.

935. Геометрическія тѣла (многогранники и круглыя) тоже можно проектировать на двѣ взаимно-перпендикулярныя плоскости проекцій —Этому, между прочимъ, учитъ особая наука — начертательная геометрія

Учитель долженъ взять модель какого-нибудь тѣла и разъяснить смыслъ проекцій съ помощью воображаемыхъ тѣней, отбрасываемыхъ тѣломъ на выбранныя плоскости проекцій При этомъ онъ долженъ настойчиво и часто напоминать о томъ, что лучи свѣта въ занимающихъ насъ проекціяхъ идутъ всѣ параллельно другъ другу, притомъ перпендикулярно къ избранной плоскости проекцій —Необходимо выяснить, притомъ нагляднымъ путемъ, что кубу можно придать такое положеніе, при которомъ его проекціи будутъ квадратами, и такое, когда проекціи его не квадраты —Тѣни знакомы учащимся съ ранняго дѣтства, и вся трудность состоить только въ томъ, что они знакомы съ тѣнями и силуэтами, полученными отъ источниковъ свѣта, испускающихъ лучи, изъ которыхъ не всѣ параллельны другъ другу. Съ вышенамѣченной относительно куба точки зрѣнія, учитель долженъ разсмотрѣть съ учениками «наиболѣе удобныя» для проектированія положенія прямоугольнаго параллелепипеда, прямого цилиндра и прямого конуса —Шаръ надо разсмотрѣть отдѣльно Даже въ начальномъ курсѣ математической географіи указывается на одно изъ доказательствъ шарообразности земли, основанное на томъ, что только шаръ даетъ «всегда» круглую тѣнь —Конечно, о томъ случаѣ, когда лучи свѣта не перпендикулярны къ плоскости проекцій и когда тѣнь, отбрасываемая шаромъ, не представляетъ собою круга, умалчивать не надо —Наглядными пособіями могутъ служить двѣ доски на шарнирахъ или два куска картона съ полотнянымъ сгибомъ, и т п Фигуры изъ деревянныхъ стержней удобнѣе сплошныхъ изъ картона Стержни разнаго цвѣта могутъ служить для изображенія проекцій и проектирующихъ прямыхъ — Чертежный матеріалъ для классной доски — цвѣтные мѣлки

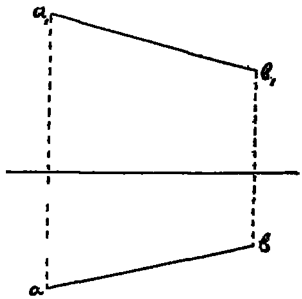


Къ № 936

936. Какія *тѣла* даютъ проекціи, изображенныя на чертежахъ стр 334 и 336?—Первый—проекція нѣкотораго куба, второй—нѣкотораго прямоугольнаго параллелепипеда, третій—нѣкотораго прямого цилиндра, четвертый—нѣкотораго прямого конуса —Но только послѣднія двѣ фигуры суть проекціи непремѣнно тѣлъ, остальныя же двѣ могутъ представлять собою проекціи двухъ прямоугольниковъ — Какихъ?—На первомъ чертежѣ можно принять, что это—проекціи діагональнаго прямоугольника въ кубѣ, т -е проекціи прямоугольника, который наклоненъ къ каждой изъ плоскостей проекцій подъ углами въ 45° и основаніе котораго равно сторонѣ любой изъ данныхъ проекцій, а высота — діагонали этой проекціи — На второмъ чертежѣ проекціи можно принять за проекціи прямоугольника, котораго основаніе равно любой сторонѣ, параллельной оси, а высота — діагонали прямоугольнаго параллелограмма, котораго стороны равны a_1b_1 и a_2b_2

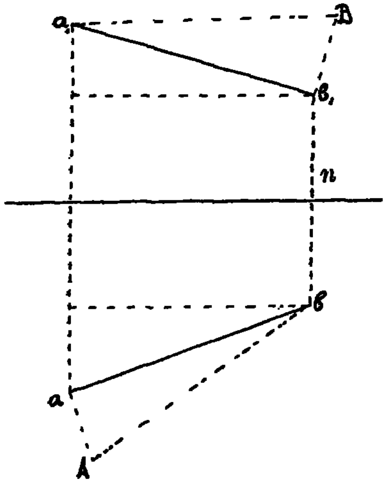
Когда ученики на наглядныхъ пособіяхъ достаточно поупражнялись надъ прямоугольными проекціями куба, прямоугольнаго параллелепипеда, прямого конуса, прямого цилиндра и шара и постигли пользу этихъ проекцій, можно приступить къ изученію пріема опредѣленія истинной длины прямой, которой проекціи даны

938. Возьмемъ прямую линію, помѣстимъ ее между плоскостями проекцій и начертимъ ея проекціи на эти плоскости — Пусть прямая ab — горизонтальная проекція, а прямая a_1b_1 — вертикальная проекція этой прямой — Равна ли прямая какой-либо изъ этихъ проекцій? (Нѣтъ, она больше каждой изъ нихъ, такъ какъ она не параллельна ни той, ни другой плоскости проекцій)



Къ № 938

Это упражненіе надо продѣлать сначала «въ воздухѣ», принявъ доску учительскаго стола за горизонтальную плоскость проекцій, а какую-нибудь другую плоскость (переплетъ книги, тетрадь, листъ бумаги) — за вертикальную Каждый ученикъ долженъ въ воздухѣ провести всѣ четыре проектирующія линіи и у себя, на своемъ мѣстѣ, продѣлать то же. За прямую учащіеся могутъ принять карандашъ, ручку отъ пера и т п



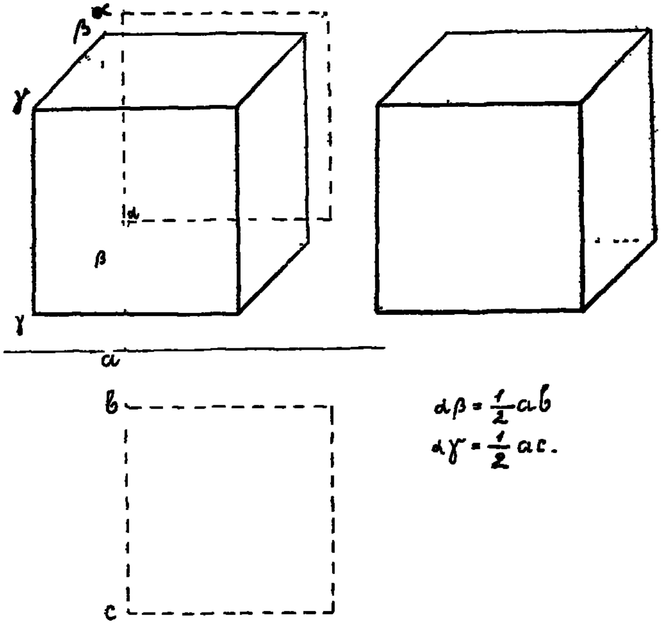
Къ № 938а

***938а.** Какъ по даннымъ проекціямъ нѣкоторой прямой найти истинную длину этой прямой?—*Прямая эта всегда* (если только она не параллельна какой-либо плоскости проекцій) представляетъ собою гипотенузу нѣкотораго треугольника, у котораго одинъ катетъ равенъ горизонтальной (или вертикальной) проекціи данной прямой, а другой равенъ разности между вертикальными (или горизонтальными) проектирующими данной прямой —Прямая AB, равная данной прямой, можетъ быть построена либо. а) какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, котораго одинъ катетъ есть ab, а другой $aA = a_1m - b_1n$, либо б) какъ гипотенуза прямоугольнаго треугольника, котораго одинъ катетъ есть a_1b_1, а другой катетъ b_1B равенъ разности $am - bn$

Эта простая зависимость можетъ быть усвоена учащимися только въ томъ случаѣ вполнѣ и безъ всякаго излишняго труда, если все построеніе проведено «въ воздухѣ», наглядно, притомъ не одинъ, а *много* разъ.

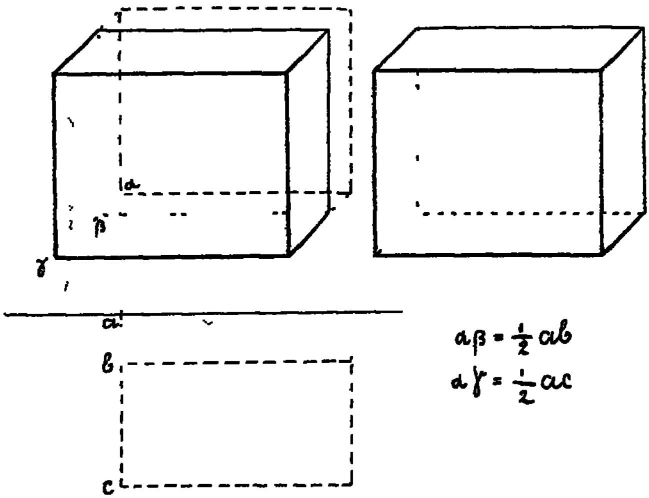
939. Начертите проекціи какого-нибудь куба «въ наиболѣе удобномъ» его положеніи —Когда вы начертите *проекціи* куба, видите ли вы на чертежѣ самый кубъ? (Нѣтъ, куба не видно) —Чтобы вы его увидѣли, приходится сдѣлать одно изъ двухъ: либо научиться *рисовать* кубы, какъ рисуютъ ихъ художники и учителя рисованія, либо научиться изображать ихъ такъ, какъ изображаютъ его чертежники —

Можно договориться (условиться) выполнить *чертежъ* куба слѣдующимъ образомъ изъ лѣвой верхней вершины a вертикальной проекціи провести къ оси проекцій пунктирную прямую влѣво, подъ угломъ въ 45°, изъ остальныхъ вер-



Къ № 939

шинъ провести пунктирныя прямыя параллельно прямой, проведенной изъ точки a, затѣмъ отъ точки a отложить прямую $a\beta$, равную $^1/_2 ab$, и отъ той же точки a прямую $a\gamma$, равную половинѣ прямой ac, точку β соединить съ точкой γ сплошной прямой, изъ точки β провести сплошную прямую, параллельную оси проекцій, до пересѣченія со второй пунктирной линіей, идущей изъ правой вершины вертикальной проекціи, изъ полученной точки пересѣченія провести сплошную прямую, параллельную и равную прямой $\beta\gamma$, и конецъ этой сплошной прямой соединить, сплошною же прямою, съ точкой γ — Пусть этотъ косоугольный параллелограммъ представляетъ собою изображеніе верхняго основанія куба — Передняя грань куба пусть изображается въ видѣ квадрата со сторонами, которыя параллельны сторонамъ



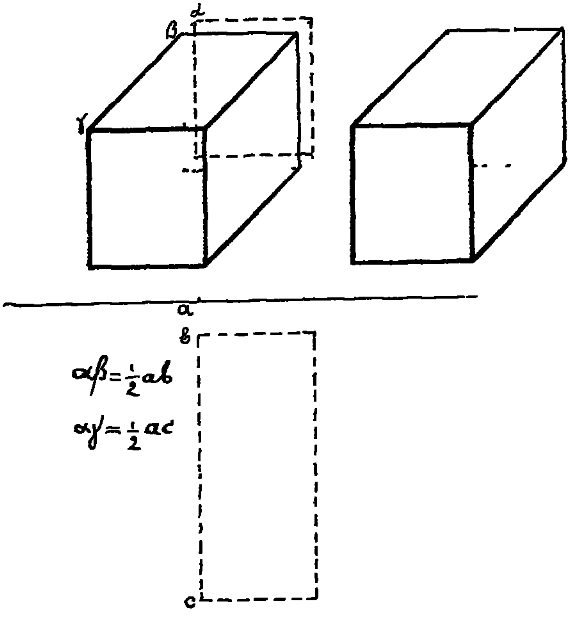
Къ № 939а

прямоугольныхъ проекцій. — Правая грань куба пусть изображается вторымъ косоугольнымъ параллелограммомъ, но лежащимъ на право отъ передней грани — Гдѣ задняя грань куба? — Гдѣ лѣвая его грань? — Гдѣ нижнее основаніе?

Этотъ чертежъ надо выполнить не разъ, не торопясь переходомъ къ слѣдующимъ нумерамъ Учащіеся должны понять, что это — не рисунокъ и что здѣсь нѣтъ перспективы, какъ ее понимаютъ художники

939а. Подобное изображеніе куба называется *параллельной*, но косой проекціей куба — Точно такъ же выполняется параллельная косая проекція прямоугольнаго параллелепипеда, котораго «измѣренія» (длина, ширина и высота) не одинаковы —Отъ перспективнаго рисунка параллельная косая проекція отличается значительно

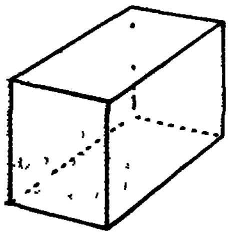
Учащимся надо напоминать о томъ, что параллельныя прямыя иногда кажутся непараллельными, параллель-



Къ № 939б

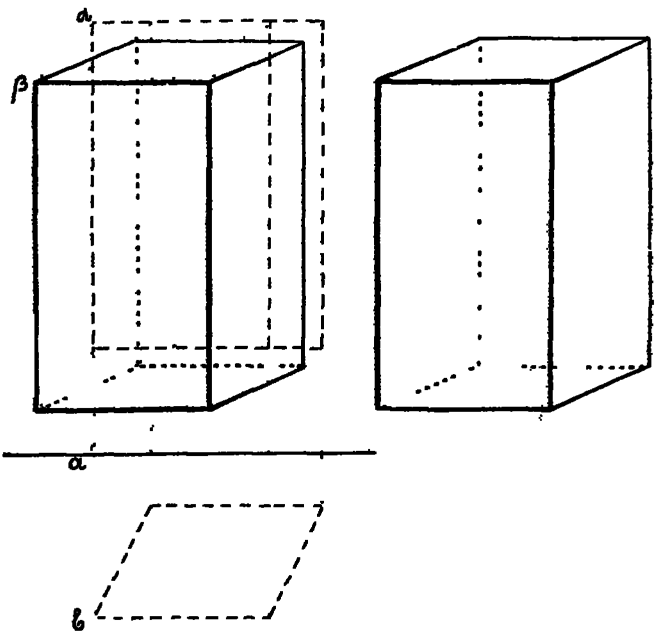
ныя плоскости—непараллельными плоскостями и т. п Они должны понять, что *чертежи* куба и всякаго другого тѣла, выполненные по правиламъ параллельной косой перспективы, только напоминаютъ рисунокъ, но зато они и не требуютъ умѣнія хорошо рисовать.

939б. «Прочесть» чертежъ I этого нумера.—Въ немъ даны горизонтальныя и вертикальныя проекціи нѣкотораго



Къ № 939б (черт II)

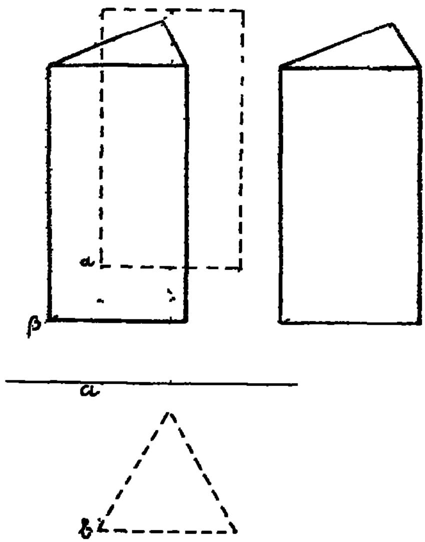
прямоугольнаго параллелепипеда, котораго двѣ грани (передняя и задняя)— квадраты, а длина этого параллелепипеда равна *bc* —На какомъ разстоянiи его задняя грань отстоитъ отъ вертикальной плоскости проекцiй (На разстоянiи *ab*) —На какомъ разстоянiи отъ горизонтальной плоскости проекцiй? (На разстоянiи, равномъ разности между *aa* и стороной квадрата, представляющаго вертикальную проекцiю параллелепипеда) —Тутъ же дано изображенiе параллелепипеда въ параллельной косой проекцiи. —На чертежѣ II данъ рисунокъ параллелепипеда.



Къ № 941

Въ рисункѣ дано перспективное изображеніе параллелепипеда, съ *перспективными* сокращеніями

941. Начертить прямоугольныя проекціи прямого (но не прямоугольнаго) параллелепипеда и его чертежъ въ параллельной косой проекціи

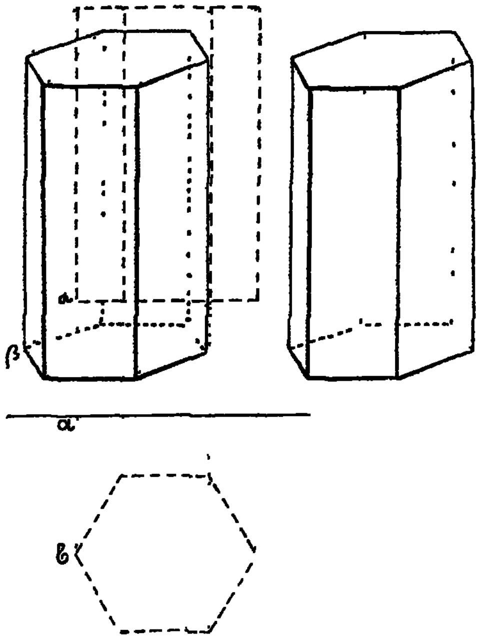


Къ № 943

Практикуемая въ этой книгѣ проекція иначе называется проекціей «кавальерной» Мы изображаемъ тѣло такъ, какъ будто мы смотримъ на него спереди и нѣсколько сверху, но безъ перспективныхъ сокращеній

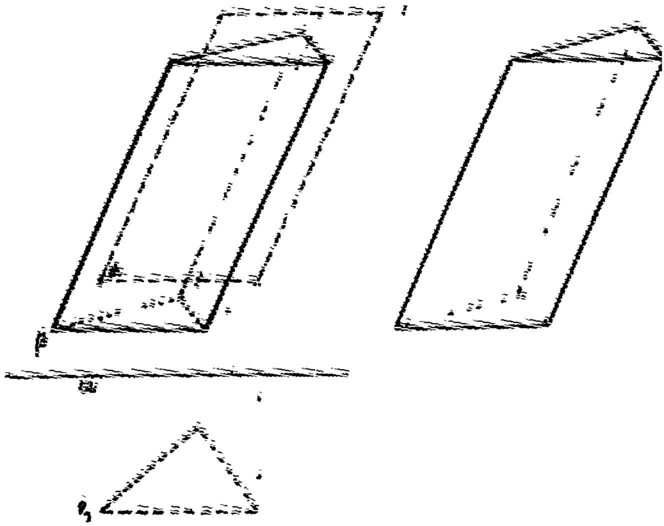
943. Начертить прямоугольныя проекціи правильныхъ призмъ, взявъ ихъ въ «наиболѣе удобномъ положеніи». треугольную, четыреугольную, пятиугольную и шестиугольную. — Начертить ихъ въ косой параллельной проекціи

Что значитъ «наиболѣе удобное» положеніе прямой призмы, опредѣлять не надо Но надо достигнуть того, чтобы учащіеся вполнѣ поняли, что вертикальныя проекціи реберъ должны быть перпендикулярны къ оси проекцій, а горизонтальная проекція прямой призмы должна занимать такое положеніе, чтобы одна сторона

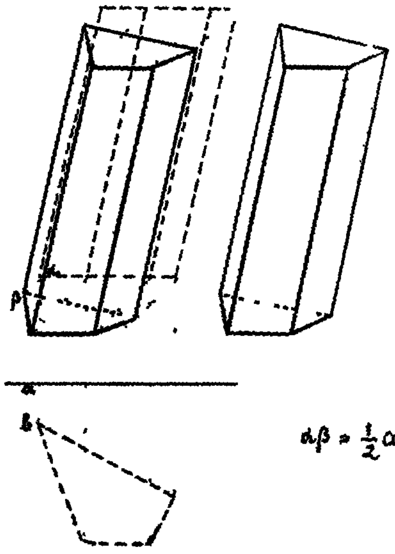


Къ № 943

этой проекціи была параллельна къ оси проекцій — Гораздо значительнѣе трудность сужденія о томъ, какія грани и ребра при косой параллельной проекціи видны зрителю и какія не видны, а также—какія стороны нижняго основанія видны и какія не видны Помочь дѣлу можно только упражненіями на наглядныхъ пособіяхъ и на многочисленныхъ чертежахъ

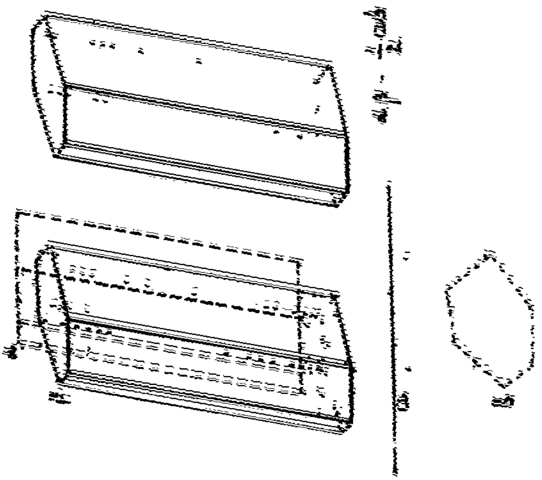


Къ № 945

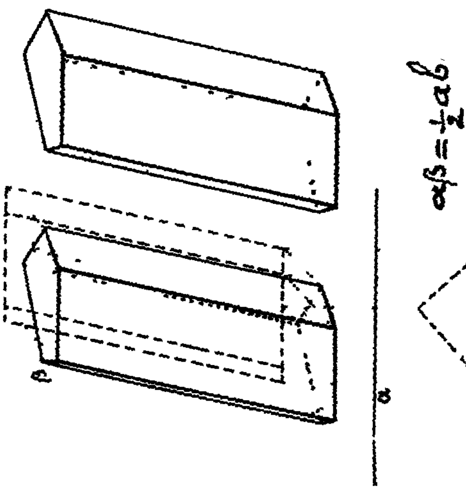


$\alpha\beta = \frac{1}{2}\alpha l$

Къ № 945



Къ № 946.



Къ № 945.

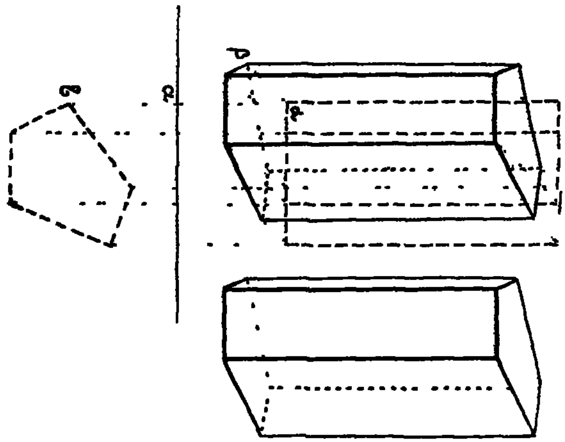
проекцію *вершины* правильной пирамиды она совпадаетъ съ центромъ горизонтальной проекціи пирамиды —Начертить ихъ изображеніе по правиламъ кавальерной проекціи (см стр. 350, 351 и 352).

957. Начертить прямоугольныя проекціи неправильныхъ пирамидъ треугольной, четыреугольной и пятиугольной, и ихъ изображенія по правиламъ кавальерной проекціи (см стр 352 и 353)

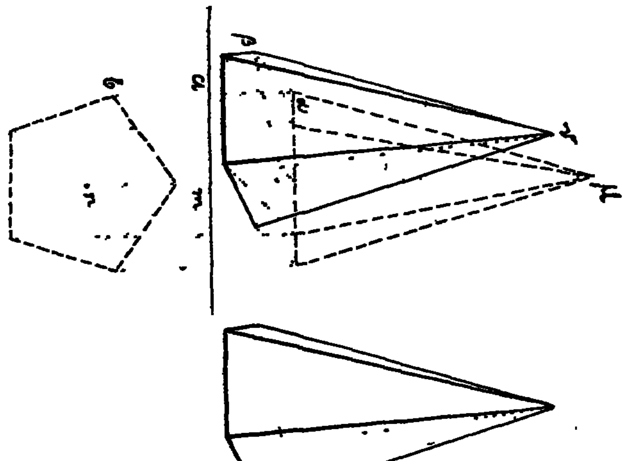
959. Начертить прямоугольныя проекціи многоугольника, придавъ ему такое положеніе въ пространствѣ, чтобы вертикальная его проекція была прямой линіей —Начертить изображеніе этого многоугольника по правиламъ кавальерной проекціи

961. Какую часть разстоянія между горизонтальной проекціей данной вершины мы откладывали на пунктирной прямой, проведенной изъ вертикальной проекціи той же вершины? (Половину) — Подъ какимъ угломъ къ оси проекцій мы проводили пунктирную прямую? (Подъ угломъ въ 45°) — Но можно проводить пунктирную прямую и подъ другимъ угломъ къ оси проекцій, и откладывать другую часть разстоянія горизонтальной проекціи вершины отъ оси проекцій — Пунктирныя прямыя можно проводить, напр, подъ угломъ 30°, можно откладывать не половину, а только треть соотвѣтствующаго разстоянія. — Чертежъ куба получается тогда иной, а равно и чертежъ всякаго иного тѣла — Но это — дѣло условія, договора

963. Мы будемъ отнынѣ чертить призмы и параллелепипеды не иначе, какъ пользуясь правилами кавальерной проекціи — Постараемся начертить кубъ, не вычертивъ предварительно прямоугольныхъ проекцій —Начертить сначала чертежъ въ прямоугольныхъ проекціяхъ, а затѣмъ разобраться въ томъ, каковы тѣ параллелограммы, которые представляютъ верхнее и нижнее основаніе куба въ кава-

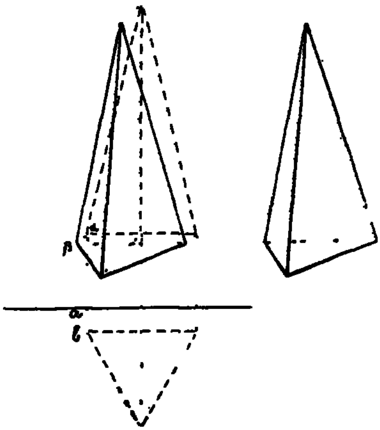


Къ № 947, черт. III.



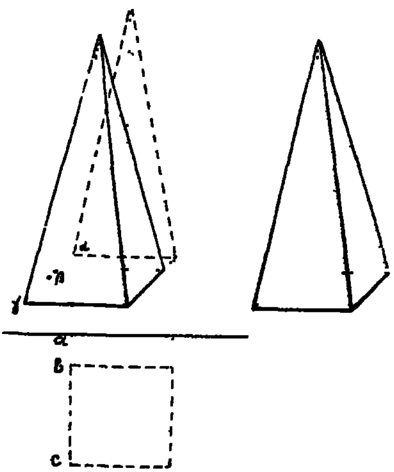
Къ № 950.

льерной проекціи.—Каждая изъ двухъ сторонъ этого параллелограмма равна ребру куба, каждая изъ остальныхъ двухъ сторонъ равна половинѣ ребра куба, острый уголъ равенъ 45°, а тупой — 135°,—Принимая это во вниманіе, начертить, въ кавальерной проекціи, кубъ, котораго ребро равно 3 цм.—Упражненія



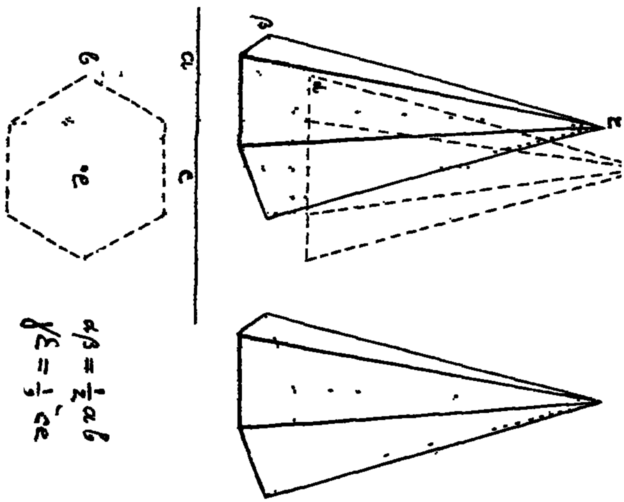
Къ № 950

963a. Начертить въ той же кавальерной проекціи прямоугольный параллелепипедъ, котораго длина равна 5 цм , высота 4 цм , а ширина 3 цм —Когда я буду чертить какое-нибудь тѣло по правиламъ кавальерной проекціи, то замѣтьте, что я буду держаться простѣйшаго правила пунктирную прямую, хотя бы я ея и не проводилъ, я буду подразумѣвать такую, которая съ осью проекцій образуетъ уголъ въ 45°, въ противномъ случаѣ я буду предупреждать —Когда чертежъ надо сдѣлать по правиламъ кавальерной проекціи, то надо знать, какой взять уголъ, если этого не видно изъ чертежа

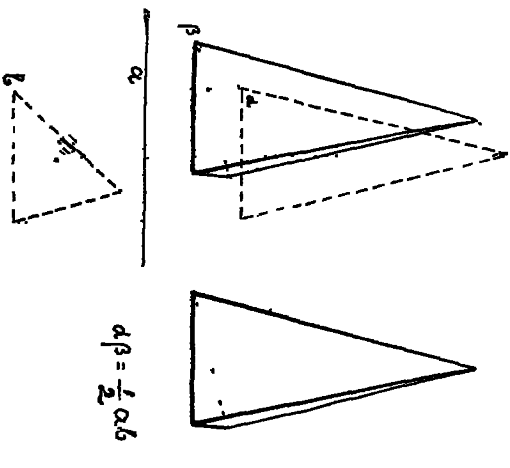


Къ № 950

963б. Начерчу параллелепипедъ въ избранной



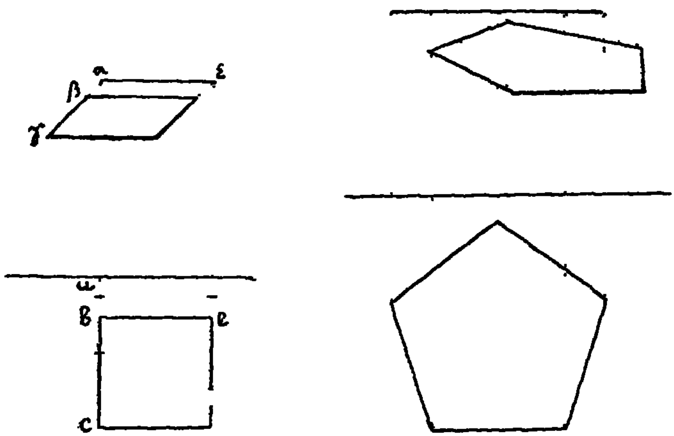
Къ № 950



Къ № 957.

нами кавальерной проекціи передняя грань—прямоугольникъ, верхнее основаніе—косоугольный параллелограммъ, въ которомъ острый уголъ больше 45° —Что это за параллелепипедъ прямоугольный или не прямоугольный? (Не прямоугольный)

963в. Безъ помощи прямоугольныхъ проекцій начертить по правиламъ параллельной проекціи кубъ



Къ № 959

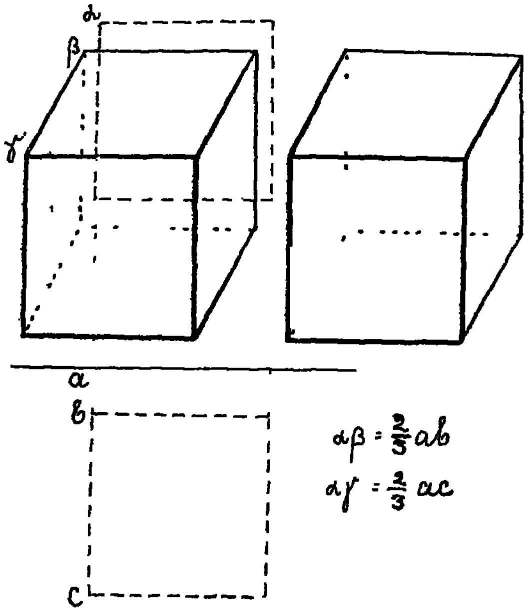
963г. Начертить прямоугольный параллелепипедъ

963д. Начертить прямой, но не прямоугольный параллелепипедъ

963е. Начертить правильную четыреугольную призму

963ж. Начертить правильную четыреугольную пирамиду

Остальные многогранники вычерчиваются безъ прямоугольныхъ проекцій не столь же опредѣленно, потому что неизвѣстны взаимныя соотношенія угловъ и сторонъ, и этого скрывать отъ учащихся не для чего Важно только то, чтобы условность принциповъ кавальернаго проектированія на вертикальную плоскость проекцій учащіеся усвоили себѣ вполнѣ При этомъ разовьется ихъ пространственное воображеніе, если только учитель будетъ обращать вниманіе учениковъ на то, какія грани и ребра принадлежатъ къ числу видимыхъ, и какія—къ числу невидимыхъ Всѣ упражненія этого параграфа дадутъ учащимся увѣренность при выполненіи стереометрическихъ чертежей и избавятъ ихъ



Къ № 961

отъ неувѣреннаго инстинктивнаго слѣдованія неизвѣстнымъ имъ правиламъ проектированія и связанныхъ съ такимъ черченіемъ ошибокъ воображенія и сужденія —Время, на это затраченное, будетъ затрачено на начатки такъ наз «начертательной геометріи» и на усвоеніе учащимися азбуки проекціоннаго черченія, важнаго въ геометріи, кристаллографіи, картографіи и техникѣ —Если учащій почему-либо не достаточно

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

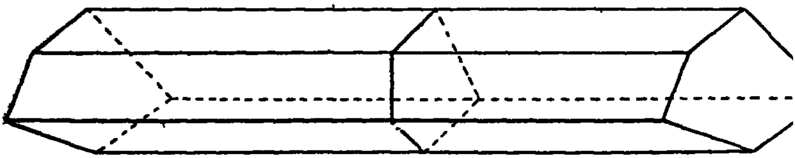
Вычисленіе объемовъ нѣк. тѣлъ.

§ 16 Объемы призмъ и прямыхъ цилиндровъ

965 Чѣмъ измѣряется *длина* прямой? (Единицею мѣры *длины* аршиномъ, вершкомъ, метромъ и т п) —Чѣмъ измѣряется *площадь* фигуры? (Единицею мѣры *площадеи:* кв. аршиномъ, кв вершкомъ, кв метромъ) —Что такое аршинъ? (Аршинъ—*длина* опредѣленнаго стержня, образецъ котораго хранится въ Палатѣ мѣръ и вѣсовъ въ Петербургѣ).—Что такое метръ? (Метръ—*длина* стержня, образецъ котораго хранится въ Бюро долготъ въ Парижѣ) —Что такое квадратный аршинъ? (*Площадь* квадрата, а не самый квадратъ, въ которомъ длина стороны равна аршину) —Что такое кв. метръ? (Площадь квадрата, а не самый квадратъ, въ которомъ длина стороны равна метру) —И т д —Умѣемъ ли мы *вычислять* площади какихъ-либо фигуръ? (Умѣемъ вычислять площади параллелограммовъ, треугольниковъ, трапецій, многоугольниковъ и круговъ, если извѣстны нѣкоторыя, необходимыя для того, данныя) —Умѣемъ ли вычислять поверхности нѣкоторыхъ тѣлъ? (Умѣемъ вычислять боковыя поверхности призмъ, пирамидъ, прямыхъ конусовъ, прямыхъ цилиндровъ и полныя поверхности шаровъ, если извѣстны нѣкоторыя данныя)

Можно заняться съ учениками перечисленіемъ тѣхъ данныхъ, при которыхъ они умѣютъ вычислять перечисленныя площади и поверхности

966. Возьмемъ какое-нибудь *тѣло*, которое можно дѣйствительно разрѣзать на нѣсколько различныхъ частей — Можно ли эти части сложить такъ, чтобы полученное тѣло имѣло другую форму? (Можно) — Изъ одного и того же куска воска или мокрой глины можно вылѣпить, сдѣлать нѣсколько тѣлъ *различной* формы, не прибавляя ни куска воска или глины и не убавляя ни кусочка — Форма у двухъ тѣлъ вообще можетъ быть совершенно различная, а *объемъ* у нихъ при этомъ можетъ быть одинъ и тотъ же — Напр., косую пятиугольную призму можно разрѣзать на двѣ части пло-



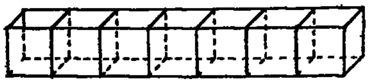
Къ № 966

скостью, не параллельною къ основаніямъ, и полученныя части можно сложить такъ, чтобы снова получилась пятиугольная призма, но уже другой формы — Примѣры карандашъ, линейка, доска, кусокъ коровьяго масла, мыла.

966а. Можно ли сдѣлать два сосуда одинаковой «емкости», но разной формы, напр., сосудъ, имѣющій форму стакана, и сосудъ той же емкости, но другой формы, напр., имѣющій форму чашки?

Кромѣ моделей многогранниковъ и круглыхъ тѣлъ, на этой ступени въ распоряженіи учителя,—и если возможно, то и учениковъ,—долженъ бы быть воскъ для лѣпки и «стэки» (палочки, облегчающія лѣпку) Глина для лѣпки менѣе удобна, такъ какъ требуетъ воды, полотенца и т п Но, при хорошо дисциплинированномъ и работящемъ классѣ, и глина пригодна — Опытъ показываетъ, что только въ исключительныхъ случаяхъ, на урокахъ физики, химіи и др отрасли естествознанія, приборы, вода, полотенце, инструменты нѣе *горизонтальныхъ* граней преимущественно—нижнюю — За высоту можно принять перпендикуляръ, опущенный изъ любой точки верхняго основанія прямоугольнаго параллелепипеда на нижнее —Обыкновенно за высоту прямоугольнаго параллелепипеда принимаютъ правое ребро изъ двухъ переднихъ

971. Построить *прямоугольный* параллелепипедъ, у котораго высота и ширина порознь равны 1 цм , а длина 7 цм , и отдать себѣ отчетъ въ томъ, сколькимъ кубическимъ цм равенъ его объемъ —Для этого раздѣлимъ весь параллелепипедъ на кубы плоскостями, отстоящими одна отъ другой на разстояніи одного цм , параллелепипедъ раздѣлится на семь кубовъ, а объемъ каждаго изъ нихъ равенъ 1-му куб цм —Замѣтьте если два измѣренія прямоугольнаго параллелепипеда равны каждое одной единицѣ мѣры длины, то объемъ этого параллелепипеда равенъ столькимъ одноименнымъ кубическимъ единицамъ (единицамъ мѣры объема), сколько единицъ мѣры длины въ третьемъ измѣреніи этого параллелепипеда

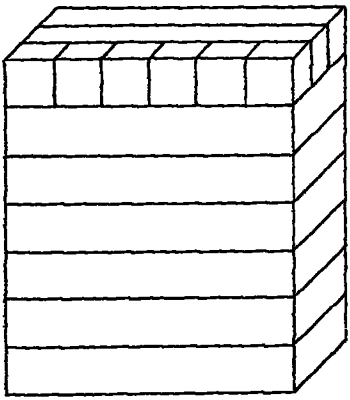


Къ № 971

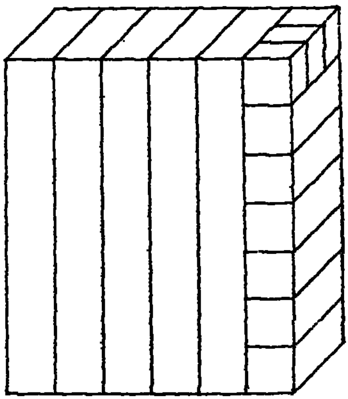
Какъ это ни ясно, но въ виду того, что именно это лежитъ въ основѣ вычисленія объемовъ всякихъ параллелепипедовъ, ученикамъ необходимо въ этомъ направленіи нѣкоторое количество упражненій съ наглядными пособіями и чертежами и безъ нихъ

973. Построить *прямоугольный* параллелепипедъ, высота котораго равна 1 цм , длина—6 цм ширина—4 цм — Вычислить, чему равенъ объемъ этого параллелепипеда — Раздѣлимъ этотъ параллелепипедъ на 4 равныхъ параллелепипеда, въ каждомъ изъ которыхъ ширина и высота порознь равны одному цм —Получимъ, что объемъ этого параллелепипеда равенъ 6 куб. цм $\times 4 = 24$ куб цм —Отдайте себѣ и отдать себѣ отчетъ въ томъ, чему равенъ объемъ этого параллелепипеда въ кубическихъ цм —Для этого отмѣтимъ дѣленія на каждомъ изъ трехъ его измѣреній —«Разрѣжемъ» параллелепипедъ плоскостями, параллельными основанію на 7 параллелепипедовъ, «слоевъ», у которыхъ высоты одинаковы и порознь равны 1 цм , ширина равна 3 цм , длина равна 5 цм

Параллельныя прямыя лучше всего проводить сначала на передней грани, потомъ на видной на чертежѣ боковой, и для большей близости чертежа къ рисунку, лучше не проводить на чертежѣ невидимыхъ прямыхъ



Къ № 975а



Къ № 975а

975а. Одинъ изъ этихъ параллелепипедовъ, — лучше всего верхній, — можемъ разрѣзать на одинаковыя части плоскостями, параллельными къ переднимъ гранямъ всего параллелепипеда, и каждая изъ этихъ частей будетъ имѣть въ ширину и въ высоту по одному цм

Объемъ каждой части $=$ 6 куб. цм.

„ каждаго слоя $=$ 6 куб цм $\times 3 =$ 18 куб цм

„ всего параллелеп $=$ 18 куб цм $\times 7 =$ 126 куб цм

— Можемъ того же результата достигнуть и иначе, а именно, какъ показано на чертежахъ (стр 361 и 362)

$$7 \text{ куб цм} \times 3 \times 6 = 126 \text{ куб цм}$$

$$\text{или } 3 \text{ куб цм} \times 7 \times 6 = 126 \text{ куб цм}$$

978. Какое вытекаетъ отсюда правило для вычисленія объема прямоугольнаго параллелепипеда? (Можно вычислить объемъ въ кубическихъ единицахъ мѣры слѣдующимъ образомъ прежде всего измѣрить одною и тою же единицей мѣры длины три его измѣренія, затѣмъ найти площадь основанія, замѣнить единицы мѣры площадей одноименными кубическими единицами, полученное помножить на число единицъ длины, содержащихся въ высотѣ) —Короче это правило выражаютъ такъ объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ площади основанія, помноженной на высоту, или такъ объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію всѣхъ трехъ его измѣреній

Условность послѣднихъ двухъ формулировокъ должна быть учениками понята вполнѣ Поэтому не надо удовлетворяться только тѣмъ, что они умѣютъ теорему формулировать надо стремиться къ тому, чтобы учащіеся отдавали себѣ полный отчетъ въ основаніяхъ этой формулировки Для достиженія же этой цѣли имъ необходимо выполнить достаточное количество чертежей, подобныхъ чертежамъ №№ 975 и 975а, и на урокахъ, при учителѣ, подробно выяснять *вслухъ*, въ чемъ дѣло, не ограничиваясь однѣми лишь формулами и механически, про себя выполняемыми, вычисленіями

979. Справедливо ли это правило относительно объема прямоугольнаго параллелепипеда въ тѣхъ случаяхъ, когда одно, два или всѣ три измѣренія выражаются въ видѣ дробныхъ чиселъ?—Напр, когда длина и ширина содержатъ по цѣлому числу вершковъ, а высота равна $^3/_4$ вершка, или когда длина его содержитъ цѣлое число вершковъ, а высота $^3/_4$ вершка и ширина $^5/_8$ вершка, или, наконецъ, когда и длина, и высота, и ширина выражаются дробными числами $^3/_4$ вершка, $^5/_6$ вершка и $^1/_2$ вершка? (Справедливо) —Что правило это во всякомъ случаѣ справедливо,— можно убѣдиться построеніями и разсужденіями —Построить параллелепипедъ, котораго измѣренія по порядку равны $^1/_2$ вершка, $^1/_6$ вершка и $^1/_4$ вершка и отдать себѣ отчетъ въ томъ, какую часть куб вершка составляютъ три параллелепипеда, въ которыхъ 3

измѣренія	перваго	1 вершокъ,	1 в	и $^1/_4$ в
„	второго	1 „	$^1/_2$ в	и $^1/_4$ в
„	третьяго	$^1/_6$ вершка,	$^1/_2$ в	и $^1/_4$ в

Объемъ такого параллелепипеда, въ которомъ длина $^1/_2$ в , ширина $^1/_4$ в , а высота $^1/_6$ в , очевидно, равенъ

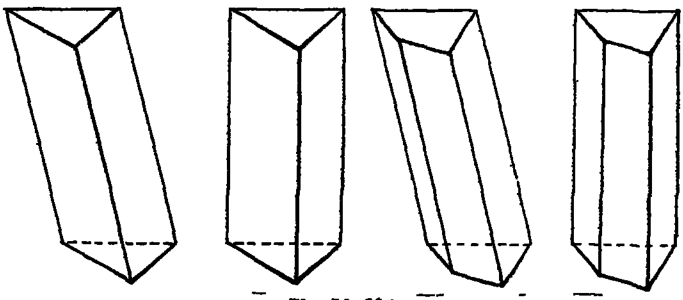
$$^1/_2 \text{ куб в} \times {}^1/_4 \times {}^1/_6 = {}^1/_{48} \text{ куб в}$$

—Если числитель у какой-либо дроби больше единицы, то это значитъ, что и соотвѣтствующее измѣреніе параллелепипеда во столько же разъ больше, и что параллелепипедъ въ такомъ случаѣ, больше того параллелепипеда, въ которомъ соотвѣтствующее измѣреніе равно одной долѣ единицы длины

Упражненія въ этомъ случаѣ должны опираться какъ на чертежи, такъ и на разсужденія Лишь весьма многочисленныя упражненія въ этомъ направленіи дадутъ возможность учащимся не на-вѣру только, а по существу, усвоить себѣ ясное представленіе объ объемѣ любого параллелепипеда, объ основаніяхъ вычисленія и о самомъ этомъ вычисленіи Только въ этомъ случаѣ ученики не рискуютъ дѣлать ошибокъ въ разсужденіи, въ единицахъ мѣры и въ ученіяхъ объ измѣреніи и вычисленіи объемовъ вообще

985. Начертить прямой, но не прямоугольный, параллелепипедъ въ кавальерной проекціи, обратить его въ прямоугольный параллелепипедъ, разобраться въ томъ 1) какъ великъ объемъ послѣдняго, 2) какъ великъ объемъ первоначальнаго прямого параллелепипеда, и 3) чему равенъ

Необходимо наглядное пособіе изъ сырого картофеля, изъ воска, мыла, дерева, или изъ бумаги Можно воспользоваться любой коробкой (напр., для спичекъ), пеналомъ Достаточна въ этомъ случаѣ та *помощь*, которую наглядное пособіе можетъ и должно оказать воображенію учениковъ Иногда нѣтъ даже надобности въ дѣйствительномъ разрѣзываніи прямоугольнаго параллелепипеда достаточно только показать, въ какомъ направленіи надо провести «діагональную» плоскость Сначала полезно обратиться къ прямоугольному па-



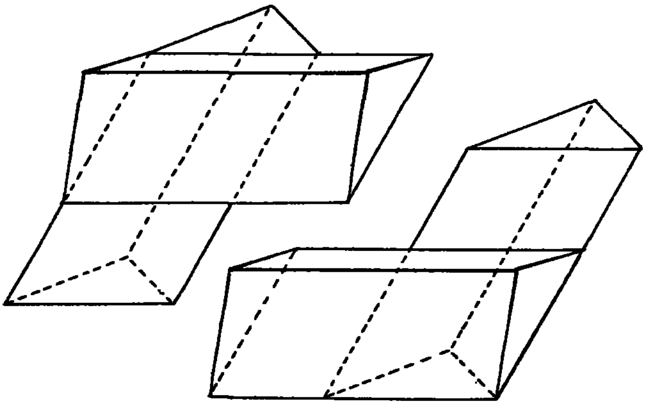
Къ № 995

раллелепипеду съ квадратнымъ основаніемъ Комната— хорошій примѣръ прямоугольнаго параллелепипеда — Для усиленія работы воображенія полезно выполнить *чертежъ этого нумера, въ которомъ вторая призма приведена* въ такое положеніе, что ея совмѣстимость съ первой очевидна

992. Начертить прямой, но не прямоугольный параллелепипедъ, раздѣлить его на двѣ треугольныя призмы діагональной плоскостью и отдать себѣ отчетъ въ томъ, совмѣстимы ли эти двѣ призмы — Замѣтьте основанія не прямоугольники, а потому острые ихъ углы въ параллельной проекціи возьмите либо больше, либо меньше, чѣмъ 45°.

995. Начертить наклонныя призмы треугольную, четыреугольную (не параллелепипедъ), параллелепипедъ, пятиугольную призму, и рядомъ съ каждою—соотвѣтствующую прямую съ такими же основаніями и такой же высотой

На этотъ простой вопросъ обыкновенно слѣдуетъ единогласный утвердительный отвѣтъ учениковъ, котораго не надо опровергать иначе, какъ предложивъ имъ отдать себѣ полный отчетъ въ томъ, какими гранями можно прикладывать одну призму къ другой Надо въ разрѣшеніе ими этого вопроса внести побольше сознательности, а потому слегка указать пріемъ, который приведетъ къ его расчлененію и *систематическому* опроверженію даннаго учениками невѣрнаго отвѣта При этомъ наглядное пособіе можетъ оказаться прямо необходимымъ и неизбѣжнымъ, такъ какъ однимъ во-



Къ № 1001а

ображеніемъ очень трудно постигнуть, что какими бы мы гранями ни прикладывали одну призму къ другой, мы параллелепипеда не получимъ —Избѣгать въ этомъ случаѣ наглядности только потому, что ученики уже находятся на довольно высокой ступени геометрическаго знанія, не разсудительно Дѣло въ томъ, что здѣсь нужно гораздо больше чувственнаго воспріятія, чѣмъ вооображенія и знанія. Большею частью, ученики не въ состояніи себѣ *представить* вѣрнаго рѣшенія этого вопроса, потому что у нихъ для этого нѣтъ ни достаточнаго опыта, ни достаточнаго количества чувственныхъ воспріятій этого рода Поэтому только въ крайнемъ случаѣ можно ограничиться одними чертежами только два прямыхъ параллелепипеда разной формы, если, наконецъ, основанія данныхъ двухъ треугольныхъ призмъ— *разносторонніе* треугольники, то можно получить три прямыхъ параллелепипеда разной формы

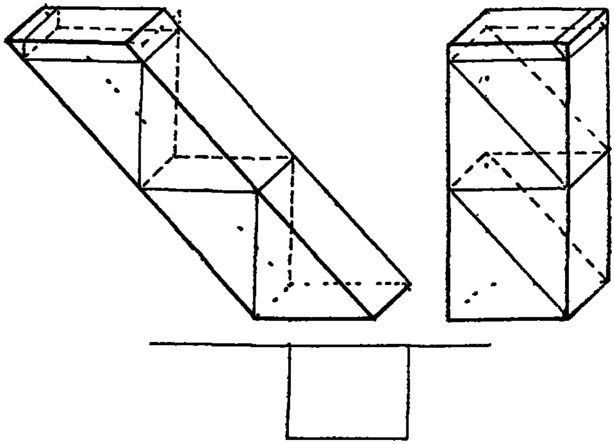
Наглядныя пособія въ этомъ случаѣ чрезвычайно полезны Такъ какъ въ продажѣ нѣтъ наглядныхъ пособій, спеціально приспособленныхъ для преслѣдуемой въ этомъ нумерѣ цѣли, то надо изготовить три пары цѣлесообразныхъ моделей изъ бумаги или картона Къ этому изготовленію надо привлечь учащихся

1003. Начертить *прямоугольный* параллелепипедъ и провести въ немъ какую-нибудь «діагональную» плоскость» —Помните ли вы какая плоскость называется діагональною? (Плоскость, которая проходитъ черезъ діагонали двухъ противоположныхъ граней). —Можно сказать такъ если плоскость проходитъ черезъ два ребра параллелепипеда и раздѣляетъ его на двѣ части, то эта плоскость называется діагональною —Почему я добавилъ слова «и раздѣляетъ его на двѣ части?» (Потому что плоскость всякой грани проходитъ черезъ два какихъ-нибудь ребра, но не представляетъ собою діагональной плоскости).—На какія двѣ части раздѣлился параллелепипедъ? (На двѣ прямыя треугольныя призмы) —Совмѣстимы ли онѣ?

Воспитывать сужденіе учащихся къ осторожности, конечно, необходимо и въ основномъ курсѣ математики Но ученики должны понять эту необходимость изъ опыта и изъ ошибокъ, сдѣланныхъ ими въ сужденіи Ошибки эти должны быть сознаны вполнѣ, и колебанія должны разрѣшаться неопровержимыми выводами изъ пользованія наглядными пособіями Поэтому, какой бы отвѣтъ ни получился на послѣдній вопросъ этого нумера, учитель долженъ повести учениковъ къ разбору вопроса, и лучшимъ отвѣтомъ онъ долженъ счесть нерѣшительность въ отвѣтѣ

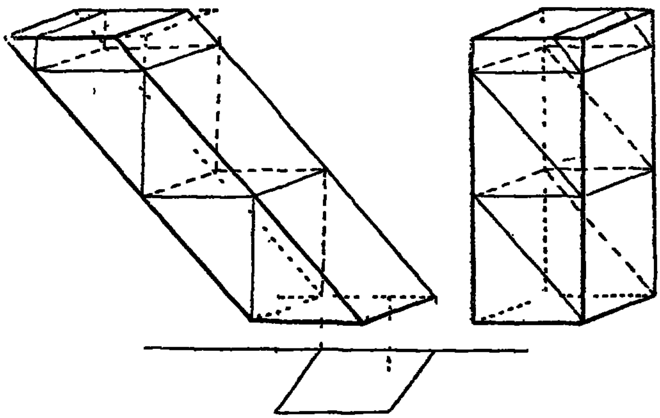
1003a. Отдѣлимъ вторую, направо стоящую, треугольную призму, повернемъ ее на 90° вокругъ ближайшаго къ

1014. Какъ убѣдиться въ томъ, что наклонный параллелепипедъ раздѣляется діагональной плоскостью на двѣ *равновеликія* треугольныя призмы?—Для этого надо поступить слѣдующимъ образомъ 1) разрѣзать параллелепипедъ плоскостью, перпендикулярною къ его ребру, на двѣ части; 2) изъ этихъ двухъ частей составить прямой параллелепипедъ, 3) этотъ прямой параллелепипедъ раздѣлить діаго-



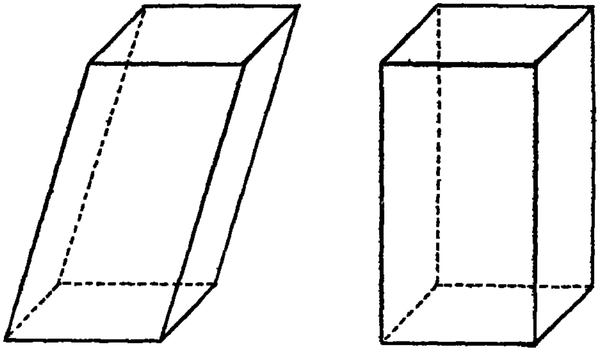
Къ №№ 1020 и 1020а

нальной плоскостью на двѣ одинаковыя (совмѣстимыя) треугольныя призмы, и 4) изъ нихъ опять составить прежній параллелепипедъ —Тогда окажется, что каждая изъ двухъ наклонныхъ треугольныхъ призмъ состоитъ изъ двухъ частей, и что изъ двухъ частей одной можно составить прямую призму, совмѣстимую съ тою, которую можно составить изъ двухъ частей другой —Равновелики ли получившіяся прямыя призмы? (Не только равновелики, но и совмѣстимы) —Равновелики ли наклонныя призмы, на которыя діагональная плоскость дѣлитъ наклонный параллелепипедъ? (Равновелики, но не совмѣстимы) —Почему не совмѣстимы? (Потому параллельныхъ граней перпендикулярны къ плоскостямъ основаній, а затѣмъ надъ наклонными параллелепипедами «двоякаго» наклона, т.-е. такими, въ которыхъ углы, образованные плоскостями всѣхъ граней съ плоскостями основаній, отличаются отъ прямыхъ двугранныхъ угловъ.—Въ чертежахъ №№ 1020 и 1020а горизонтальная проекція, для простоты, дана не вся, дана только горизонтальная проекція нижняго основанія.

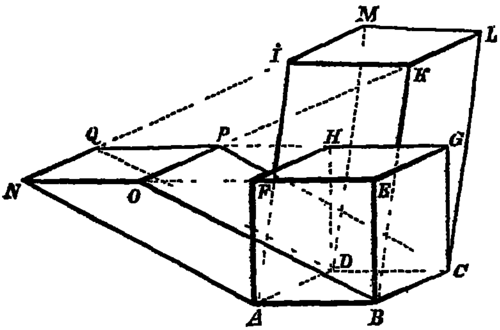


Къ № 1020а.

1020а. Начертите наклонный параллелепипедъ, основаніе котораго — косоугольный параллелограммъ, передняя и задняя грань перпендикулярны къ плоскости основанія, и обратите его въ прямой параллелепипедъ съ тѣмъ же основаніемъ и тою же высотою.—*Всякій ли наклонный* параллелепипедъ можно обратить въ прямой съ тѣми же ребрами и съ основаніемъ, перпендикулярнымъ къ этимъ ребрамъ? (Всякій).—Слѣдуетъ ли изъ этого, что всякій наклонный параллелепипедъ раздѣляется діагональной плоскостью на двѣ равновеликія треугольныя призмы? (Слѣдуетъ).—Почему? (Потому что, обративъ наклонный параллелепипедъ въ прямой съ тѣми же ребрами и перпенди-



Къ № 1029

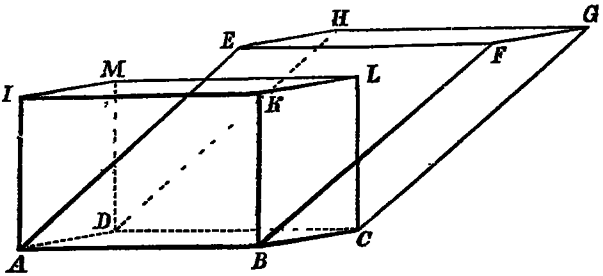


Къ № 1029

его высоту —Что при этомъ понимаютъ подъ высотою параллелепипеда? (Перпендикуляръ, опущенный изъ какой-либо точки верхняго основанія на плоскость нижняго).— Разобраться въ чертежахъ этого нумера

Проведеніе высоты на чертежахъ разнаго рода, изображающихъ параллелепипеды, *необходимо*.—Чертежи № 1020 и 1020а крайне полезны, какъ и чертежи этого нумера

1040. Начертить прямую треугольную призму, основанie которой *прямоугольный* треугольникъ —Чему равенъ ея объемъ? (Произведенiю площади *ея* основанiя на высоту).—Почему?—Потому что такая призма составляетъ половину прямоугольнаго параллелепипеда, котораго основанiе



Къ № 1029

вдвое больше основанiя этой призмы, а высота равна ея высотѣ —Объемъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ

$$a \text{ куб ед} \times b \times h,$$

гдѣ буква a обозначаетъ число единицъ длины, заключающихся въ ширинѣ, буква b—число единицъ длины въ толщинѣ и буква h—число единицъ длины въ высотѣ —Если въ прямой призмѣ основанiе—прямоугольный треугольникъ, котораго одинъ катетъ содержитъ a единицъ длины, а другой b единицъ длины, то объемъ этой призмы долженъ равняться

$$\frac{a \text{ куб ед} \times b \times h}{2}$$

или $$a \text{ куб ед} \times \frac{b}{2} \times h$$

Но произведенiе $$a \times \frac{b}{2}$$

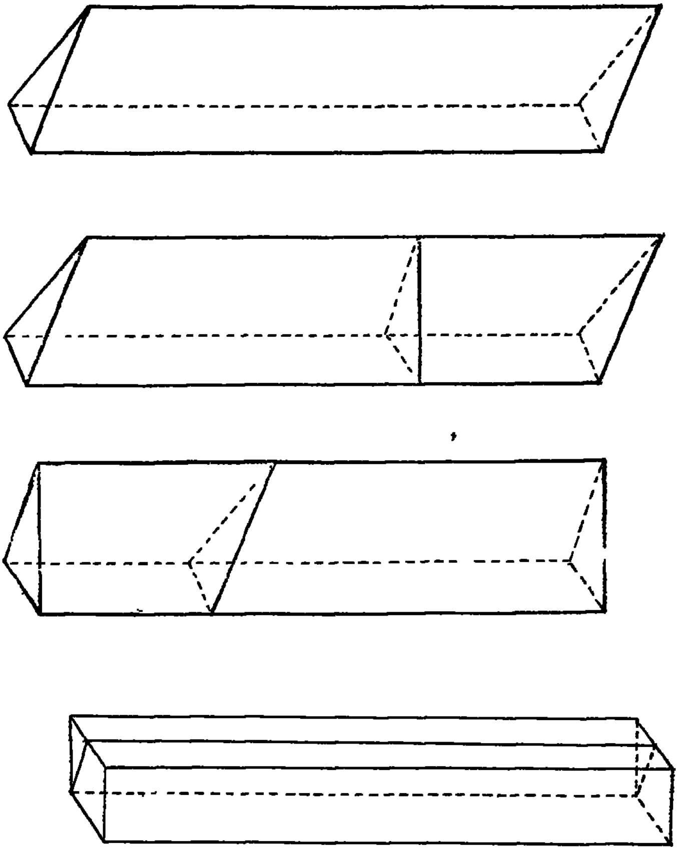
выражаетъ число кв единицъ въ площади основанія этой призмы —А потому объемъ такой прямой треугольной призмы, въ которой основаніе — прямоугольный треугольникъ, равенъ произведенію площади *ея* основанія на высоту.

1042. Начертить прямую треугольную призму, въ которой основаніе—остроугольный или тупоугольный треугольникъ —Разсудите, чему равенъ ея объемъ?—Онъ тоже равенъ площади основанія, помноженной на высоту.—Почему?

1042а. Разсудить и вычислить, чему равенъ объемъ наклонной треугольной призмы? (Для этого надо разрѣзать ее плоскостью, перпендикулярной къ ея ребру, на двѣ части, изъ этихъ частей составить прямую треугольную призму, и площадь основанія этой послѣдней помножить на длину ребра).—Но можно поступить и иначе —Какъ именно? (См №№ 1044 и 1044а).

Трудность этого пріема лежитъ только въ томъ, что ученики должны представить себѣ вполнѣ ясно возможность разрѣзать треугольную призму плоскостью, перпендикулярною къ ребру, на такія двѣ части, изъ которыхъ можно составить прямоугольный параллелепипедъ, боковое ребро котораго равно ребру первоначальной прямоугольной призмы, а основаніе представляетъ собою прямоугольный параллелограммъ, равновеликій поперечному сѣченію этой призмы Достигнуть этого можно не разсужденіями, а упражненіями на наглядныхъ пособіяхъ и на чертежахъ, подобныхъ нижеприведенному ряду ихъ первоначальная призма, разрѣзанная призма, прямая призма, сложенная изъ частей прежней, наконецъ, прямой параллелепипедъ, составленный изъ частей прямой треугольной призмы на подобіе того, какъ изъ треугольника составляютъ параллелограммъ Прямоугольный параллелепипедъ, равновеликій первоначальной наклонной треугольной призмѣ, въ которомъ основаніе равновелико поперечному сѣченію первоначальной треугольной призмы, не начерченъ за ненадобностью —Труднѣе связь между № 1044 и № 1044а

1044. Обьемы какихъ тѣлъ умѣемъ вычислять?—Мы умѣемъ вычислять обьемы кубовъ, прямоугольныхъ параллелепипедовъ, всякихъ прямыхъ параллелепипедовъ (не не-



Къ № 1042а (прим.)

премѣнно прямоугольныхъ), наклонныхъ параллелепипедовъ, треугольныхъ прямыхъ призмъ и треугольныхъ наклонныхъ призмъ.—Въ какихъ призмахъ намъ приходилось проводить поперечныя сѣченія? (Въ наклонныхъ параллелепипедахъ и въ наклонныхъ треугольныхъ призмахъ) —Нельзя ли обойтись безъ *этихъ поперечныхъ* сѣченій? —Можно, но для этого надо еще кое въ чемъ разобраться —Начертите наклонный параллелепипедъ, въ которомъ двѣ противолежащія грани лежатъ въ плоскостяхъ, перпендикулярныхъ къ основаніямъ —Его можно обратить въ равновеликій съ нимъ прямой параллелепипедъ съ такимъ же основаніемъ и съ высотою, равною перпендикуляру, опущенному изъ какой-нибудь точки верхняго основанія на плоскость нижняго

Чертежъ, сдѣланный по всѣмъ правиламъ прямоугольной проекціи, слишкомъ сложенъ Гораздо больше даетъ чертежъ въ параллельной проекціи, если у учениковъ настолько развито пространственное воображеніе, что они могутъ себѣ ясно представить разрѣзы, сдѣланные перпендикулярно къ плоскостямъ основаній Тогда возможно сближеніе всякаго наклоннаго параллелепипеда съ косоугольнымъ параллелограммомъ, который приличными перпендикулярными разрѣзами обращается въ прямоугольникъ съ тѣмъ же основаніемъ и тою же высотою. См №№ 1020 и 1020а —Полезно обратиться къ наклонному параллелепипеду «двоякаго» наклона Его можно обратить въ наклонный параллелепипедъ простого наклона *тѣми же* пріемами, которые употреблены въ №№ 1020 и 1020а —Слѣдующій нумеръ требуетъ тщательной проработки.

1044а. Начертить *наклонную* треугольную призму и разобраться въ томъ, чему равенъ ея объемъ —Объемъ наклонной призмы равенъ либо. а) площади перпендикулярнаго къ ребру сѣченія, помноженной на длину ребра, либо б) площади *основанія, помноженной* на высоту призмы —Ея объемъ составляетъ половину объема параллелепипеда съ основаніемъ, вдвое большимъ, и тою же высотою

1047. Начертить прямую *многоугольную* призму и провести черезъ одно ея ребро всѣ діагональныя ея плоскости. —Разобраться въ томъ, чему равенъ объемъ каждой того, нѣкоторыя фигуры, ограниченныя прямыми отрѣзками и также отрѣзками (или дугами) окружности) —На какія части раздѣлится прямой цилиндръ? (На нѣкоторое количество прямоугольныхъ параллелепипедовъ и на нѣкоторыя тѣла, ограниченныя плоскими гранями и частями цилиндрической поверхности) —Какъ можно разсматривать эти послѣднія составныя части прямыхъ цилиндровъ, если число прямоугольныхъ призмъ неопредѣленно увеличивается? (Какъ тѣла, весьма близкія къ нѣкоторымъ прямымъ призмамъ) — Чему равенъ объемъ каждой, полученной такимъ образомъ, составной части прямого цилиндра? (Произведенію площади ея основанія на высоту) —Чему равенъ объемъ всего прямого цилиндра? (Суммѣ площадей основаній всѣхъ этихъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ и прямыхъ призмъ, помноженной на высоту, или — короче — площади всего основанія цилиндра на высоту этого цилиндра)

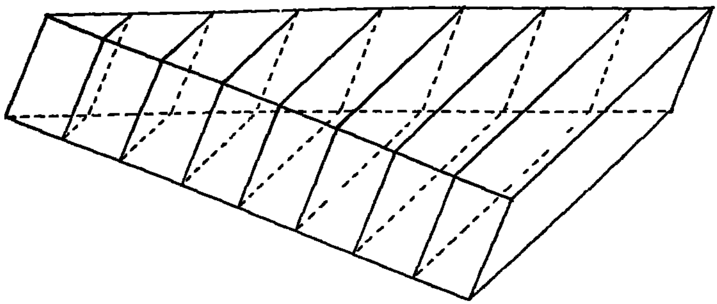
Точка зрѣнія, намѣченная въ этомъ нумерѣ, въ основномъ курсѣ важнѣе той, которая опирается на то, что объемъ цилиндра есть предѣлъ объема вписанной въ него или около него описанной правильной призмы съ безконечно-возрастающимъ числомъ боковыхъ граней —Цѣль основного курса состоитъ не только въ томъ, чтобы въ немъ только *убѣждали* учащихся въ справедливости тѣхъ или иныхъ геометрическихъ истинъ, но и въ томъ, чтобы они, путемъ интуиціи, добирались до этихъ истинъ и представляли себѣ то, что, при строгихъ доказательствахъ, является результатомъ логическихъ процессовъ Эти послѣдніе, впрочемъ, тоже нуждаются въ ранѣе выработанныхъ ясныхъ представленіяхъ и, при наличности ясныхъ представленій, протекаютъ гораздо естественнѣе, легче и плодотворнѣе, чѣмъ безъ нихъ

1056 Какія мы знаемъ формулы для вычисленія объемовъ? (Прямоугольнаго параллелепипеда, прямого параллелепипеда, прямой призмы и прямого цилиндра вращенія.

$$V = q\ H,$$

§ 17. Объемы пирамидъ и прямого конуса.

1060. Начертить двѣ прямыя треугольныя призмы съ одинаковыми основаніями и одинаковыми высотами.—Какъ велики ихъ объемы?—Равновелики ли эти призмы?—Начертить двѣ прямыя треугольныя призмы съ одинаковыми высотами и равновеликими основаніями —Какъ велики ихъ объемы?—Равновелики ли и эти двѣ призмы? (Равновелики)

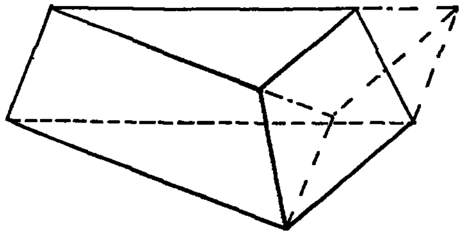


Къ № 1063

1060а. Начертить двѣ наклонныя треугольныя призмы съ одинаковыми высотами и равновеликими основаніями, но съ различными углами наклоненія реберъ къ плоскостямъ основаній —Какъ велики ихъ объемы?—Равновелики ли эти призмы? (Равновелики)

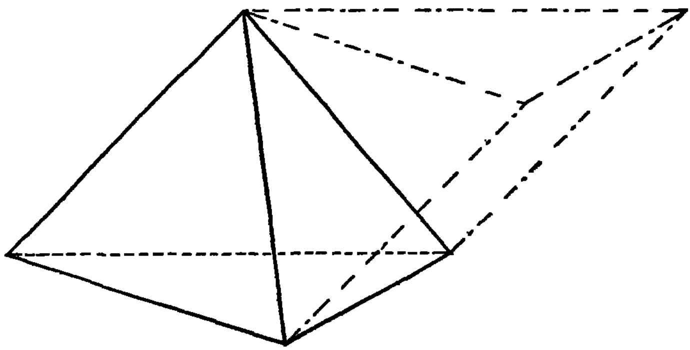
1060б. Начертить прямую треугольную призму и разсѣчь ее такими плоскостями, параллельными къ одной изъ ея граней, чтобы параллельныя прямыя, въ которыхъ эти плоскости пересѣкаютъ одно изъ этихъ основаній, отстояли одна отъ другой на равномъ разстояніи —Отдать себѣ отчетъ въ томъ, что представляетъ собою каждая изъ частей, на которыя раздѣлилась наша призма —Она раздѣлилась на рядъ призмъ, изъ которыхъ только одна—треугольная (поные другъ другу треугольники —То же построеніе сдѣлать съ какой-нибудь многоугольной пирамидой

1067. Построить усѣченную параллельно основанію треугольную пирамиду и къ ней «пристроить» такой мно-



Къ № 1067

гогранникъ, чтобы пирамида вмѣстѣ съ нимъ образовала призму съ основаніемъ, равнымъ большему основанію пирамиды, а высота была бы равна высотѣ пирамиды —При-



Къ № 1067

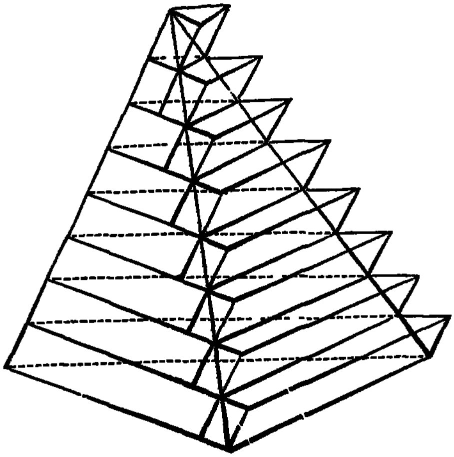
строенная часть—многогранникъ, въ которомъ одна изъ граней—параллелограммъ, двѣ боковыя грани—трапеціи, основанія же его—непараллельные одинъ другому треугольники. —Такой многогранникъ называютъ иногда призмой, томъ больше, объемъ суммы ихъ меньше, такъ какъ онъ всегда меньше, чѣмъ

$$b \text{ куб ед} \times \frac{h}{n},$$

гдѣ b кв ед —площадь основанія пирамиды, h—число единицъ длины, содержащихся въ высотѣ, а n — число?

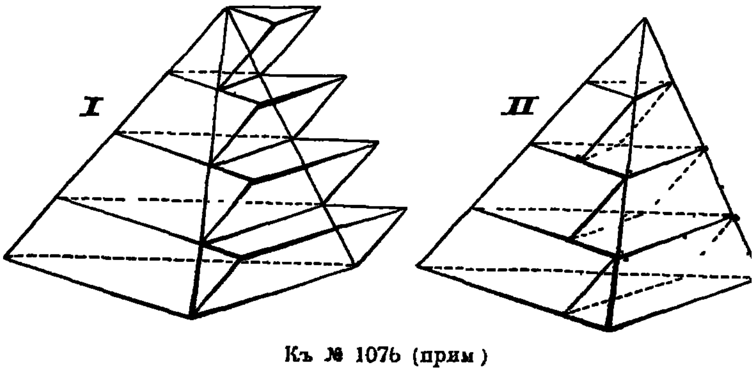
Это разсужденіе требуетъ многихъ упражненій и чертежей Но этимъ смущаться не надо, такъ какъ только они ведутъ къ возможности уразумѣнія того, что пирамиду можно разсматривать, какъ сумму безчисленнаго множества призмъ извѣстнаго устройства При этомъ въ основномъ курсѣ нѣтъ необходимости ни въ доказательствѣ отъ противнаго, ни въ прямомъ доказательствѣ теоремы о томъ, что объемъ треугольной пирамиды равенъ предѣлу объема системы описанныхъ около данной пирамиды или вписанныхъ въ нее призмъ —За-то полезно и даже необходимо, чтобы ученики представляли себѣ ту «лѣстницу», которую пристраиваютъ при описываніи этихъ призмъ Они должны ясно представлять себѣ а) дѣйствительное соотношеніе между суммой дополнительныхъ частей и «наибольшею призмою» пирамиды и б) соотношеніе между объемомъ системы всѣхъ призмъ и объемомъ пирамиды

1076. Пирамида есть сумма безчисленнаго множества усѣченныхъ пирамидъ одинаковой высоты и одной полной пирамиды такой же высоты — Въ то же время каждую изъ этихъ пирамидъ можно разсматривать какъ нѣкоторую призму, основаніе которой равно большему основанію этой пирамиды, ошибка, при этомъ дѣлаемая, тѣмъ меньше, чѣмъ больше число пирамидъ, на которыя мы раздѣлили данную полную пирамиду — Когда мы будемъ имѣть въ виду объемъ всѣхъ этихъ воображаемыхъ призматическихъ слоевъ пирамиды, то этотъ объемъ будетъ отличаться отъ объема пирамиды на объемъ, который меньше объема наибольшей изъ этихъ усѣченныхъ пирамидъ —Но объемъ этой наиболь-шей изъ усѣченныхъ пирамидъ можетъ быть сдѣланъ меньше, чѣмъ какая угодно доля объема данной пирамиды,



Къ № 1076 (прим.)

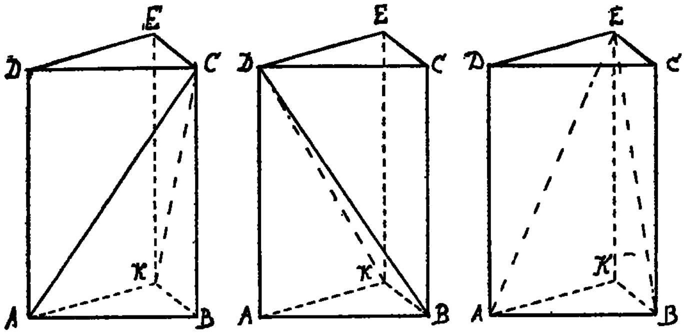
все зависитъ отъ того, какъ мала высота этой наибольшей призмы, или, что—то же, отъ того, на сколько слоевъ мы разрѣзали данную пирамиду.



Къ № 1076 (прим.)

противолежащихъ, а вторая должна имѣть вершину въ вершинѣ той же треугольной пирамиды, основанiемъ же должна служить противолежащая этой вершинѣ грань призмы

Разбираться въ такихъ чертежахъ ученики должны безукоризненно. При этомъ они должны чертить не только ребра пирамидъ, но говорить о плоскостяхъ, которыя они пролагаютъ въ этихъ случаяхъ. Вершину пирамиды, при обозначенiи пирамиды буквами, они должны называть ранѣе вершинъ основанiя Очень полезно вначалѣ каждую пирамиду обозначать такъ,

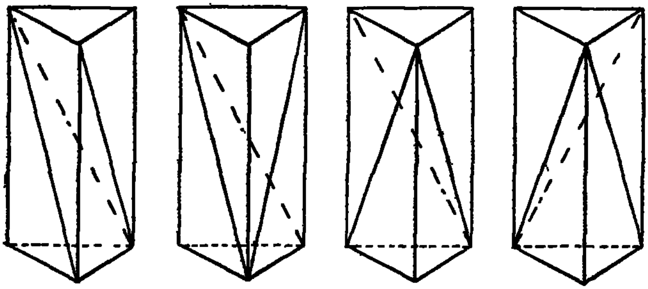


Къ № 1079.

чтобы вершина ея была названа ранѣе другихъ, затѣмъ названо основанiе и, наконецъ, снова вершина пирамиды это весьма облегчаетъ фиксированiе вниманiя на занимающей насъ въ данный моментъ пирамидѣ Увидѣть пирамиду *SABCS* или *SABCDES* легче, чѣмъ пирамиду *SABC* и *SABCDE*. Чтобы увидѣть пирамиду въ этой сложной фигурѣ, глазъ долженъ вернуться къ вершинѣ пирамиды, нужно, такъ сказать, «ощупать» ее своими глазами. — Необходимо прiобрѣсти навыкъ въ отысканiи основанiя пирамиды и безъ затрудненiя усматривать, когда основанiе видно и когда оно невидимо. — Только изготовленiе соотвѣтствующихъ пособiй (тѣлесныхъ и скелетовъ) и рисованiе ихъ съ натуры приведетъ къ цѣли быстро и вѣрно.

и онѣ равновелики —У пирамиды $SBEDS$ и $SBCDS$ основаніями служатъ два равныхъ тр—ка, общая ихъ вершина находится въ точкѣ S, и эти пирамиды тоже равновелики Стало-быть, всѣ три пирамиды равновелики

Для того, чтобы ученики научились въ каждой пирамидѣ брать ту вершину и то основаніе, которыя нужны въ данномъ случаѣ, необходимы упражненія Въ противномъ случаѣ, невозможна быстрая оріенти-



Къ №№ 1085 и 1089

ровка ихъ въ томъ, что въ одной и той же пирамидѣ за вершину принимается то точка B (когда намъ нужны равныя основанія ABC и SED), то точка S (когда намъ нужны равныя основанія BED и BCD). Поэтому, многочисленныя упражненія нужно провести при чертежахъ, рисункахъ и пособіяхъ См № 1085.

1093. Во сколько разъ *объемъ* прямой призмы больше *объема* треугольной пирамиды, имѣющей то же основаніе и ту же высоту? (Въ три раза) —Начертить прямую треугольную призму и написать формулу ея объема.—Эта формула гласитъ, въ отвлеченныхъ числахъ

$$\underset{\text{призмы}}{V}=q\,.\,H,$$

гдѣ буква q обозначаетъ число квадратныхъ ед мѣры, содержащееся въ площади основанія, а буква H—число одноименныхъ *линейныхъ* единицъ мѣры, содержащееся въ высотѣ —Какую часть объема прямой призмы составляетъ объемъ такой треугольной пирамиды, которая имѣетъ съ данной *прямой* призмой одно и то же основанiе и одну и ту же высоту? — Объемъ этой пирамиды въ 3 раза меньше объема этой призмы —Чему равенъ объемъ этой пирамиды? — Въ отвлеченныхъ числахъ

$$V_{\text{пир}} = \frac{q\ H}{3} \quad \text{или} \quad V_{\text{пир}} = q\ \frac{H}{3}$$

Хотя ученики, изучающiе этотъ вопросъ, находятся уже на довольно высокой ступени развитiя, но не мѣшаетъ обращаться и къ вопросу о наименованiяхъ, господствующихъ въ ученiи объ объемахъ Такъ, ученики должны, при первой въ томъ надобности, писать:

$$\text{объемъ пирамиды} = q \text{ куб ед} \times \frac{H}{3}$$

$$\text{или} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad = \frac{q \text{ куб ед} \times H}{3} \quad \text{и т п}$$

Въ этомъ случаѣ писать въ лѣвую часть формулы обозначенiе $V_{\text{пир}}$ не вполнѣ цѣлесообразно, потому что буквами слѣдуетъ обозначать отвлеченныя числа. Буква же V обозначаетъ какъ-разъ *отвлеченное* число кубическихъ единицъ, содержащееся въ объемѣ даннаго тѣла, а вторая часть выражена въ видѣ именованнаго числа Это безъ оговорокъ недопустимо.

1097. Начертить *наклонную* треугольную призму и раздѣлить ее на двѣ пирамиды одну треугольную съ тѣмъ же основанiемъ и тою же высотою, и другую четыреугольную, въ которой вершина совпадаетъ съ вершиной этой треугольной пирамиды, а основанiемъ служатъ грань призмы, противолежащая этой вершинѣ (Ср № 1079 и примѣчанiе).

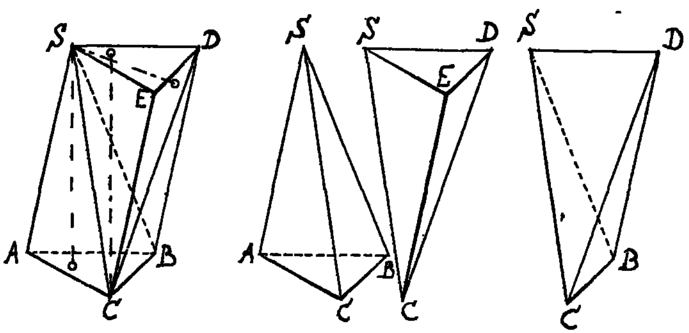
1101. Начертить наклонную треугольную призму и сначала раздѣлить ее на двѣ пирамиды одну треугольную, а другую — четыреугольную, а потомъ разобраться въ томъ, какія прямыя служатъ высотами этихъ двухъ пирамидъ

Отъ такой мелочи, какъ ясное или не ясное пониманіе того, какая прямая служитъ высотой для данной пирамиды, часто зависитъ, какъ показываетъ опытъ, успѣшность или неуспѣшность работы учениковъ на этой ступени. Поэтому и въ предыдущихъ нумерахъ надо касаться этого вопроса Важенъ чертежъ этого нумера

1103. Начертить наклонную треугольную призму, раздѣлить ее сначала на двѣ пирамиды. одну треугольную, а другую—четыреугольную, затѣмъ эту послѣднюю—на двѣ треугольныя, и разобраться въ томъ, почему всѣ эти три пирамиды равновелики

1107. Начертить треугольную пирамиду, въ которой боковое ребро не перпендикулярно къ плоскости ея основанія, и разобраться въ томъ, что объемъ ея равенъ площади основанія, помноженной на треть высоты пирамиды

1111. Начертить многоугольную пирамиду и раздѣлить ее «діагональными» плоскостями на треугольныя — Какія плоскости называются въ этомъ случаѣ діагональными? (Тѣ, которыя не совпадаютъ съ боковыми гранями и проходятъ черезъ вершину пирамиды и черезъ двѣ вершины основанія) —



Къ № 1107

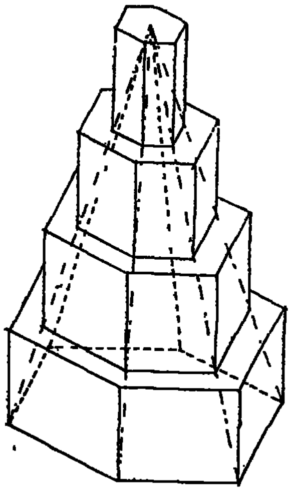
Чему равенъ объемъ каждой изъ этихъ треугольныхъ пирамидъ?—Чему—объемъ пирамиды $SABES$, чему—объемъ пирамиды $SBCES$, и чему — объемъ пирамиды $SCEDS$?— *Сложить эти три объема*, взять общаго множителя «за скобку» и доказать, что объемъ пир $SABCDES$ равенъ q куб ед, помноженнымъ на одну треть числа H, гдѣ буква q обозначаетъ число квадратныхъ единицъ мѣры, содержащееся въ площади основанія $ABCDE$, а буква H—число одноименныхъ линейныхъ единицъ, содержащееся въ высотѣ пирамиды. — Въ отвлеченныхъ числахъ эта формула гласитъ.

$$V = q \cdot {}^1/_3 H$$

Если выраженіе «взять множителя $^1/_3H$ за скобку» для учениковъ почему-либо неудобно, то можно указать другой способъ выраженія вмѣсто того, чтобы умножить площадь тр—ка ABE на $^1/_3H$, площадь тр—ка BCE — тоже на $^1/_3H$, и площадь тр—ка CED — опять на $^1/_3H$, и полученныя числа сложить, можно сначала всѣ *площади* эти сложить и полученную *сумму* помножить на $^1/_3H$ Да и въ случаѣ, если учащіеся владѣютъ вынесеніемъ общаго множителя за скобку, не мѣшаетъ обращаться къ подобному освѣщенію вопроса —Дѣло, вѣдь, не въ томъ, чтобы обученіе математикѣ свелось по возможности скорѣе къ быстрому перебрасыванію буквъ и знаковъ дѣйствій съ одного мѣста на другое, а въ томъ, чтобы эта «игра» въ буквы и знаки имѣла въ глазахъ учениковъ истинную цѣну, чтобы она имѣла для нихъ *реальный* смыслъ, и явилась бы *результатомъ* обученія, а не его средствомъ —Опытъ показываетъ, что учащіеся часто смѣшиваютъ апоѳему правильной пирамиды съ ея высотой, если дѣло ведется методомъ «мѣловой» геометріи —Создать такія условія, при которыхъ подобныя ошибки были бы невозможны, возможно только съ помощью наглядныхъ пособій, цвѣтныхъ мѣлковъ, лабораторныхъ упражненій Полезно сблизить правильный многоугольникъ съ правильной пирамидой, въ которой основаніе равно многоугольнику, а высота равна

1123. Начертить треугольникъ и разрѣзать его прямою линіею на двѣ части такъ, чтобы изъ этихъ частей можно было составить равновеликій съ треугольникомъ параллелограммъ —Для этого прежде всего надо провести «среднюю линію» треугольника, т -е соединить прямою линіей средины двухъ сторонъ треугольника —Начертить треугольную пирамиду и провести въ ней плоскость параллельно ея основанію на такомъ разстояніи отъ этого основанія, чтобы оно равнялось половинѣ высоты пирамиды — Изъ полученныхъ двухъ частей пирамиды *невозможно* составить призму, равновеликую съ пирамидою —Построить треугольную призму, которой основаніе равно основанію начерченной ранѣе пирамиды, а высота равна одной трети высоты ея, и отдать себѣ отчетъ въ томъ, почему объемъ этой призмы равенъ объему нашей пирамиды

Если даны двѣ равновеликія *плоскія прямолинейныя фигуры*, то каждую изъ нихъ можно, какъ извѣстно, разложить на такія части, изъ которыхъ состоитъ вторая Говоря иначе. каждую изъ двухъ плоскихъ равновеликихъ прямолинейныхъ фигуръ можно разложить на такія части, чтобы части одной были порознь *совмѣстимы* съ частями другой Относительно двухъ пирамидъ съ равновеликими основаніями и равными высотами аналогичное не справедливо Невозможно найти способы такого раздѣленія пирамиды на части, при которомъ оказалось бы, что части одной пирамиды порознь равны, т -е *совмѣстимы*, съ соотвѣтствующими частями всякой другой, съ нею равновеликой, пирамиды Вотъ чѣмъ объясняется то обстоятельство, что, не пользуясь способомъ предѣловъ, невозможно показать, что объемы несовмѣстимыхъ пирамидъ могутъ быть равны. — Крайне полезно обратить вниманіе учениковъ на этотъ вопросъ Имъ тогда станетъ ясно, почему при изученіи вопроса объ объемѣ пирамиды приходится прибѣгать къ особенному пріему изслѣдованія, въ то время какъ для плоскихъ прямолинейныхъ фигуръ этотъ пріемъ не нук выполненіе чертежей, требуемыхъ этимъ нумеромъ, идетъ очень быстро. они каждое верхнее основаніе дѣлятъ съ помощью линейки, но не проводя прямыхъ линій, приличнымъ образомъ на треугольники, и результаты получаются прекрасные


Къ № 1133

1133. Начертить какую-нибудь *правильную* многоугольную пирамиду, раздѣлить ее на «слои» и дополнить эти слои такими многогранниками, чтобы въ результатѣ получились *прямыя* призмы

Въ этомъ случаѣ верхнія основанія пирамиды можно дѣлить на треугольники, проведя (мысленно) изъ *центра* каждаго основанія радіусы послѣдняго.

1137. Что больше. объемъ многоугольной пирамиды или объемъ системы описанныхъ около нея призмъ? (Послѣдній) —Если изъ объема системы описанныхъ призмъ вычесть объемъ пирамиды, то получится объемъ «добавочныхъ» многогранниковъ. — Равенъ ли объемъ добавочныхъ многогранниковъ объему наибольшей описанной призмы или нѣтъ? (Объемъ добавочныхъ призмъ *меньше* объема наибольшей описанной призмы). — Чѣмъ больше (счетомъ) описанныхъ призмъ, тѣмъ ближе объемъ пирамиды къ объему системы описанныхъ призмъ и тѣмъ менѣе первый отличается отъ второго Ср № 1069

1138. Начертить пирамиду съ системой вписанныхъ въ нее призмъ и разобраться въ томъ же вопросѣ о взаимномъ соотношеніи объема пирамиды и объема системы вписанныхъ призмъ

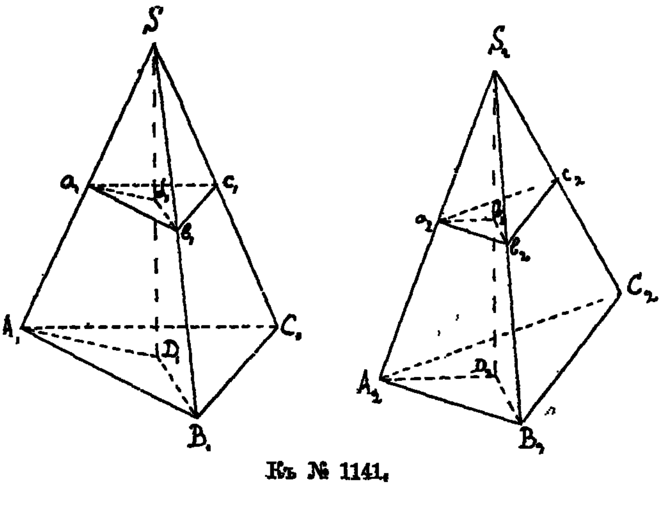
Изъ этихъ фигуръ,* путемъ послѣдовательной замѣны одного отношенія четырьмя другими, можно вывести, что

$$\text{пл } q_1 \ \text{пл } Q_1 = A_1^2 \ a_1^2$$
$$\text{пл. } q_2 \ \text{пл } Q_2 = A_2^2 \ a_2^2,$$
$$\text{но } A_1^2 \ a_1^2 = M_1^2 \ m_1^2 = H_1^2 \ h_1 \text{ и}$$
$$A_2^2 \ a_2^2 = M_2^2 \ m_2^2 = H_2^2 \ h_2^2$$
$$\text{то такъ какъ } H_1 = H_2 \text{ и } h_1 = h_2, \text{ то}$$
$$\text{пл } q_1 \ \text{пл. } Q_1 = \text{пл } q_2 \ \text{пл } Q_2.$$

При этомъ для краткости введены соотвѣтственныя обозначенія и для обѣихъ пирамидъ.

$$A_1B_1 = A_1; \ A_1D_1 = M_1, \ S_1D_1 = H_1$$
$$a_1b_1 = a_1, \ a_1d_1 = m_1, \ s_1d_1 = h_1 \text{ и т д}$$

А отсюда, въ виду того, что пл $Q_1 =$ пл Q_2, *логически* вытекаетъ, что пл $q_1 =$ пл q_2. — Этой логической постановкѣ вопроса въ основномъ курсѣ геометріи можно предпочесть интуитивную постановку вопроса Но если бы учащій нашелъ, что чисто логическая постановка вопроса для учениковъ доступна раньше, то онъ, конечно, и самъ, въ свое время, внесетъ относящееся къ этому вопросу въ № 1141.



Къ № 1141.

1145. Начертить двѣ равновеликія пирамиды съ одинаковыми высотами: одну — треугольную, а другую — четыреугольную.—Каковы должны быть ихъ основанія или, иначе говоря, какому условію они должны удовлетворять? (Ихъ основанія должны быть равновелики)

1147. Начертить треугольную пирамиду и равновеликій съ нею прямой конусъ съ такой же высотою — Каковы должны быть ихъ основанія или, иначе говоря, какому условію должны удовлетворять ихъ основанія? (Основанія должны быть равновелики) — Возможно ли это?

От учителя зависитъ рѣшить вопросъ о томъ, предлагать ли учащимся эту задачу на наглядномъ пособіи, потребовать ли отъ нихъ, чтобы они *вычислили* длину радіуса основанія искомаго прямого конуса и выполнили всѣ соотвѣтствующіе чертежи, или же предъявлять только нѣкоторыя изъ этихъ требованій — Вычисленіе длины радіуса предполагаетъ умѣніе извлекать квадратные корни изъ чиселъ, а точное выполненіе чертежа—умѣніе строить параллельную проекцію круга, котораго прямоугольная проекція на горизонтальную плоскость равна данному кругу. — Въ случаѣ трудности выполненія этой параллельной проекціи можно удовлетвориться (какъ это дѣлалось и ранѣе) нарисованнымъ отъ руки эллипсомъ или приблизительнымъ изображеніемъ основанія прямого конуса въ видѣ двухъ взаимно-пересѣкающихся дугъ окружности болѣе или менѣе значительнаго радіуса (какъ эллипсы изображены на чертежѣ, относящемся къ № 810, стр. 297).—Извлеченію квадратныхъ корней изъ чиселъ можно научить попутно, если учащіеся его почему-либо еще не знаютъ

1149. Нарисовать прямой конусъ, треугольную пирамиду и пирамиду четыреугольную съ одинаковыми высотами и равновеликими основаніями, пересѣчь ихъ плоскостью, параллельною основаніямъ, на одинаковыхъ отъ оснований (или отъ вершинъ) разстояніяхъ —Отдать себѣ отчетъ

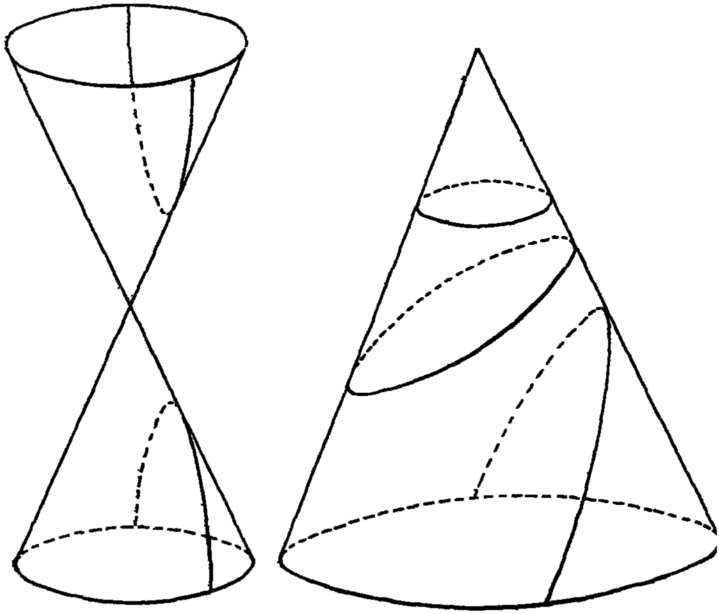
Прекраснымъ наглядпымъ пособіемъ для этой ступени, могли бы служить нарѣзанныя изъ тонкой доски (треугольныя и многоугольныя) призмы одинаковой высоты съ подобными основаніями, изъ которыхъ можно было бы составить систему описанныхъ около соотвѣтствующей пирамиды призмъ, и достаточное число тонкихъ «шашекъ» разной величины, изъ которыхъ можно было бы составить систему описанныхъ цилиндровъ конуса.—Благодаря нагляднымъ пособіямъ, учащіеся могутъ себѣ составить болѣе ясное представленіе о руководящей идеѣ и о методѣ интересующихъ насъ ученій, чѣмъ изъ діалектическаго только доказательства «отъ противнаго», на которомъ это ученіе обыкновенно основывается въ систематическихъ курсахъ геометріи —Въ случаѣ отсутствія упомянутыхъ наглядныхъ пособій ихъ можно изготовить изъ картона, и еще лучше къ ихъ изготовленію привлечь учащихся Такая работа учениковъ и даже только болѣе или менѣе серьезная попытка къ изготовленію подобныхъ моделей даетъ ученикамъ много поводовъ проникнуть въ самое существо вопроса и должнымъ образомъ постигнуть это существо воображеніемъ

1151. Представьте себѣ какую-нибудь плоскую кривую линію и прямую линію, имѣющую съ кривою одну общую точку, но лежащую внѣ плоскости кривой, представьте себѣ далѣе, что прямая перемѣщается въ пространствѣ параллельно самой себѣ, но такъ, что одна ея точка совпадаетъ съ нѣкоторою точкой кривой —При этомъ образуется поверхность, которая называется *цилиндрическою въ болѣе общемъ смыслѣ* этого слова —Представьте себѣ плоскую кривую и нѣкоторую прямую, лежащую внѣ плоскости кривой, но имѣющую съ нею общую точку —Представьте себѣ, что прямая проходитъ черезъ нѣкоторую неподвижную точку въ пространствѣ и перемѣщается такъ, что у прямой и кривой всегда есть общая точка —Эта прямая опишетъ поверхность, которая называется *коническою въ болѣе общемъ смыслѣ* этого слова —Замкнуты ли данныя кривыя имю пересѣкающихся прямыхъ?—Если одну изъ прямыхъ принять за ось вращенія угла между ними, то другая прямая опишетъ поверхность коническую съ круговымъ сѣченіемъ, перпендикулярнымъ къ оси —Коническая поверхность такого рода, да и всякая коническая поверхность состоитъ изъ двухъ частей, имѣющихъ общую вершину — Какая поверхность можетъ называться коническою вообще?

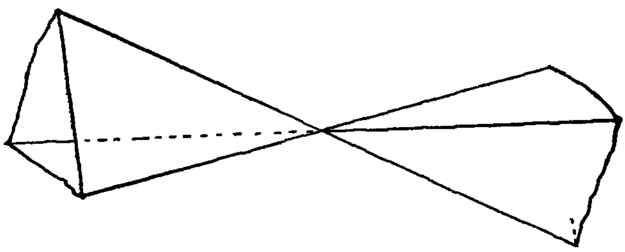
Наглядное пособіе — проволочная вращающаяся модель За неимѣніемъ ея—двѣ совмѣстимыя воронки изъ бумаги —На одной воронкѣ можно показать возможность трехъ «коническихъ сѣченій». круга, эллипса и параболы, изъ нихъ послѣдняя получается въ случаѣ, если плоскость сѣченія параллельна одной изъ образующихъ, а эллипсъ или кругъ, если она пересѣкаетъ всѣ образующія конуса —Ученикамъ иногда кажется невѣроятнымъ, что часть эллиптическаго сѣченія, болѣе близкая къ вершинѣ конуса, не «уже», чѣмъ часть сѣченія, болѣе удаленнаго отъ вершины. имъ иногда кажется, что сѣченіе въ этомъ случаѣ должно представлять собою яйцевидную кривую (съ одною осью симметріи). Только наглядное пособіе ихъ убѣждаетъ въ ошибкѣ воображенія, ежели таковая возникла При этомъ поучительно, что для учениковъ вполнѣ несомнѣнно образованіе эллипса при пересѣченіи обыкновенной цилиндрической поверхности плоскостью, наклоненной къ оси, но иногда сомнительно образованіе эллипса при аналогичномъ пересѣченіи обыкновенной конической поверхности —Что касается гиперболы, то это коническое сѣченіе возникаетъ въ воображеніи учащихся безъ труда Но при этомъ непремѣнно нужны обѣ «полы» конической поверхности, ибо, въ противномъ случаѣ, у учащихся возникаетъ невѣрная мысль о сходствѣ формы гиперболы съ формою параболы, и, стало-быть, невѣрная мысль о томъ, что гипербола и парабола—«почти» одно и то же.— При нѣкоторомъ желаніи учитель можетъ на этой ступени коснуться «полъ» трехграннаго и многограннаго угла, а также вопросовъ о томъ, что два «симметричныхъ» трехгранныхъ (или многогранныхъ) угла *вообще*

1152. Представьте себѣ *два* тѣла, изготовленныя изъ металла, дерева или глины и удовлетворяющія слѣдующимъ условіямъ. 1) у нихъ два плоскихъ «основанія», другъ другу параллельныя въ каждомъ изъ тѣлъ; 2) «высоты» этихъ тѣлъ равны между собою, т.-е разстоянія основанія каждаго тѣла отъ другого его основанія, одинаковы, 3) форма у обоихъ нижнихъ основаній различна, но площади ихъ между собою равны, 4) боковыя поверхности ихъ различны, 5) если сдѣлать разрѣзы у обоихъ тѣлъ, параллельные основаніямъ, и на одинаковомъ разстояніи отъ нижняго основанія, то площади этихъ двухъ разрѣзовъ равны между собою (это—*условіе*, которому удовлетворяютъ тѣла, а не выводъ); 6) пусть это справедливо относительно любыхъ параллельныхъ основанію разрѣзовъ, сдѣланныхъ на одинаковомъ разстояніи отъ нижняго основанія —Что можно утверждать относительно этихъ двухъ тѣлъ? — Можно ли утверждать, что оба тѣла распадаются на одинаковое число соотвѣтствующихъ равновеликихъ слоевъ и что самыя тѣла равновелики, т.-е что объемы ихъ равны между собою? — Почему? (Потому, что каждый, сколь угодно тонкій, слой тѣла можно разсматривать, какъ нѣкоторую прямую призму или какъ нѣкоторый прямой «цилиндръ» въ болѣе общемъ смыслѣ этого слова, и что «соотвѣтствующіе» призмы или цилиндры этихъ тѣлъ равновелики)

Этотъ нумеръ требуетъ глубокаго проникновенія въ существо дѣла и неусыпнаго вниманія къ его условіямъ. Необходимо при этомъ, чтобы учащіеся уразумѣли а) что это возможно, прежде всего, въ случаѣ, когда мы имѣемъ дѣло съ двумя пирамидами, съ прямымъ конусомъ и пирамидой, б) что это возможно съ коническими и цилиндрическими тѣлами въ болѣе общемъ смыслѣ этихъ послѣднихъ слоевъ, г) что это возможно и съ тѣлами другой формы не съ пирамидальною или конической поверхностью, и д) что всѣ условія, приведенныя въ № 1152, только достаточны для равновеликости двухъ тѣлъ, но вовсе для этого не необходимы, такъ какъ равновеликими могутъ быть тѣла какой угодно формы —Работа въ этомъ направлении, намѣченная значительно ранѣе, чѣмъ ученія



Къ № 1151а (прим)



Къ № 1151а (прим)

объ *опредѣленномъ интегралѣ*, *только подготовляетъ* учащихся къ основамъ теоріи предѣловъ и къ исчисленію безконечно-малыхъ, лежащихъ далеко за предѣлами основного курса геометріи — Надо убѣдиться въ томъ, понимаютъ ли ученики, что плоскій слой всякаго тѣла можно окружить цилиндрическою поверхностью и двумя плоскими фигурами, представляющими собою проекцію этого слоя на параллельную къ ихъ основаніямъ горизонтальную плоскость проекцій.

1153. Представьте себѣ *три* тѣла, удовлетворяющія слѣдующимъ условіямъ а) всѣ три тѣла—пирамиды одной высоты, б) площадь основанія первой изъ нихъ равна суммѣ площадей основаній остальныхъ двухъ —Спрашивается, какое соотношеніе существуетъ между площадями тѣхъ сѣченій всѣхъ этихъ трехъ тѣлъ, которыя проведены параллельно ихъ основаніямъ на одинаковомъ разстояніи отъ ихъ основаній? (Площадь перваго сѣченія равна суммѣ площадей остальныхъ двухъ сѣченій) —Какое соотношеніе существуетъ между объемомъ перваго тѣла и объемами остальныхъ двухъ? (Объемъ перваго изъ нихъ равенъ суммѣ объемовъ остальныхъ двухъ) —Почему?

1155. Разобраться, при тѣхъ же условіяхъ, въ такихъ же вопросахъ для случаевъ, когда а) всѣ три тѣла — прямые конусы; б) когда они—прямые цилиндры, в) когда одно изъ нихъ прямой конусъ, и остальныя—пирамиды и г) когда одно изъ нихъ — пирамида, а остальныя — прямые конусы.

***1155а.** Разобраться, при тѣхъ же условіяхъ, въ тѣхъ же вопросахъ для случаевъ, когда тѣла взяты въ родѣ тѣхъ, о которыхъ говорится въ примѣчаніи къ № 1152.

§ 18. Объемъ шара.

1160. Начертить три тѣла, изъ которыхъ одно происходитъ отъ вращенія даннаго квадрата вокругъ одной изъ своихъ сторонъ, другое — отъ вращенія равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника вокругъ одного изъ своихъ катетовъ, равнаго сторонѣ даннаго квадрата, а третье—отъ вращенія сектора круга, у котораго радіусъ равенъ сторонѣ даннаго квадрата, а уголъ сектора содержитъ 90⁰ —Первое тѣло будетъ прямымъ цилиндромъ, второе — прямымъ конусомъ, третье — полушаріемъ

1162. Представить себѣ тѣла, охарактеризованныя въ № 1160, и начертить ихъ такъ, чтобы они были заключены между двумя взаимно-параллельными плоскостями и чтобы въ одной лежали одно основаніе цилиндра, большой кругъ полушарія и вершина конуса, а въ другой — второе основаніе цилиндра, «полюсъ» полушарія и основаніе конуса — Провести какую-нибудь плоскость, параллельную двумъ плоскостямъ, между которыми заключены начерченныя тѣла, и пересѣкающую каждое изъ этихъ тѣлъ, и разобраться 1) въ томъ, какія фигуры получатся отъ пересѣченія этихъ тѣлъ третьей плоскостью, 2) въ томъ, какія прямыя будутъ радіусами этихъ круговъ, и 3) въ томъ, какъ велика площадь каждаго изъ этихъ сѣченій — Отвѣтъ

$$q_ц = \pi R^2, \; q_к = \pi r^2_к, \; q_{пшр.} = \pi r^2_{пшр},$$

гдѣ R обозначаетъ число единицъ длины въ радіусѣ цилиндра (въ радіусѣ основанія конуса и въ радіусѣ большого круга полушарія), $r_к$ — число единицъ длины въ радіусѣ *сѣченія* конуса, и $r_{пшр}$ —число единицъ длины въ радіусѣ *сѣченія* полушарія — Провести въ полушаріи гипотенузу треугольника, котораго катетами служатъ часть h «высоты» полушарія и радіусъ сѣченія полушарія — Получимъ, что

$$R^2 = r^2_{пшр} + h^2,$$

но $h = r_к$ — Почему? (Потому что h и $r_к$ —стороны *равнобедреннаго* треугольника, см конусъ) — Поэтому

$$R^2 = r^2_{пшр} + r^2_к$$

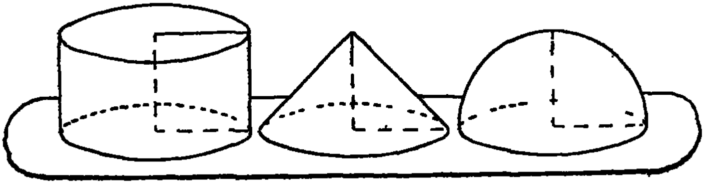
— Но въ такомъ случаѣ, каково соотношеніе площадей трехъ круговъ, у которыхъ радіусы порознь равны R, $r_{\text{шр}}$ и $r_{\text{к}}$?— Площадь сѣченія цилиндра равна суммѣ площадей сѣченія полушарія и сѣченія конуса, потому что, если

$$R^2 = r^2_{\text{шр}} + r^2_{\text{к}},$$

$$\text{то}\quad \pi R^2 = \pi r^2_{\text{шр}} + \pi r^2_{\text{к}}$$

— Справедливо ли это относительно *всякихъ* трехъ сѣченій, проведенныхъ параллельно основаніямъ на одинаковомъ разстояніи отъ основаній цилиндра и полушарія и отъ вершины конуса? (Справедливо) — Провѣрить справедливость этого соотношенія для нѣкоторыхъ другихъ сѣченій — Провѣрить то же соотношеніе относительно нижняго основанія цилиндра основанія полушарія и вершины конуса, съ одной стороны, а также относительно верхняго основанія цилиндра, полюса полушарія и основанія конуса

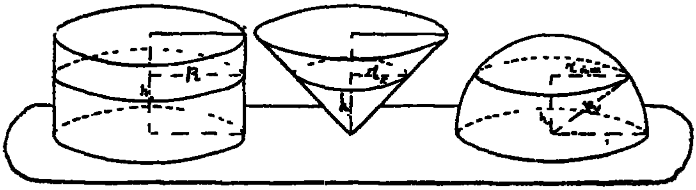
Это замѣчательное соотношеніе требуетъ не только многочисленныхъ упражненій, но также проникновенія въ самое существо вопроса Это значитъ, что ученики должны ясно сознать что въ этомъ случаѣ они имѣютъ дѣло съ дѣйствительнымъ и исключительнымъ свойствомъ взятыхъ тѣлъ, а не съ какимъ-то случайнымъ обстоятельствомъ, и тѣмъ болѣе—не съ такимъ свойствомъ, какія встрѣчаются часто, сплошь и рядомъ По этому не мѣшаетъ разсмотрѣть и такіе случаи, когда ничего подобнаго не наблюдается, напр , случай прямого цилиндра и двухъ прямыхъ конусовъ одинаковой высоты, взятыхъ такъ, что вершины обоихъ конусовъ лежатъ въ одной плоскости съ верхнимъ основаніемъ цилиндра Можно взять такіе конусы, чтобы сумма площадей ихъ основаній равнялась площади основанія цилиндра, но въ сѣченіяхъ, одинаково отстоящихъ отъ основанія этихъ тѣлъ, это равенство нарушится — Полезно взять такихъ два конуса, въ которыхъ площадь основанія въ одномъ вдвое болѣе площади основанія въ другомъ, а сумма площадей основаній обоихъ конусовъ равна площади оснований цилиндра, но соотвѣтствующія сѣченія тѣла уже не обладаютъ этимъ свойствомъ



Къ № 1160

1165. Начертить цилиндръ, конусъ и полушаріе, согласно условіямъ №№ 1160 и 1162, и разобраться въ томъ, какое существуетъ соотношеніе между *объемами* этихъ трехъ тѣлъ — Ср № 1152

1167. Обозначить объемъ того прямого цилиндра, въ которомъ радіусъ основанія равенъ высотѣ его, совокупностью буквъ $V_{цил}$, объемъ прямого конуса, въ которомъ такое же основаніе и высота, какъ у этого цилиндра, совокупностью буквъ $V_{кон}$, а объемъ полушарія, радіусъ кото-



Къ № 1162

раго равенъ радіусу основанія одного изъ первыхъ двухъ тѣлъ вращенія, совокупностью буквъ $V_{пшр}$, длину же радіусовъ оснований цилиндра, конуса и полушарія буквою R Составить «уравненіе», выражающее, чему равенъ объемъ цилиндра въ зависимости отъ объемовъ остальныхъ двухъ тѣлъ —Уравненіе это гласитъ $V_ц = V_к + V_{шр}$ —Замѣтьте *объемъ прямого цилиндра, въ которомъ радіусъ основанія равенъ высотѣ цилиндра, равняется суммѣ двухъ объемовъ прямого конуса, съ такимъ же основаніемъ и такою же высотою, и такого полушарія, радіусъ котораго равенъ радіусу основанія того же цилиндра (или конуса)*

1167а. Знаемъ ли мы формулу для $V_ц$? (Знаемъ) —Знаемъ ли мы формулу для $V_к$? (Знаемъ) —Знаемъ ли мы формулу для объема полушарія? (Не знаемъ) —Чему равно $V_ц$?

$$\text{Отв} \quad V_ц = \pi R^2 H,$$

гдѣ R—длина радіуса основанія, а H — длина высоты въ тѣхъ же линейныхъ единицахъ —Чему равно $V_к$?

$$\text{Отв} \quad V_к = \pi R^2 \frac{H}{3}$$

Подставить въ наше уравненіе эти величины и затѣмъ принять во вниманіе, что, по условію, для нашихъ тѣлъ вращенія $H = R$ — Получимъ сначала

$$\pi R^2 H = \pi R^2 \frac{H}{3} + V_{шр},$$

а затѣмъ, такъ какъ $H = R$, получимъ

$$\pi R^2 R = \pi R^2 \frac{R}{3} + V_{шр}$$

$$\text{т-е} \quad \pi R^3 = \frac{\pi R^3}{3} + V_{шр}$$

Отсюда одно слагаемое, $V_{шр}$, равна суммѣ обоихъ слагаемыхъ, уменьшенной на первое слагаемое, или

$$V_{шр} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3}, \text{ т-е } V_{шр} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

—Чему, въ такомъ случаѣ, равенъ объемъ всего шара?—Отвѣтъ.

1171. Раздѣлите шаръ пополамъ экваторіальнымъ кругомъ и удалите одно изъ его полушарій —Оставшееся полушаріе раздѣлите полукругомъ, проходящимъ черезъ его полюсъ, пополамъ и четверть шара удалите.—Проведите четверть новаго меридіональнаго круга и одну изъ восьмыхъ долей шара удалите —Съ оставшеюся долей полушарія поступите точно такъ же и продолжайте такъ поступать до тѣхъ поръ, пока это на рисункѣ возможно —Оставшуюся долю полушарія разрѣжьте на двѣ части такою плоскостью, которая проходитъ черезъ центръ шара и дѣлитъ пополамъ прямые углы секторовъ двухъ круговъ, ограничивающихъ эту долю. —Раздѣлите получившіяся двѣ части, оставшіяся доли полушарія, двумя такими плоскостями, которыя раздѣляютъ углы въ 45°, получившіеся отъ послѣдняго дѣленія, пополамъ, и продолжайте такъ поступать, пока это возможно на чертежѣ —На какія части можно раздѣлить весь шаръ, если такъ поступить со всѣми долями шара, полученными отъ раздѣленія шара на части меридіональными плоскостями?—Шаръ можно такимъ образомъ раздѣлить на тѣла особенной формы у полюсовъ получатся тѣла, ограниченныя тремя плоскими гранями и частью поверхности шара, имѣющею треугольную форму, остальныя тѣла будутъ ограничены четырьмя плоскими гранями и частью поверхности шара, имѣющею четыреугольную форму —Будемъ называть каждое изъ этихъ тѣлъ, для краткости, «центральной пирамидою со сферическимъ основаніемъ» —Можно ли считать, что шаръ состоитъ сплошь изъ центральныхъ пирамидъ со сферическими основаніями? (Безъ всякаго сомнѣнія, можно) —Можно ли говорить, что шаръ состоитъ изъ *безчисленнаго множества* центральныхъ пирамидъ со сферическими основаніями (Конечно, можно) —Можно поступить и иначе раздѣлите шаръ экваторомъ пополамъ, черезъ полюсы проведите одну меридіональную плоскость затѣмъ раздѣлите шаръ возможно большимъ количествомъ многогранникахъ принадлежитъ къ числу вопросовъ, выходящихъ за предѣлы основного курса, тѣмъ не менѣе совершенно избѣгать его тоже нѣтъ основанiй — Вообще слѣдуетъ вопросу о составѣ шара изъ пирамидъ со сферическими основанiями дать надлежащее мѣсто въ курсѣ, независимо отъ того вывода формулы для шаровой поверхности, который данъ ниже —Недостаточно, если учащiеся, благодаря предыдущимъ занятiямъ, усвоили себѣ только тотъ взглядъ на шаръ, по которому шаръ представляетъ собою безчисленное множество параллельныхъ плоскости экватора слоевъ, изъ которыхъ каждый можно разсматривать, какъ нѣкоторый цилиндръ, и которые слѣдуютъ, считая отъ экватора къ полюсу, нѣкоторому закону уменьшенiя Для учащихся законъ этотъ понятенъ только благодаря непосредственному усмотрѣнiю, интуицiи, но не не ясенъ въ отношенiи закона уменьшенiя этихъ слоевъ.

1173. Знаемъ ли мы, чему равняется объемъ шара?— Мы знаемъ, что

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Знаемъ ли мы, чему равна *поверхность* шара?—Знаемъ, мы знаемъ, какiя дѣйствiя надо совершить надъ числомъ единицъ длины, содержащимися въ радiусѣ, для того, чтобы *вычислить* поверхность шара См § 12 —Повторить выводъ формулы для поверхности шара

1178. Вывести формулу поверхности шара можно и иначе представимъ себѣ, что шаръ разрѣзанъ на множество составляющихъ его центральныхъ пирамидъ со сферическими основанiями —Чѣмъ больше будетъ такихъ пирамидъ, тѣмъ ближе каждая къ нѣкоторому многограннику —Къ какому? (Къ обыкновенной пирамидѣ, треугольной или четыреугольной) —Чѣмъ больше такихъ центральныхъ пирамидъ,—если ихъ составлять такъ, какъ мы это дѣлали,—тѣмъ ближе основанiе каждой центральной пирамиды на одну треть его радіуса — Если длина R радіуса шара извѣстна, то объемъ шара

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

А потому?—А потому

$$S_{\text{шара}} \cdot \frac{R}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

— Отсюда получаемъ, что

$$S_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \; \frac{R}{3}$$

— Совершимъ это дѣленіе

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \; \frac{R}{3} = \frac{4\pi R^3 \; 3}{3 \; R} = 4\pi R^2$$

— А потому поверхность шара

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2.$$

— Что это значитъ?—Это значитъ, что если мы знаемъ длину R радіуса шара, если число единицъ этой длины помножимъ на то же самое число, а R^2 кв ед помножимъ на численное значеніе буквы π, затѣмъ вновь полученное произведеніе помножимъ на 4, то послѣднее произведеніе будетъ равно поверхности шара —Другой выводъ въ №810

Этотъ выводъ поверхности шара предполагаетъ, что, принявъ «элементъ» шаровой поверхности за плоскій многоугольникъ, и радіусъ шара за перпендикуляръ, опущенный изъ центра на элементъ поверхности, мы дѣлаемъ ошибку, стремящуюся къ нулю и не вліяющую на точность результата Ученикамъ должно выяснить, что они не умѣютъ доказывать своего права на это умозаключеніе *путемъ разсужденія,* но что доказательство это существуетъ Такое фактическое знаніе въ основномъ курсѣ столь же дозволительно, какъ знаніе того, напр , что планеты движутся не по кругамъ, а по кривымъ, которыя можно считать эллипсами, что время обращенія земли вокругъ солнца содержитъ ирраціональное число часовъ, что не всякіе лить прямую пополамъ или на нѣсколько одинаковыхъ частей — Раздѣлить уголъ пополамъ — Параллельныя прямыя — Задачи на построеніе треугольниковъ — Ср также § 8 — Какія вы знаете теоремы?

Одно перечисленіе важнѣйшихъ задачъ можетъ занять не одинъ урокъ и служить для цѣли, аналогичной съ цѣлью № 1201

1203. Какія вамъ извѣстны задачи, которыхъ *невозможно* разрѣшить съ помощью линейки и циркуля?

Задачи этого рода слѣдующія 1) квадратура круга, 2) распрямленіе (ректификація) окружности, 3) распрямленіе (компланація) поверхностей прямого цилиндра, прямого конуса и шара, 4) построеніе куба, котораго объемъ равенъ объему прямого цилиндра, прямого конуса и шара (ихъ кубатура), 5) раздѣленіе всякаго угла на три равныя части (трисекція угла), 6) раздѣленіе всякаго угла на произвольное число одинаковыхъ частей, 7) построеніе правильнаго многоугольника съ произвольнымъ числомъ сторонъ, 8) построеніе стороны куба, объемъ котораго вдвое больше объема даннаго куба (такъ называемое удвоеніе куба или «Делійская задача»), 9) построеніе стороны куба, объемъ котораго равенъ такому числу куб единицъ, которое не представляетъ собою куба раціональнаго числа — Первыя 4 задачи принадлежатъ къ задачамъ одного рода, рѣшеніе которыхъ стоитъ въ связи съ квадратурой круга Задачи 8-я и 9-я требуютъ построенія $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{2}$ и др куб корней Задачи 5-я и 6-я, а равно 7-я, допускаютъ рѣшеніе для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, которые надо разобрать по мѣрѣ возможности — Останавливаться особенно подробно на томъ, что, сверхъ извѣстныхъ ученикамъ, есть безчисленное множество правильныхъ многоугольниковъ (Гауссовыхъ), которые можно построить съ помощью линейки и циркуля, не представляется необходимымъ

Конецъ.

ИЗЪ ОТЗЫВОВЪ О НѢКОТОРЫХЪ КНИГАХЪ И ПОСОБІЯХЪ

С. И. ШОХОРЪ-ТРОЦКАГО.

(см 4-ую страницу обложки)

Новый «Учебникъ геометріи», составленный г Шохоръ-Троцкимъ *), выгодно отличается отъ тѣхъ учебниковъ, въ которыхъ не обращается особеннаго вниманія на рѣзкое выдѣленіе допущеній и аксіомъ, напротивъ, его можно скорѣе упрекнуть въ нѣкоторомъ избыткѣ допущеній Изложеніе отличается ясностью и простотою Особенное вниманіе было обращено на разъясненіе понятій о предѣлѣ и о безконечно - большихъ величинахъ (Изъ отзыва проф Казанскаго университета А В Васильева, въ № 2 т-ма перваго «Извѣстій Физико-математическаго Общества при Императорскомъ Казанскомъ университетѣ» 1891 г)

Названная книга «Цѣль и средства преподаванія математики съ точки зрѣнія требованій общаго образованія» заслуживаетъ полнаго вниманія, какъ по важности вопросовъ, обсужденіе которыхъ составляетъ ея содержаніе, такъ и по воззрѣніямъ автора Замѣчанія г Шохоръ-Троцкаго съ включеніемъ даже тѣхъ, съ которыми нельзя согласиться, свидѣтельствуютъ о его педагогической опытности и вѣрномъ пониманіи общеобразовательнаго значенія, такъ сказать, почти каждой главы, почти каждаго отдѣла математики Авторъ нерѣдко впадаетъ въ докторальный тонъ, прибѣгаетъ къ преувеличеніямъ, но всѣ недостатки книги искупаются ея достоинствами, заставляющими желать, чтобы педагоги, и въ особенности учителя математики обратили на нее должное вниманіе (Изъ статьи А Д Путяты о книгѣ «Цѣль и средства преподаванія математики» въ № 5 «Журнала М Нар Пр» за 1894 годъ)

Составленные же г Шохоръ-Троцкимъ два задачника «Задачникъ для учителей, вып I», и «Задачникъ для учениковъ, вып I» представляютъ собою не только попытку въ указанномъ смыслѣ, но въ дѣйствительности эти задачники настолько облегчаютъ трудъ сельскаго учителя, что всякій, занимающійся въ начальной, съ нѣсколькими группами, школѣ, можетъ порадоваться появленію этихъ задачниковъ Мы желали бы самаго широкаго распространенія въ школахъ задачниковъ т Шохоръ-Троцкаго, такъ и вообще его методы цѣлесообразныхъ задачъ («Русская Школа» за 1899 г, № 7 и 8)

Вообще необходимо замѣтить, что 2-ая часть «Методики ариѳметики» составлена г Шохоръ-Троцкимъ самымъ тщательнымъ образомъ Во всемъ нельзя не видѣть большой педагогической опытности автора,

---

*) Книга распродана.

любви къ предмету и добросовѣстности Нельзя не выразить полнаго сочувствія автору за изданіе имъ двухъ отдѣльныхъ задачниковъ, одного — для учителей, другого — для учениковъ 2-ая часть «Методики ариѳметики» положительно должна служить настольной книгой не только каждаго начинающаго преподавателя средняго учебнаго заведенія, но и вообще всякаго преподавателя математики въ среднемъ учебномъ заведеніи («Русская Школа», №№ 10—11 за 1900 г)

Шохоръ-Троцкій издалъ такъ много книгъ по ариѳметикѣ, что, помнится, какому-то рецензенту это даже не понравилось Но и новая книжка г Шохоръ-Троцкаго «Наглядность и наглядныя пособія при обученіи ариѳметикѣ», не только не лишняя, но и весьма своевременна Выдвинуть вопросъ о наглядности преподаванія, систематически и методически обозрѣть наглядныя пособія по обученію ариѳметикѣ — мысль крайне удачная и важная и, кажется, впервые увидѣвшая свое осуществленіе въ русской педагогической литературѣ по элементарной математикѣ Авторъ воодушевленъ самымъ возвышеннымъ стремленіемъ преподавателя-воспитателя и идетъ навстрѣчу лучшимъ чаяніямъ современной школы Подобные оживленные способы класснаго занятія (рѣчь идетъ о нумераціи въ «лицахъ», при изученіи нумераціи трехзначныхъ чиселъ), широкое вовлеченіе самого ученика въ процессъ преподаванія, вытекающая отсюда занимательность и легкость ученія для дѣтей — качества, которыми такъ выдается американская начальная школа — строго психологичны, крайне важны и настоятельно необходимы для школы («Народное Образованіе», № 7 — 8, іюнь и августъ 1904 г)

Трудно понять, съ какою цѣлью составитель передѣлываетъ нѣсколько параграфовъ изъ методики въ отдѣльную брошюру «Наглядность и наглядныя пособія при обученіи ариѳметикѣ» Не для рекомендаціи же новой «Наглядной таблицы нѣкоторыхъ мѣръ протяженія, сост Шохоръ-Троцкимъ» (ц 60 коп) и счетовъ С И Шохоръ-Троцкаго (стр 27, 28, 60, 65, 89, 90, 93, 105, 116, 118), особенность которыхъ Ново въ нашей педагогической практикѣ и слѣдующее поучительное, но наглядное упражненіе (слѣдуетъ выписка изъ брошюры, посвященная нумераціи «въ лицахъ», при изученіи нумераціи трехзначныхъ чиселъ) Намъ кажется, что такъ издѣваться надъ дѣтьми — совсѣмъ не въ духѣ русскаго характера («Журналъ М Н П», ноябрь 1904 г)

Въ этой небольшой сравнительно книжечкѣ (Наглядность и наглядныя пособія при обученіи ариѳметикѣ), главнымъ образомъ, трактуются наглядныя пособія и случаи ихъ употребленія при обученіи ариѳметикѣ Эта книжечка — безусловно цѣнный вкладъ въ нашу педагогическую литературу Кстати, укажемъ на оригинальныя наглядныя пособія автора разбираемой книги «Наглядную таблицу соотношеній нѣкоторыхъ мѣръ протяженія», «Таблицу для классныхъ упражненій въ изустныхъ вычисленіяхъ» и школьные счеты Шохоръ-Троцкаго (№№ 10 — 11 «Русской Школы» за 1904 г)

родскихъ училищахъ, иллюстрируя живыми, ясными примѣрами сухой матеріалъ учебника Мы желаемъ поэтому указаннымъ книгамъ г Шохоръ-Троцкаго самаго широкаго распространенія («Оренбургскія Педагогическія записки», ноябрь — декабрь 1909 г)

Я не могу не повторить еще разъ свое мнѣніе о полной непригодности подобнаго руководства (Геометрія на задачахъ, книга для учащихся) для учебныхъ цѣлей, читать его можно только по принужденію («Ж М Нар Просв», мартъ 1910 г, отзывъ г В Соллертинскаго)

Это руководство (Геометрія на задачахъ, кн для учителей) въ связи съ «Книгой для учащихся» подъ тѣмъ же названіемъ содержитъ полный курсъ геометріи, приспособленный къ преподаванію на началахъ наглядности и самодѣятельности учащихся Въ началѣ книги помѣщена обстоятельная статья съ изложеніемъ основъ конкретно-индуктивнаго метода преподаванія геометріи, помѣщенныя во многихъ мѣстахъ книги методическія примѣчанія также очень цѣнны («Пед календарь-справочникъ» за 1911—12 г)

Эта книга (Геометрія на задачахъ, кн для учащихся) содержитъ систематическое собраніе задачъ и другихъ упражненій по курсу геометріи Систематизація задачъ весьма послѣдовательна и даже чрезмѣрно велика для цѣлей школьной практики («Пед календарь-справочникъ» на 1911—12 годъ)

Книга С И Шохоръ-Троцкаго (Методика ариѳметики) является цѣлой сокровищницей цѣнныхъ мыслей и практическихъ указаній, добытыхъ многочисленнымъ опытомъ и глубокимъ знаніемъ предмета Размѣры настоящей статьи не позволяютъ намъ остановиться на II части методики Скажемъ только, что она содержитъ подробную методику систематическаго курса ариѳметики и написана съ такимъ же талантомъ и знаніемъ предмета, какъ и первая часть («Вопросы и нужды учительства», вып VI)

Сочиненія Шохоръ-Троцкаго представляютъ цѣлую энциклопедію по вопросамъ преподаванія ариѳметики Система автора обоснована на методѣ «цѣлесообразныхъ задачъ» (иначе говоря, конкретно-индуктивномъ) и разработана чрезвычайно подробно и тщательно («Педагогическій календарь-справочникъ» на 1911—12 г)
