Н. Н. НИКИТИН

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 6—8 классов

ИЗДАНИЕ 14-е

Утверждён
Министерством просвещения РСФСР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
МОСКВА 1969

В подготовке шестого издания учебника и приведении его в соответствие с новой программой для восьмилетней школы принимал участие заслуженный учитель школы РСФСР *К. С. Богушевский.*

ГЛАВА I.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

§ 1. ЧТО ТАКОЕ ГЕОМЕТРИЯ.

Мы приступаем к изучению нового учебного предмета. Называется этот учебный предмет г е о м е т р и я. Слово это греческое. В переводе на русский язык оно означает з е м л е м е р и е.

Геометрия возникла ещё в глубокой древности, когда людям пришлось заниматься измерением расстояний, вычислять площади земельных участков разнообразной формы и различных размеров, составлять планы земельных участков, определять по плану их настоящие размеры, вычислять вместимость различных сооружений, сосудов.

Несколько тысяч лет назад в древнем Египте были выработаны правила, которыми пользовались люди при вычислении различных расстояний, площадей и объёмов.

Ежегодные разливы реки Нил надолго затопляли плодородную долину реки и смывали следы границ между земельными участками. После разлива египтяне должны были находить свои земельные участки и снова восстанавливать их границы. Всё это было связано со сложными измерительными, чертёжными и вычислительными работами.

Египтяне вели оживлённую торговлю с греками. Греки позаимствовали знания у египтян, дополнили, уточнили их, постепенно развили и привели в систему. Особенно много в деле развития геометрии сделал греческий ученый-математик Евклид, живший две тысячи двести лет назад. Разработанную им науку он изложил в тринадцати книгах, которые назвал «Начала».

«Начала» Евклида содержали сведения не только по геометрии, но и по арифметике. По образцу евклидовых «Начал» составляются школьные учебники и по настоящее время. В некоторых странах долгое время школьники изучали геометрию по переводу «Начал» Евклида.

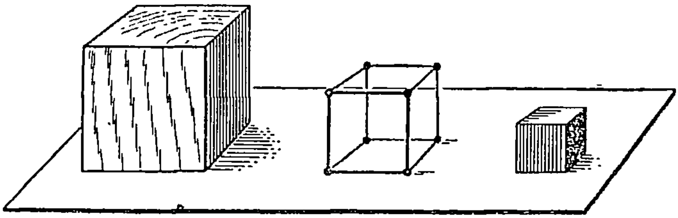
В настоящее время содержание геометрии значительно разнообразнее и сложнее. На уроках геометрии мы более подробно ознакомимся с тем, какими вопросами она занимается и что составляет её содержание.

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЛО. ПОВЕРХНОСТЬ. ЛИНИЯ. ТОЧКА.

Окружающие нас предметы мы можем изучать по-разному. Например, о школьном здании можно сказать, что оно кирпичное (или деревянное), тёмно-красное (или другого цвета); ствол берёзы белый; листья на деревьях зелёные (или жёлтые). О чернильнице можем сказать, что она сделана из пластмассы, что она чёрная. Классная комната светлая, тёплая. Яблоко румяное, сочное, вкусное.

Однако на занятиях по геометрии в окружающих предметах нас не интересуют ни материал, из которого они сделаны, ни цвет, ни то состояние, в каком они находятся (твёрдое, жидкое); всем этим занимаются на уроках естествознания, физики, химии.

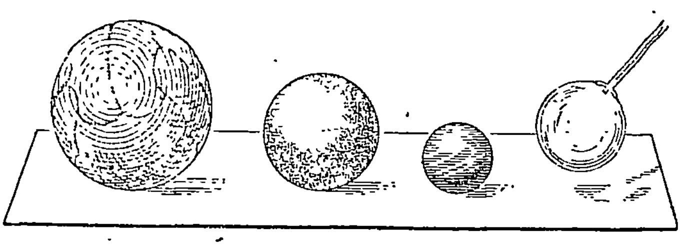
При изучении геометрии нас будут интересовать ф о р м а и р а з м е р ы предметов. Например, и деревянный, и картонный, и проволочный куб носит одно и то же название — куб (черт. 1).



Черт. 1

Эти предметы сделаны из различного материала, но имеют одну и ту же форму, отличаются только своими размерами.

Точно так же футбольный мяч, деревянный шар, резиновый мяч, мыльный пузырь имеют одну и ту же форму — форму шара (черт. 2).

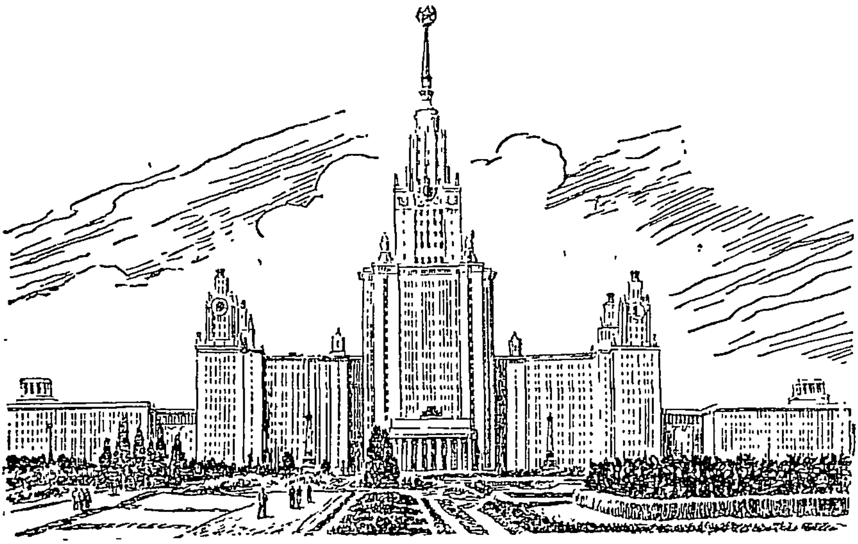


Черт. 2

Если не обращать внимания на физические свойства предмета (материал, из которого он сделан, цвет и т. д.), а рассматривать только форму предмета и его размеры, то этому предмету можно дать название г е о м е т р и ч е с к о г о т е л а.

На чертеже 3 дано изображение здания Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Рассматривая его с геометрической точки зрения, мы обращаем внимание на его размеры, взаимное расположение отдельных частей, их форму.



Черт. 3

Если пройти по комнате в каком-нибудь направлении, то можно в конце концов дойти до стены. Дальше идти нельзя. Комната с этой стороны ограничена, имеет границу. То же самое получится, если мы пойдём по комнате в другом направлении.

Если в комнате подбросить вверх мяч или какой-нибудь другой лёгкий предмет, то он долетит до потолка и ударится о него. Выходит, что комната ограничена не только с боков, но также сверху и снизу. **Граница тела есть поверхность.**

За поверхность можно условно принять, например, лист бумаги, если пренебречь его толщиной; таким образом, поверхность можно представить себе отдельно от геометрического тела.

Если часть поверхности белого листа бумаги закрасить какой-нибудь краской (черт. 4), то закрашенная часть будет отделяться от белой части листа линией.

Линия ограничивает закрашенную часть поверхности листа бумаги. **Граница поверхности есть линия.**

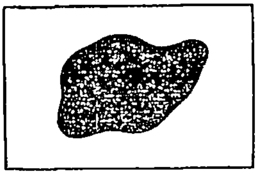
За линию можно условно принять, например, натянутую или ненатянутую нить.

Линию условно можно изобразить мелом на доске или карандашом на листе бумаги.

Таким образом, линию можно представить себе отдельно от поверхности, если пренебречь толщиной получающихся изображений.

Если взять часть какой-нибудь линии, то концами её будут точки.

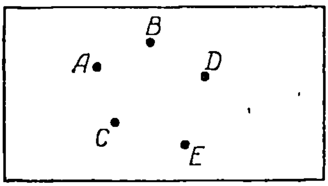
За точку можно условно принять то изображение, которое получится на листе бумаги, если на этот лист надавить концом остро отточенного карандаша. Таким образом, точку можно представить себе отдельно от линии, если пренебречь размерами получающихся изображений.



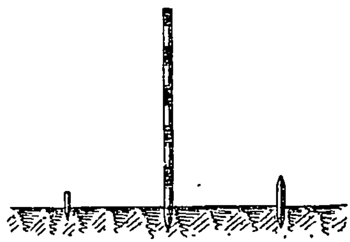
Черт. 4

Отметим мелом на доске несколько точек. Чтобы различать эти точки, можно их пронумеровать или обозначить каждую точку буквой.

В геометрии принято обозначать точки заглавными буквами латинского алфавита. На чертеже 5 изображены: точка A, точка B, точка C, точка D, точка E.



Черт. 5



Черт. 6

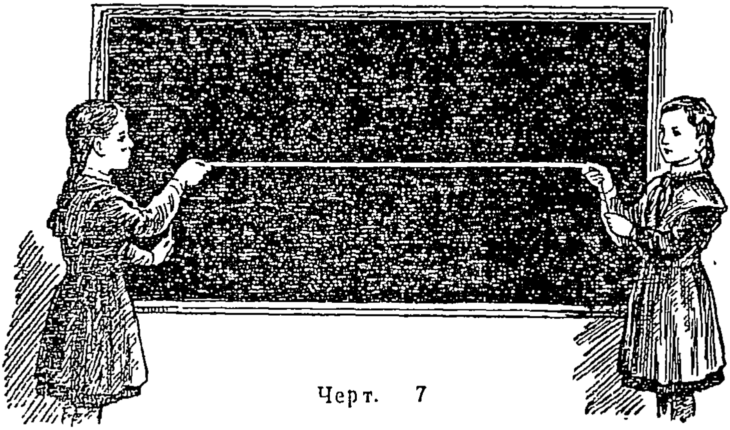
Таким же образом мы можем отметить точки на листе бумаги. На поверхности земли точки отмечаются колышками, иногда ставится столбик (черт. 6).

§ 3. ПРЯМАЯ. ЛУЧ. ОТРЕЗОК. ЛОМАНАЯ.

Если туго натянуть шнур (черт. 7), то он даст представление о прямой линии. Если ослабим натяжение, получим изображение кривой линии. Край стола, край листа бумаги, место, где сходятся две стены классной комнаты, луч света тоже дают представление о прямой линии.

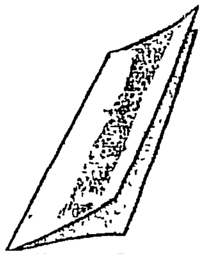
Для получения прямой линии можно аккуратно согнуть лист бумаги. Место сгиба будет прямой линией (черт. 8). Таким согнутым листом можно воспользоваться для проведения прямых линий на бумаге.

Для проведения прямых линий на бумаге или классной доске обыкновенно пользуются линейкой.



Черт. 7

Плотники, каменщики, столяры для обозначения прямой линии пользуются шнуром, который натирается углем или мелом. Натянутый шнур оттягивают, затем отпускают. На доске или на стене останется след шнура в виде прямой линии (черт. 9).



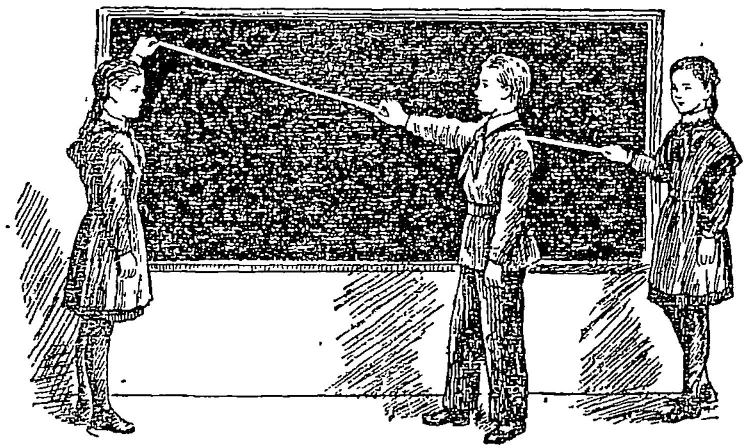
Черт. 8

Прямая линия имеет следующие свойства

1. ***Прямая линия бесконечна.***

Изобразить можно только часть прямой линии (черт. 10).

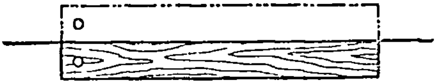
2. ***Через любые две точки можно провести прямую линию, и притом только одну.***



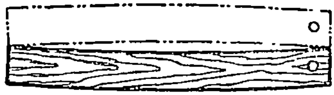
Черт. 9

На этом свойстве прямой основана проверка линейки. Если мы на бумаге обозначим две точки и через них карандашом аккуратно проведём по краю линейки линию, а затем повернём линейку другой стороной и снова проведём по краю линейки через те же точки другую линию и если при этом линии сольются, то линейка правильная (черт. 11). Если же линии не сольются, то это покажет, что линейка сделана неправильно (черт. 12).

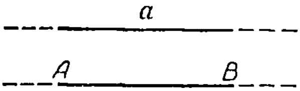
Черт. 10



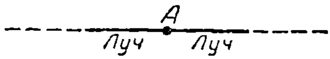
Черт. 11



Черт. 12



Черт. 13

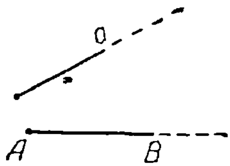


Черт. 14

Прямая линия на доске или на бумаге обозначается или одной малой буквой латинского алфавита, или двумя большими буквами, поставленными в двух различных точках этой прямой (черт. 13).

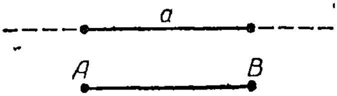
Если на прямой линии отметим какую-нибудь точку, то получим два луча (черт. 14).

Л у ч о м называют часть прямой линии, ограниченную с одной стороны (черт. 15). Луч также обозначается или одной малой буквой латинского алфавита, или двумя большими буквами, из которых одна ставится в начале луча.



Черт. 15

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется о т р е з к о м п р я м о й (черт. 16).



Черт. 16

Отрезок, как и прямая линия, обозначается или одной буквой, или двумя. В последнем случае эти буквы обозначают концы отрезка (черт. 16).

Линия, состоящая из нескольких отрезков, не лежащих на одной прямой, называется л о м а н о й (черт. 17, *а*). Если концы ломаной совпадают, то такая ломаная называется з а м к н у т о й (черт. 17, *б*).

а) б)

Черт. 17

§ 4. ПЛОСКОСТЬ.

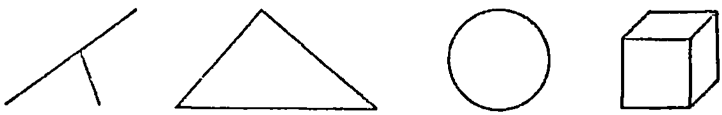
Представить себе плоскость можно, рассматривая поверхность стола, зеркала или поверхность спокойной воды в сосуде или в пруде в тихую погоду.

Если через две любые точки плоскости провести прямую, то все точки этой прямой окажутся лежащими на той же плоскости.

Является ли какая-нибудь поверхность плоскостью, легко проверить, прикладывая к поверхности в любом направлении проверенную линейку.

Прямые линии, лучи и отрезки мы считали лежащими на плоскости.

Точки, линии и поверхности, взятые отдельно или в комбинациях друг с другом, образуют г е о м е т р и ч е с к и е ф и г у р ы (черт. 18).



Черт. 18

Часть геометрии, которая занимается изучением фигур, все части которых расположены на одной плоскости, называется п л а н и м е т р и е й.

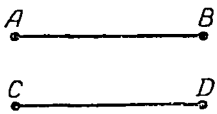
Часть геометрии, занимающаяся изучением фигур, которые не могут быть помещены в одной плоскости, называется с т е р е о м е т р и е й.

§ 5. СРАВНЕНИЕ ОТРЕЗКОВ. ДЕЙСТВИЯ НАД ОТРЕЗКАМИ.

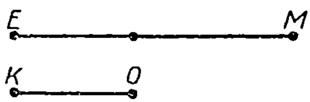
1. Равные и неравные отрезки.

Отрезки называются равными, если они могут быть наложены один на другой так, что концы их совпадут.

Пусть нам даны два отрезка AB и CD (черт. 19). Наложим отрезок AB на отрезок CD так, чтобы точка A совпала с точкой C, и отрезок AB направим по отрезку CD. Если точка B совпадает с точкой D, то отрезки AB и CD равны; $AB = CD$.



Черт. 19



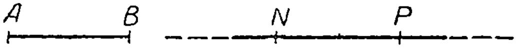
Черт. 20

Сравним два отрезка KO и EM (черт. 20). Наложим отрезок KO на отрезок EM так, чтобы точки K и E совпали. Отрезок KO направим по отрезку EM. Если точка O окажется где-нибудь между точками E и M, то говорят, что отрезок EM больше отрезка KO; отрезок KO меньше отрезка EM.

Записывается это так: $EM > KO$, $KO < EM$.

2. Построение отрезка, равного данному, с помощью циркуля.

Построение отрезка, равного данному отрезку AB (черт. 21), выполняется с помощью циркуля таким образом: одну ножку циркуля устанавливают на один конец отрезка AB, а другую — на другой его конец и, не меняя раствора циркуля, переносят его на

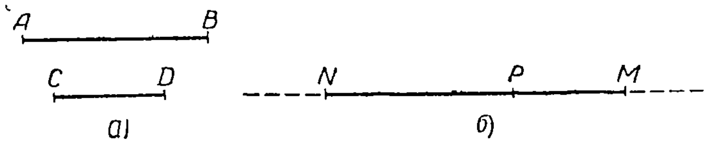


Черт. 21

некоторую прямую так, чтобы конец одной ножки отметил какую-нибудь точку N, тогда конец другой ножки циркуля отметит некоторую точку P на этой же прямой. Отрезок NP будет равен отрезку AB.

3. Сложение и вычитание отрезков.

Чтобы найти сумму двух отрезков, например AB и CD (черт. 22, *а*), надо взять прямую линию и на ней некоторую точку, например точку N (черт. 22, *б*), затем с помощью циркуля отложить



Черт 22

на этой прямой от точки N сначала отрезок NP, равный отрезку AB, а потом от его конца в том же направлении отложить отрезок PM, равный отрезку CD. Отрезок NM будет называться суммой отрезков AB и CD. Это записывают так:

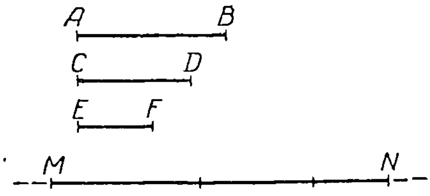
$$NM = AB + CD.$$

Таким же образом находится сумма нескольких отрезков (черт. 23):

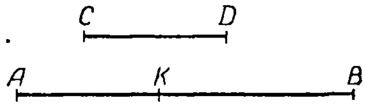
$$MN = AB + CD + EF.$$

При сложении отрезков, как и в арифметике при сложении чисел, выполняются законы переместительный и сочетательный:

$$AB + CD = CD + AB;$$
$$(AB + CD) + EF = AB + (CD + EF).$$



Черт. 23



Черт. 24

Чтобы найти разность двух отрезков AB и CD (черт. 24), надо на большем отрезке (AB) от конца его, например точки A, отложить меньший отрезок (CD). Оставшаяся часть (KB) большего отрезка и будет разностью этих отрезков:

$$AB - CD = KB.$$

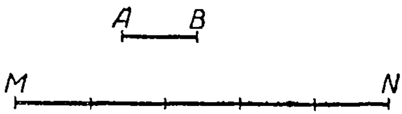
4. Умножение и деление отрезка на целое число.

а) Умножить отрезок AB на целое число, например на 5, — это значит, что отрезок AB надо взять слагаемым 5 раз (черт. 25):

$$5AB = MN.$$

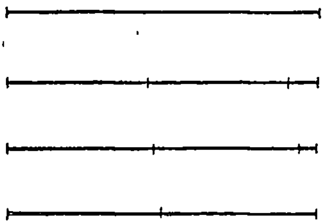
Отрезок MN есть произведение отрезка AB на число 5.

б) На чертеже 25 отрезок MN составлен из пяти равных отрезков, т. е. отрезок MN разделён на пять равных частей. Каждый из них составляет $\frac{1}{5}$ часть отрезка MN.



Черт. 25

в) Чтобы разделить отрезок на равные части с помощью циркуля, поступают таким образом. Например, если нужно разделить отрезок на две равные части, то циркуль раздвигают на глаз так, чтобы раствор циркуля составлял примерно половину отрезка. Затем на данном отрезке от его конца последовательно один за другим откладывают этим раствором циркуля два отрезка. Если полученная сумма отрезков будет меньше данного отрезка, то раствор циркуля увеличивают; если сумма окажется больше данного отрезка, то раствор циркуля уменьшают. Так, постепенно исправляя ошибку, можно отыскать довольно точно половину отрезка (черт. 26).

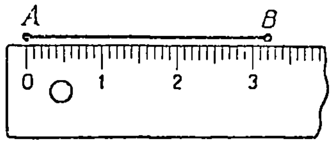


Черт. 26

Таким же образом выполняется приближённое деление отрезка на 3, 4, 5 и т. д. равных частей. Только в этом случае надо брать на глаз $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... отрезка и откладывать взятый отрезок 3, 4, 5,... раз, смотря по тому, на сколько равных частей надо разделить данный отрезок.

§ 6. ИЗМЕРЕНИЕ ОТРЕЗКА. СВОЙСТВО ОТРЕЗКА.

Измерение отрезка производится с помощью масштабной линейки (или сантиметровой ленты). Выполняется измерение отрезка следующим образом. Если нужно измерить длину отрезка AB (черт. 27), то надо совместить точку A с тем делением линейки, против которого стоит цифра 0. Затем надо направить масштабную линейку по отрезку и посмотреть, против какого деления линейки будет точка B.



Черт. 27

Число, соответствующее этому делению, и покажет длину измеряемого отрезка. Длина отрезка AB равна 32 *мм*.

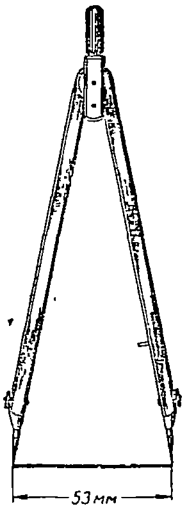
При измерении отрезка используется также и циркуль. Сначала одну ножку циркуля устанавливают на один конец измеряемого отрезка, а другую — на другой его конец (черт. 28). Затем, не меняя раствора циркуля, переносят его на масштабную линейку так, чтобы конец первой ножки совпал с начальной (нулевой) чертой линейки, тогда конец второй ножки циркуля покажет длину измеряемого отрезка (черт. 29). Длина этого отрезка равна 53 *мм*.

Отрезок обладает следующим свойством: ***отрезок прямой короче всякой другой линии, соединяющей его концы*** (черт. 30).

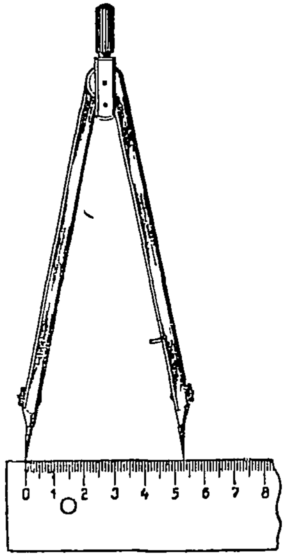
Сложение и вычитание отрезков, а также умножение и деление их на целое число можно выполнять так: измерить данные отрезки с помощью масштабной линейки или сантиметровой ленты и затем выполнить указанные действия над полученными числами. Так, чтобы сложить или вычесть, например, отрезки AB и CD, сначала измерим их. Пусть оказалось $AB = 27{,}4$ *см*, $CD = 19{,}8$ *см*.

Тогда сумма этих отрезков $AB + CD = 27{,}4 + 19{,}8 = 47{,}2$ (*см*), а разность $AB - CD = 27{,}4 - 19{,}8 = 7{,}6$ (*см*).

Чтобы умножить, например, отрезок AB на 3, нужно измерить длину его и полученное число умножить на 3.



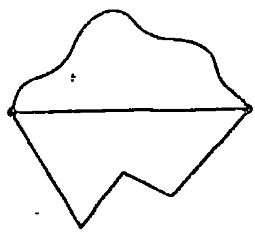
Черт. 28



Черт. 29

Если AB равно 27,4 *см*, то $AB \cdot 3 = 27{,}4 \cdot 3 = 82{,}2$ (*см*).

Чтобы разделить отрезок на равные части с помощью масштабной линейки, надо измерить данный отрезок и полученное число разделить на данное число частей. Например, если длина отрезка равна 48 *мм*, а нужно его разделить на шесть равных частей, то на каждую часть придётся по 8 *мм*.



Черт. 30

§ 7. ПРОВЕШИВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

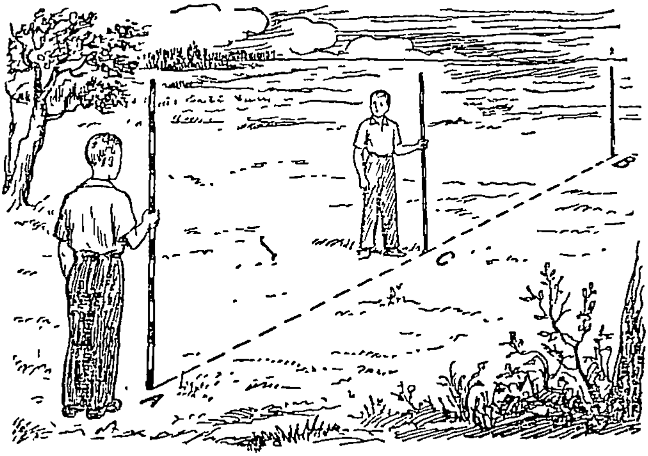
Для провешивания, т. е. проведения прямых линий на земле, пользуются вехами.

Вехи — это колья, заострённые с одной стороны. Обыкновенно вехи бывают длиной в $1\frac{1}{2}$—2 *м*. Для лучшей видимости вехи закрашивают в два цвета (чаще всего в красный и белый).

Слово «провешивание» и образовалось от слова «веха».

Если нужно провешить прямую линию между двумя точками A и B, положение которых дано, то сначала в этих точках ставятся вехи; затем между ними устанавливается промежуточная веха C так, чтобы вехи A и C закрывали веху B (черт. 31).

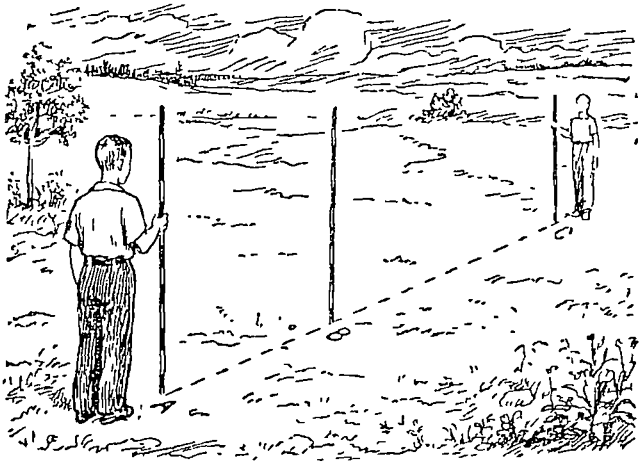
Если расстояние от точки A до точки B большое, то приходится ставить ещё вехи между точками A и C и между C и B. Вообще при провешивании прямой линии на ровной поверхности земли необ-



Черт. 31

ходимо, чтобы расстояние между вехами было от 50 до 100 *м*, а на холмистой — от 10 до 50 *м*.

Иногда приходится провешить прямую линию, направление которой задано двумя вехами, поставленными в точках A и B. В этом случае прямая линия продолжается в нужном направлении за веху

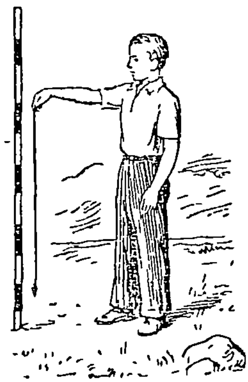


Черт 32

В так, чтобы следующую веху *С* закрывали вехи *А* и *В* (черт 32).

Затем ставятся следующие вехи так, чтобы их закрывали две ранее поставленные вехи.

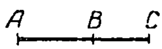
Необходимо, чтобы все вехи стояли вертикально. Правильность вертикального направления проверяется с помощью отвеса. Отвес — это шнур, на конце которого имеется небольшой груз (черт. 33).



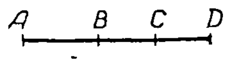
Черт. 33

Упражнения.

1. Начертить отрезок и разделить его с помощью масштабной линейки на 2 равные части (на 3, 4, 5, 8, 10 равных частей)



Черт. 34



Черт. 35

2. Начертить отрезок и приближённо разделить его с помощью циркуля на 2 равные части (на 3, 5, 8 равных частей).

3 Сколько всего отрезков на чертеже 34? на чертеже 35?

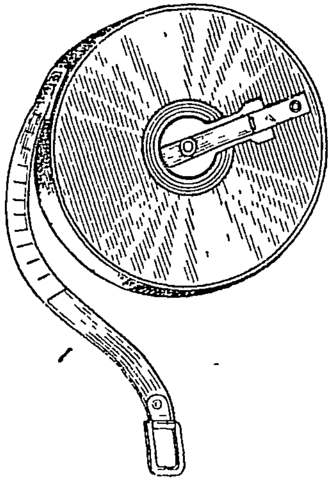
§ 8. ИЗМЕРЕНИЕ РАССТОЯНИЙ В КОМНАТЕ И НА МЕСТНОСТИ.

Измерение расстояний в комнате, например: длины, ширины, высоты её, высоты и ширины окон и т. д. — производится с помощью метра или рулетки.

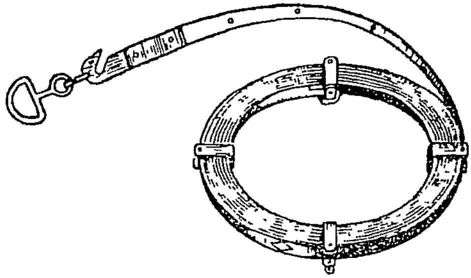
Рулетка представляет собой неширокую ленту, металлическую или из плотной ткани, на которой нанесены деления на метры и сантиметры. Длина рулетки обыкновенно бывает 10 *м* и 20 *м*.

Для сохранности и удобства пользования рулетка заключается в кожаный или картонный футляр (черт. 36).

Расстояние на поверхности земли измеряется с помощью рулетки или металлической мерной ленты длиной 20 *м* (черт. 37).



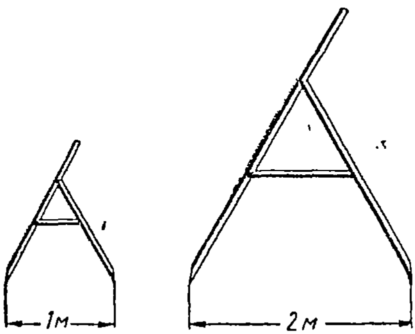
Черт. 36



Черт. 37

Иногда расстояния измеряются с помощью полевого циркуля (черт. 38). Расстояние между ножками полевого циркуля берётся или 1 *м*, или 2 *м*.

Можно расстояние измерить шагами, но для этого нужно предварительно узнать длину своего шага и уметь переводить полученное число шагов в метры.



Черт. 38

Чтобы узнать длину своего шага, нужно отмерить расстояние длиной в 10 или 20 *м* и прошагать его несколько раз, записывая каждый раз полученное число шагов. Затем найти среднее число шагов. Например, пусть первый раз на 20 *м* получилось $30\frac{1}{2}$ шага, затем 32 шага, $31\frac{1}{2}$ шага, 30 шагов[1].

$$\left(30\frac{1}{2} + 32 + 31\frac{1}{2} + 30\right) : 4 = 31.$$

Разделив 20 *м* на среднее число шагов (31), найдём среднюю длину шага: 0,65 *м* (с точностью до 0,01).

---

[1] За полшага принимается неполный шаг.

После этого полезно составить для себя такую таблицу:

Число шагов	Метры	Число шагов	Метры	Число шагов	Метры
1	0,6	10	6,5	100	65,0
2	1,3	20	13,0	200	130,0
3	1,9	30	20,0	300	195,0
4	2,6	40	26,0	400	260,0
5	3,2	50	32,5	500	325,0
6	3,9	60	39,0	600	390,0
7	4,5	70	45,5	700	455,0
8	5,2	80	52,0	800	520,0
9	5,8	90	58,5	900	585,0

По этой таблице легко переводить полученное число шагов в метры. Например, если при измерении какого-либо расстояния получилось 724 шага, перевод их в метры может быть выполнен так:

$$\begin{array}{rcll} 700 \text{ шагов} & = & 455 & \text{м} \\ 20 \text{ шагов} & = & 13 & \text{м} \\ 4 \text{ шага} & = & 2,6 & \text{м} \\ \hline 724 \text{ шага} & \approx & 470 & \text{м} \approx \frac{1}{2} \text{ км} \end{array}$$

Упражнения.

1. Измерить длину, ширину и высоту своего класса, своей комнаты.
2. Провешить прямую линию на школьном дворе или на каком-нибудь земельном участке.
3. Измерить расстояние между двумя какими-нибудь пунктами с помощью мерной цепи или рулетки или с помощью полевого циркуля.
4. Составить таблицу для перевода своих шагов в метры.
5. Измерить шагами расстояние от своей квартиры до школы и перевести в метры.
6. Определить на глаз расстояние между какими-нибудь пунктами, затем измерить то же расстояние шагами и перевести в метры. Вычислить, какой процент составляет ошибка, полученная при определении расстояния на глаз.

§ 9. УГОЛ. ДЕЙСТВИЯ НАД УГЛАМИ.

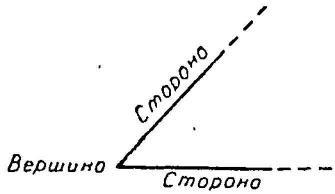
1. Определение угла.

Если на классной доске или на странице тетради возьмём точку и из неё проведём два луча (черт. 39), то получим угол.

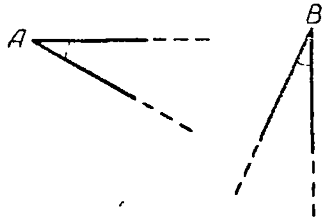
Углом называется фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки.

Угол обозначается значком $\angle$.

Точка, из которой выходят лучи, называется **вершиной** угла, а лучи, образующие угол, называются **сторонами** угла (черт. 39).

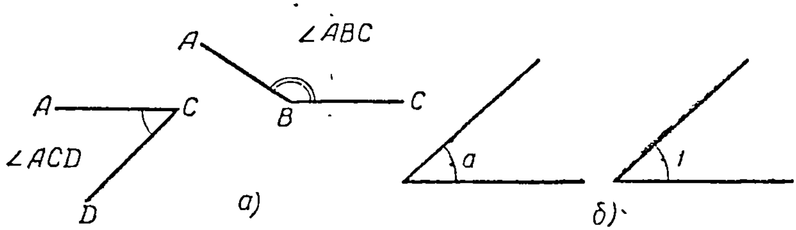


Черт. 39



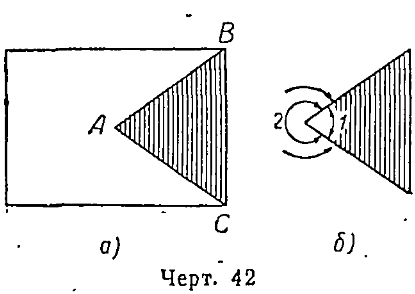
Черт. 40

Угол обозначается или одной большой буквой, поставленной у вершины угла, например A или B (черт. 40), или тремя буквами, из которых одна ставится при вершине угла, а две другие — у каких-нибудь точек сторон, например $\angle ABC$ или $\angle ACD$ (черт. 41, *а*). Буква, стоящая при вершине угла, всегда записывается между двумя другими буквами. Иногда угол обозначают одной малой буквой или цифрой, поставленной внутри угла (черт. 41, *б*).



Черт. 41

Вырежем из листа бумаги начерченный на ней угол, получим модель угла (черт. 42, *а*). Моделью угла оказывается часть листа бумаги, ограниченная сторонами угла (на чертеже она заштрихована).



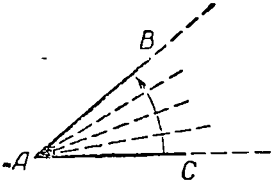
Черт. 42

Оставшаяся часть листа тоже является моделью угла, но уже другого. Поэтому нужно считать, что на чертеже изображены два угла. На модели ясно, какой угол взят; чтобы это было ясно и на чертеже, следует взятый угол как-нибудь отметить, например дугой и номером, как это показано на чертеже 42, *б*.

Стороны угла, начерченного на листе бумаги, разделяют лист бумаги на две части (черт. 42, *а*); точно так же стороны угла, взятого на плоскости, разделяют плоскость на две области.

Для каждого угла одна из областей называется внутренней. Внутренней областью для $\angle 1$ является область, заштрихованная на чертеже, для $\angle 2$ внутренняя область оставлена незаштрихованной (черт. 42, *б*). В дальнейшем будем рассматривать угол вместе с его внутренней областью.

Образование угла можно представить себе иначе. Если мы возьмём луч AC (черт. 43) и повернём его вокруг точки A, то начальное (AC) и конечное (AB) положения луча образуют угол.

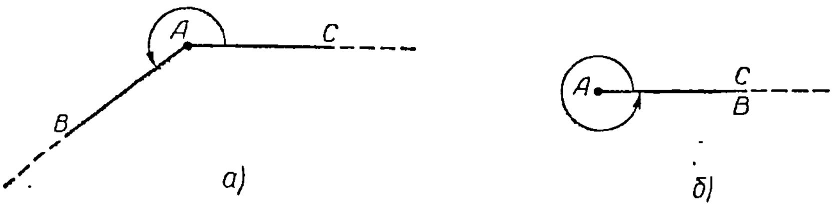


Черт. 43

Продолжая вращать луч в том же направлении, мы будем получать всё новые и новые углы. Может наступить такой момент, когда оба луча будут составлять прямую линию (черт. 44). Такой угол называется р а з в ё р н у т ы м углом. Если будем продолжать

Черт. 44

вращение луча и дальше, снова будем получать новые углы (черт. 45, *а*), и, наконец, луч может занять своё прежнее положение (черт. 45, *б*). В этом случае угол будет называться п о л н ы м у г л о м.



Черт. 45

2. Сравнение углов по величине.

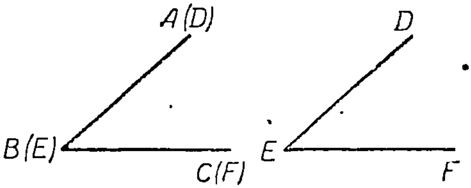
Начертим на листе бумаги какой-нибудь угол ABC и переведём его с помощью копировальной бумаги на другой лист, получим угол DEF (черт. 46). Вырежем оба эти угла и затем наложим их друг на друга, например угол DEF на угол ABC, так, чтобы:

1) вершина E совпала с вершиной B,

2) сторона EF пошла по стороне BC и

3) внутренняя область угла DEF легла на внутреннюю область угла ABC.

Выполнив наложение, мы увидим, что сторона ED пойдёт по стороне BA, углы ABC и DEF совместятся, т. е. они будут равны.

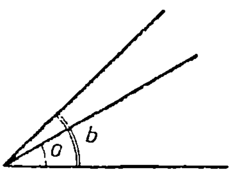


Черт. 46

Углы называются р а в н ы м и, если их можно совместить наложением. Равенство углов обозначается так: $\angle ABC = \angle DEF$.

Развёрнутые углы при наложении могут быть совмещены. Отсюда, ***все развернутые углы равны между собой.***

Полные углы при наложении также могут быть совмещены. Следовательно, ***все полные углы равны между собой.***



Черт. 47

Рассмотрим теперь чертёж 47. Углы a и b наложены друг на друга, причём внутренняя область угла a занимает только часть внутренней области угла b.

Поэтому считается, что угол a меньше угла b, а угол b больше угла a:

$$\angle a < \angle b, \quad \angle b > \angle a.$$

Вообще, из двух углов тот считается меньшим, внутренняя область которого при наложении углов друг на друга занимает только часть внутренней области другого угла.

На чертежах мы вынуждены стороны угла изображать в виде отрезков, но стороны угла — это лучи, а лучи бесконечны, поэтому мы стороны каждого угла должны представлять себе продолженными бесконечно. Значит, от того, изобразим ли стороны данного угла длинными или короткими отрезками, величина угла не изменится, т. е. в е л и ч и н а у г л а н е з а в и с и т о т д л и н ы е г о с т о р о н.

3. Действия над углами. Биссектриса угла.

Если один угол приложить к другому так, что они будут иметь общую вершину и сторону, а внутренние области углов не будут налегать друг на друга, то полученный таким образом угол будет называться с у м м о й этих углов (черт. 48).

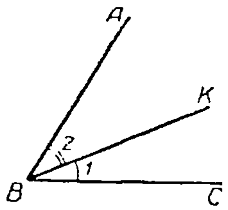
$$\angle ABC = \angle 1 + \angle 2, \quad \text{или} \quad \angle ABC = \angle KBC + \angle ABK.$$

$\angle KBC$ является **разностью** углов ABC и ABK: $\angle KBC = \angle ABC - \angle ABK$.

Точно так же $\angle ABK = \angle ABC - \angle KBC$.

Можно получить сумму не только двух, но и нескольких углов (черт. 49):

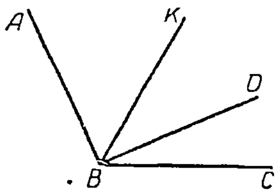
$$\angle ABC = \angle DBC + \angle KBD + \angle ABK.$$



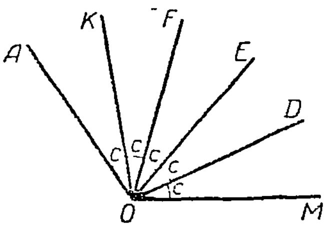
Черт. 48

При сложении углов выполняются переместительный и сочетательный законы, как и при сложении отрезков.

Если взять сумму нескольких равных углов, т. е. один и тот же угол повторить слагаемым несколько раз (черт. 50), то полученный угол будет результатом умножения угла на целое число: $\angle AOM = 5\angle c$. Следовательно, $\angle c$ будет равен $\frac{1}{5}$ $\angle AOM$; $\angle EOM = \frac{2}{5}\angle AOM$; $\angle FOM = \frac{3}{5}\angle AOM$; $\angle KOM = \frac{4}{5}\angle AOM$.

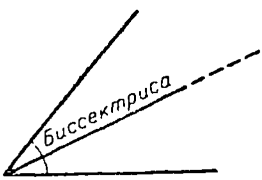


Черт. 49

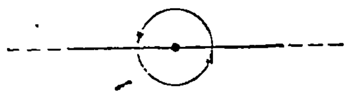


Черт. 50

Луч, делящий угол пополам, называется **биссектрисой** угла (черт. 51).



Черт. 51

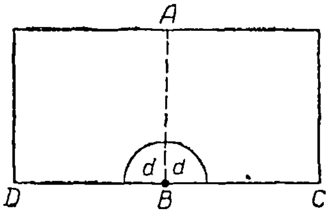

Черт. 52

Полный угол равен сумме двух развёрнутых углов (черт. 52), а развёрнутый угол равен половине полного угла.

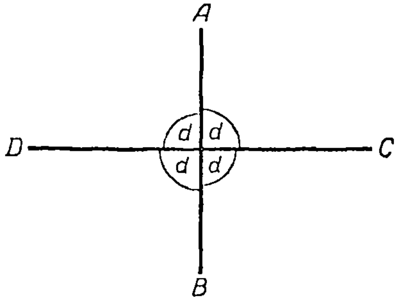
4. Прямой угол.

Возьмём лист бумаги и на одной стороне его, как показано на чертеже 53, обозначим точку B, которую примем за вершину развернутого угла; стороны этого угла обозначим через BD и BC.

Если лист бумаги согнём так, чтобы сгиб прошёл через точку B, а лучи BD и BC совпали, то развернутый угол разделится на два равных угла. Каждый из них будет составлять половину развернутого угла. **Угол, равный половине развёрнутого угла, называется прямым углом.** $\angle ABC = \angle ABD$ (черт. 53).



Черт 53



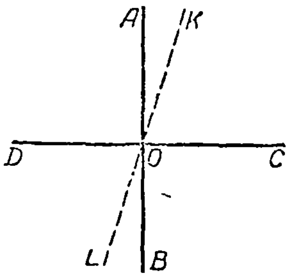
Черт 54

Так как все развёрнутые углы равны между собой, то и все прямые углы, как половины равных углов, также равны между собой. Величина прямого угла обозначается буквой d: $\angle ABC = d$; $\angle ABD = d$. Развёрнутый угол равен $2d$. Полный угол равен $4d$ (черт. 54).

§ 10. ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ПРЯМОЙ.

1. Перпендикуляр к прямой. Основные свойства перпендикуляра.

Прямые линии, образующие между собой прямые углы, называются взаимно перпендикулярными.



Черт 55

Прямые AB и CD (черт. 54) взаимно перпендикулярны.

Перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$. На чертежах 53 и 54 $AB \perp DC$ и $DC \perp AB$.

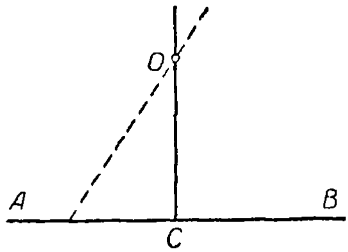
Каждая из этих прямых называется перпендикуляром к другой. AB — перпендикуляр к DC, и CD — перпендикуляр к AB.

К данной прямой через данную на

ней точку можно провести только один перпендикуляр (черт. 55).

В самом деле, если $AB \perp CD$, то всякая другая прямая, проведённая через точку O прямой CD, например LK, не будет перпендикулярна к ней, так как углы KOC и KOD не будут прямыми углами, а один из них будет больше прямого угла, другой меньше.

Точно так же можно провести только один перпендикуляр к данной прямой AB через точку O и в том случае, когда точка O лежит не на прямой AB, а вне её (черт. 56).

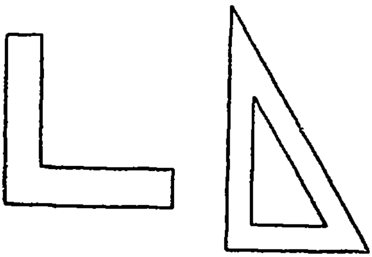


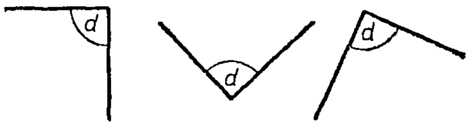
Черт. 56

Если $OC \perp AB$, то всякая другая прямая, проходящая через точку O, уже не будет перпендикулярна к прямой AB. Доказательство этого утверждения будет дано позднее.

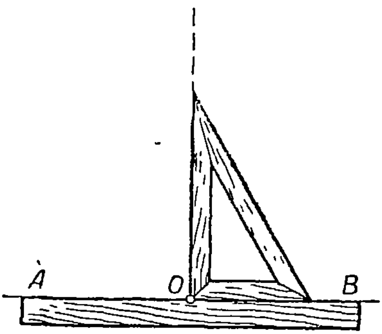
2. Построение перпендикуляра к прямой

Для вычерчивания прямых углов употребляется угольник или чертёжный треугольник (черт. 57). Прямой угол может быть изображен в любом положении (черт. 58).

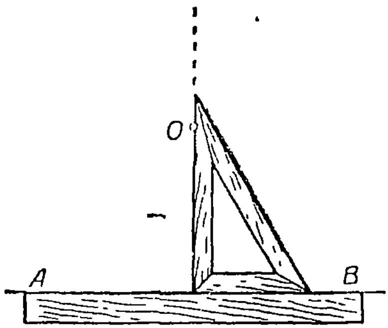

Черт 57



Черт 58



Черт. 59



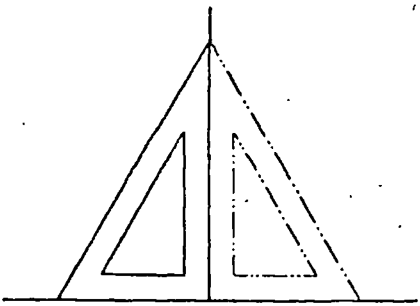
Черт. 60

Проведение перпендикуляра к данной прямой AB с помощью чертёжного треугольника через точку O, данную на самой прямой AB, показано на чертеже 59.

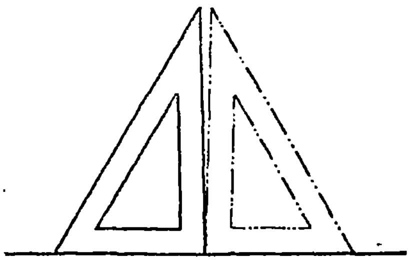
На чертеже 60 показано проведение перпендикуляра к прямой AB через точку O, данную вне этой прямой.

3. Проверка чертёжного треугольника.

Чтобы проверить чертёжный треугольник, надо начертить прямую линию, взять на ней какую-нибудь точку и, приняв луч за сторону угла, построить при помощи треугольника прямой угол с вершиной в данной точке. Затем чертёжный треугольник надо перевернуть, приложить той же стороной прямого угла к этой прямой в противоположном направлении от вершины и построить второй прямой угол с вершиной в той же точке. Если начерченные прямые совпадут (черт. 61), то чертёжный треугольник верен, если же не совпадут, то треугольник не верен (черт. 62).



Черт. 61



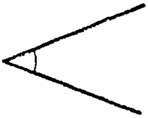
Черт. 62

4. Углы острый и тупой. Углы, бóльшие развёрнутого.

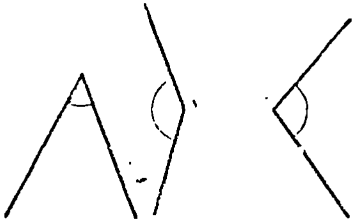
Так как все прямые углы равны между собой, то прямой угол может быть принят за меру углов.

Угол, меньший прямого, называется острым углом (черт. 63).

Угол, бóльший прямого, но меньший развёрнутого, называется тупым (черт. 64).



Черт. 63



Черт. 64

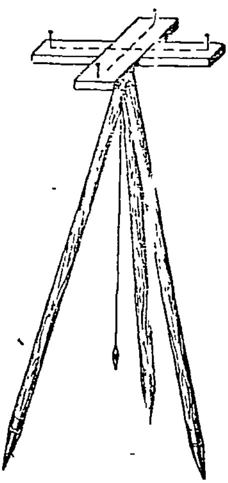
Черт. 65

Могут быть углы и бо́льшие развёрнутого (черт. 65). Однако мы ограничимся рассмотрением только тех углов, которые меньше развёрнутого; углы же, бо́льшие развёрнутого, мы рассматривать не будем, кроме тех случаев, когда это будет особо оговорено.

5. Эккер.

Для построения прямых углов на земной поверхности применяется особый прибор, который называется эккером.

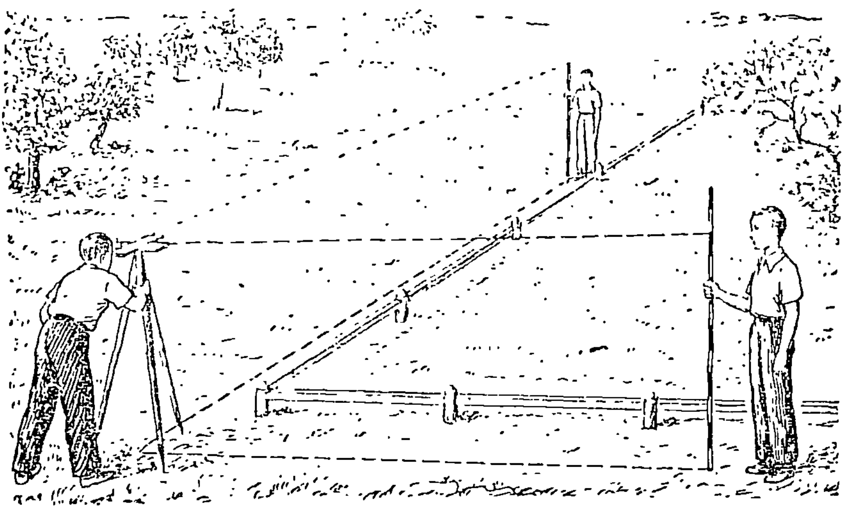
Эккер представляет собой два бруска, укреплённых под прямым углом. На концах брусков ставятся булавки или тонкие гвозди так, чтобы прямые, соединяющие их (черт. 66), были взаимно перпендикулярны. Эккер укрепляется на треножнике или на палке.



Черт. 66

Чтобы построить на земле прямой угол, надо наметить вершину угла, а эккер поместить так, чтобы точка пересечения взаимно перпендикулярных прямых (на чертеже они изображены пунктиром) оказалась на одной отвесной линии с намеченной вершиной угла на местности. Затем по направлению булавок одного бруска провешить одну прямую линию, а по направлению булавок второго бруска — вторую прямую (черт. 67).

Если надо провести прямую, перпендикулярную к данной прямой в данной точке, то эккер ставится над этой точкой так, чтобы направление булавок одного бруска совпада-

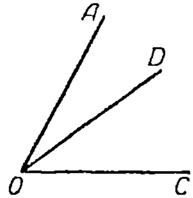


Черт. 67

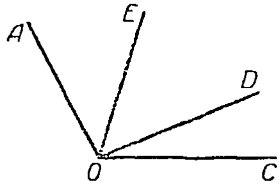
ло с направлением данной прямой. Затем по направлению другого бруска провешивается вторая прямая, которая с данной прямой образует прямой угол, т. е. перпендикулярна к ней.

Упражнения.

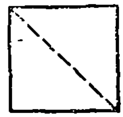
1. Начертить прямую, взять на ней точку и провести с помощью чертежного треугольника перпендикуляр к данной прямой через данную точку.
2. Начертить прямую, взять точку вне этой прямой и с помощью чертёжного треугольника провести к прямой перпендикуляр, проходящий через данную точку.
3. Назвать все углы, которые имеются на чертежах 68 и 69 (не считая углов, которые больше развернутого).



Черт. 68

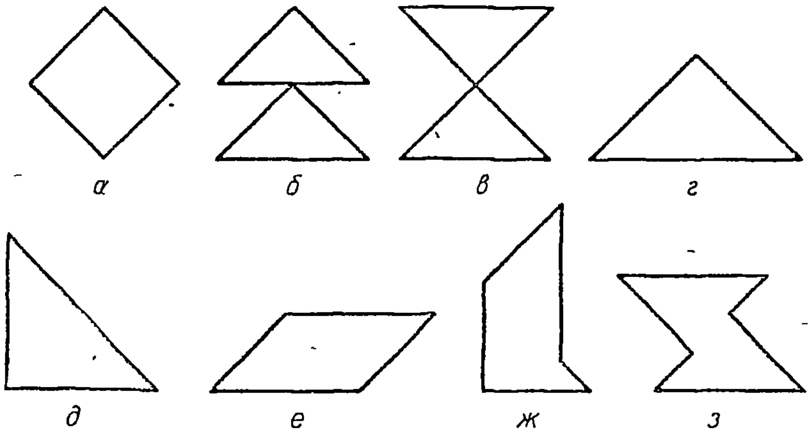


Черт. 69



Черт. 70

4. Вырезать из плотной бумаги квадрат. Разрезать его на две равные части, как показано на чертеже 70, и из полученных двух фигур составить фигуры, изображенные на чертеже 71, *а, б, в, г, д, е, ж, з.*



Черт. 71

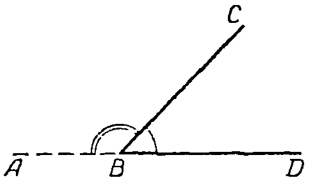
§ 11. СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ.

1. Смежные углы.

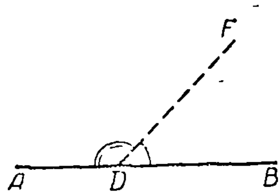
Если мы продолжим сторону какого-нибудь угла за его вершину, то получим два угла (черт. 72): $\angle ABC$ и $\angle CBD$, у которых одна сторона BC общая, а две другие AB и BD составляют прямую линию.

Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию, называются смежными углами.

Смежные углы можно получить и таким образом: если из какой-нибудь точки прямой проведём луч (не лежащий на данной прямой),



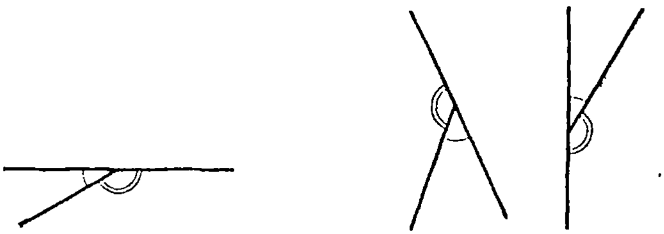
Черт. 72



Черт. 73

то получим смежные углы. Например, $\angle ADF$ и $\angle FDB$ — углы смежные (черт. 73).

Смежные углы могут иметь самые разнообразные положения (черт. 74).



Черт. 74

Смежные углы в сумме составляют развёрнутый угол, поэтому ***сумма двух смежных углов равна 2d.***

Отсюда, прямой угол можно определить как угол, равный своему смежному углу.

Зная величину одного из смежных углов, мы можем найти величину другого смежного с ним угла.

Например, если один из смежных углов равен $\frac{3}{5}d$, то второй угол будет равен:

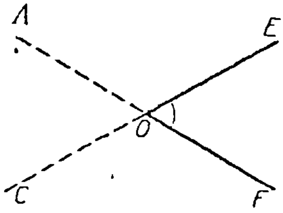
$$2d - \frac{3}{5}d = 1\frac{2}{5}d.$$

2. Вертикальные углы.

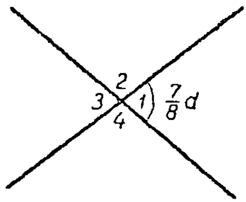
Если мы продолжим стороны угла за его вершину, то получим вертикальные углы. На чертеже 75 углы EOF и AOC — вертикальные; углы AOE и COF — также вертикальные.

Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого угла.

Пусть $\angle 1 = \frac{7}{8}d$ (черт. 76). Смежный с ним $\angle 2$ будет равен $2d - \frac{7}{8}d$, т. е. $1\frac{1}{8}d$.



Черт. 75



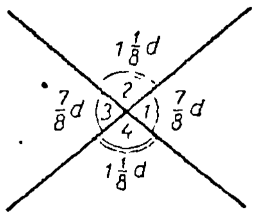
Черт. 76

Таким же образом можно вычислить, чему равны $\angle 3$ и $\angle 4$. $\angle 3 = 2d - 1\frac{1}{8}d = \frac{7}{8}d$; $\angle 4 = 2d - \frac{7}{8}d = 1\frac{1}{8}d$ (черт. 77).

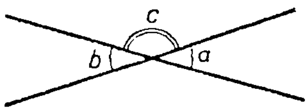
Мы видим, что $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$.

Можно решить ещё несколько таких же задач, и каждый раз будет получаться один и тот же результат: ***вертикальные углы равны между собой.***

Однако, чтобы убедиться в том, что вертикальные углы всегда равны между собой, недостаточно рассмотреть отдельные числовые примеры, так как выводы, сделанные на основе частных примеров, иногда могут быть и ошибочными.



Черт. 77



Черт. 78

Убедиться в справедливости свойства вертикальных углов необходимо путём рассуждения, путём доказательства.

Доказательство можно провести следующим образом (черт. 78):

$$\angle a + \angle c = 2d;$$
$$\angle b + \angle c = 2d$$

(так как сумма смежных углов равна $2d$).

Отсюда

$$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$$

(так как и левая часть этого равенства равна $2d$, и правая его часть тоже равна $2d$).

В это равенство входит один и тот же угол c.

Если мы от равных величин отнимем поровну, то и останется поровну. В результате получится: $\angle a = \angle b$, т. е. вертикальные углы равны между собой.

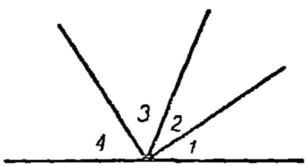
При рассмотрении вопроса о вертикальных углах мы сначала объяснили, какие углы называются вертикальными, т. е. дали о п р е д е л е н и е вертикальных углов.

Затем мы высказали суждение (утверждение) о равенстве вертикальных углов и в справедливости этого суждения убедились путём доказательства. Такие суждения, справедливость которых надо доказывать, называются т е о р е м а м и. Таким образом, в данном параграфе мы дали определение вертикальных углов, а также высказали и доказали теорему об их свойстве.

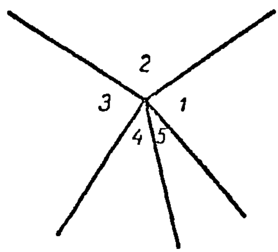
В дальнейшем при изучении геометрии нам постоянно придётся встречаться с определениями и доказательствами теорем.

3. Сумма углов, имеющих общую вершину.

На чертеже 79 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$ расположены по одну сторону прямой и имеют общую вершину на этой прямой. В сумме эти углы составляют развёрнутый угол, т. е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 2d$.



Черт. 79

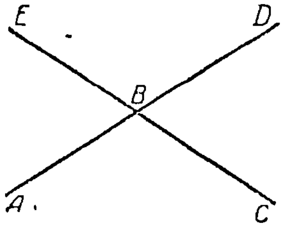


Черт. 80

На чертеже 80 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ и $\angle 5$ имеют общую вершину. В сумме эти углы составляют полный угол, т. е. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 4d$.

Упражнения.

1. Один из смежных углов равен 0,72 d. Вычислить угол, составленный биссектрисами этих смежных углов.
2. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов образуют прямой угол.
3. Доказать, что если два угла равны, то равны и их смежные углы.
4. Сколько пар смежных углов на чертеже 81?



Черт. 81

5. Может ли пара смежных углов состоять из двух острых углов? из двух тупых углов? из прямого и тупого углов? из прямого и острого углов?

6. Если один из смежных углов прямой, то что можно сказать о величине смежного с ним угла?

7. Если при пересечении двух прямых линий один угол прямой, то что можно сказать о величине остальных трех углов?

§ 12. ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ.

1. Радиус. Хорда. Диаметр.

Если мы раскроем циркуль и укрепим конец одной ножки в какой-нибудь точке плоскости, а другую ножку будем вращать, не меняя раствора циркуля, так, чтобы её конец двигался по плоскости (черт. 82), то этот конец опишет кривую линию, все точки

Черт. 82

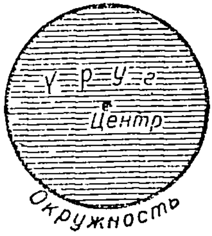
которой находятся на равном расстоянии от одной и той же точки. Если вращение продолжать до тех пор, пока кривая окажется замкнутой, то получим о к р у ж н о с т ь.

Окружностью называется кривая замкнутая линия на плоскости, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от одной точки; эта точка называется центром окружности.

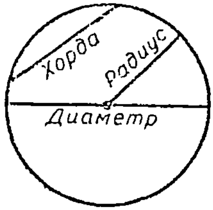
Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом (черт. 83).

Отрезок прямой, соединяющий точку окружности с её центром, называется радиусом (черт. 84).

Так как все точки окружности находятся от центра на одном и том же расстоянии, то все радиусы одной и той же окружности равны между собой. Радиус обыкновенно обозначается буквой R или r.



Черт. 83



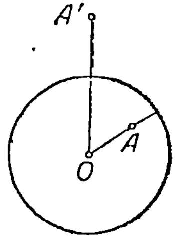
Черт. 84

Точка, взятая внутри окружности, находится от её центра на расстоянии, меньшем радиуса. В этом легко убедиться, если через данную точку провести радиус (черт. 85). Точка, взятая вне окружности, находится от её центра на расстоянии, большем радиуса. В этом легко убедиться, если соединить данную точку с центром окружности (черт. 85).

Отрезок прямой, соединяющий две точки окружности, называется хордой.

Хорда, проходящая через центр, называется диаметром (черт. 84). Диаметр обыкновенно обозначается буквой D. Диаметр равен двум радиусам:

$$D = 2r.$$

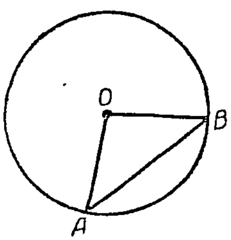


Черт. 85

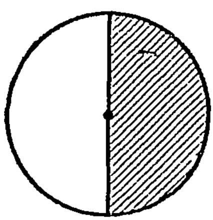
Так как все радиусы одного и того же круга равны между собой, то и все диаметры данного круга равны между собой.

Теорема. ***Хорда, не проходящая через центр круга, меньше диаметра, проведённого в том же круге.***

В самом деле, если проведём какую-нибудь хорду, например AB, и соединим её концы с центром O (черт. 86), то увидим, что хорда AB меньше ломаной линии $AO + OB$, т. е. $AB < 2r$, а так как $2r = D$, то $AB < D$.



Черт. 86


Черт. 87

Если круг перегнуть по диаметру (черт. 87), то обе части круга и окружности совместятся. *Диаметр делит круг и окружность на две равные части.*

Два круга (две окружности) называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совместились.

Поэтому два круга (две окружности) с равными радиусами равны.

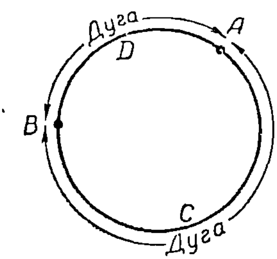
2. Дуга окружности.

Часть окружности называется *дугой*.

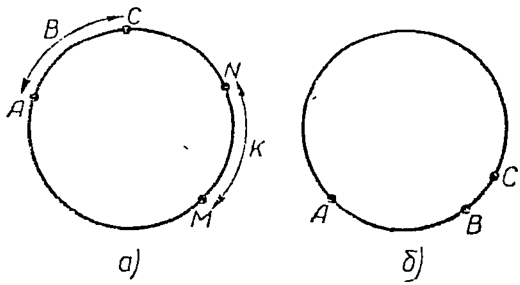
Слово «дуга» иногда заменяется знаком $\smile$. Дуга обозначается двумя или тремя буквами, из которых две ставятся на концах дуги, а третья — у какой-нибудь точки дуги. На чертеже 88 обозначены две дуги: $\smile ACB$ и $\smile ADB$.

В том случае, когда дуга меньше полуокружности, она обычно обозначается двумя буквами. Так, дугу ADB можно обозначить $\smile AB$ (черт. 88). О хорде, которая соединяет концы дуги, говорят, что она стягивает дугу.

Если передвинуть дугу AC (черт. 89, *а*) так, чтобы она скользила по данной окружности, и если при этом она совпадает с дугой NM, то $\smile AC = \smile NM$.



Черт. 88



Черт. 89

На чертеже 89, *б* дуги AC и AB не равны между собой. Начинаются обе дуги в точке A, но одна дуга ($\smile AB$) составляет только часть другой дуги ($\smile AC$). Поэтому $\smile AC > \smile AB$; $\smile AB < \smile AC$.

Упражнения.

1. Сформулируйте определения, которые приведены в данном параграфе.
2. Сформулируйте терремы, которые доказаны в данном параграфе.

§ 13. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ.

1. Центральный угол.

Центральным углом называется угол, образованный двумя радиусами одного и того же круга.

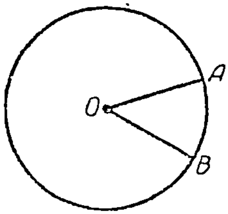
$\angle AOB$ — центральный (черт. 90). Дуга AB называется соответствующей центральному углу AOB.

Полному углу соответствует вся окружность.

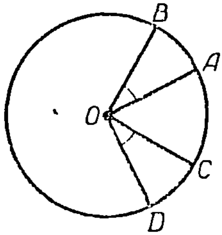
Развёрнутому углу соответствует дуга, равная половине окружности.

Прямому углу соответствует дуга, равная $\frac{1}{4}$ части окружности.

Теорема. ***Если в одном и том же круге два центральных угла равны, то равны и соответствующие им дуги.***



Черт. 90



Черт. 91

Докажем это. Возьмём окружность, построим в ней два равных центральных угла (черт. 91). Пусть $\angle AOB = \angle COD$. Вращая $\angle AOB$ вокруг центра O, можно совместить его с углом COD, так как эти углы равны между собой (такое условие принято нами). Если же углы AOB и COD совместятся, то в силу равенства радиусов совместятся и концы дуг AB и CD. (Точка A совместится с точкой D, и точка B совместится с точкой C.) Следовательно, совместятся и сами дуги AB и CD, так как все точки этих дуг находятся на одинаковом расстоянии от центра, т. е. $\smile AB = \smile CD$.

Докажем обратную теорему.

Теорема. ***Если в одном и том же круге две дуги равны, то равны и соответствующие им центральные углы.***

В самом деле, так как дуга AB равна дуге CD (черт. 91), то дуга AB, скользя по окружности, может совместиться с дугой CD, при этом точки A и B совместятся соответственно с точками D и C. Но в этом случае радиус OA совместится с радиусом OD, а радиус OB совместится с радиусом OC, т. е. угол AOB равен углу COD.

Эти две теоремы справедливы и для равных кругов.

Вторая теорема называется о б р а т н о й по отношению к первой потому, что в первой теореме доказывается равенство дуг, если равны центральные углы, во второй же теореме, наоборот, доказывается равенство центральных углов, если равны дуги.

2. Измерение углов. Градусы дуги и угла.

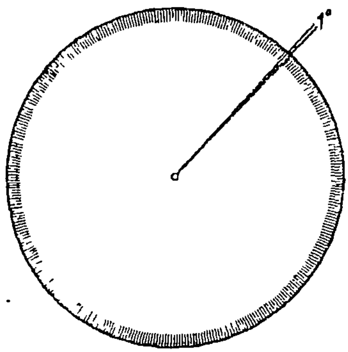
Сравнивая углы по величине, мы отмечали, что углы могут быть равными или неравными. Угол может быть равен прямому, больше прямого, меньше прямого. Однако это даёт нам лишь приблизительное представление о величине того или иного угла. Острые углы, как и тупые, могут значительно отличаться один от другого.

Чтобы более точно определять величину углов, применяются особые меры дуг и углов.

Для измерения дуг служат дуговые градусы, а для измерения углов — угловые.

Дуговым градусом, или градусом дуги, называется $\frac{1}{360}$ **часть окружности** (черт. 92).

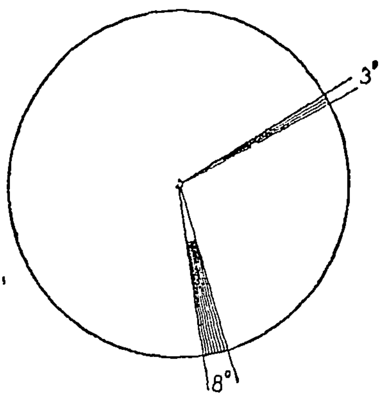
Градус дуги в свою очередь делится на 60 равных частей, называемых дуговыми минутами, а минута делится на 60 равных частей, называемых дуговыми секундами.



Черт. 92

Если дуга составляет, например, $\frac{25}{360}$ окружности, то говорят: дуга содержит 25 градусов. Обозначается это так: 25°. Если дуга содержит 25 градусов 40 минут и 15 секунд, то это записывается так: 25°40′15″.

Всякому градусу дуги соответствует центральный угол (черт. 92), который называется *угловым градусом*. Поэтому между числом угловых градусов центрального угла и числом дуговых градусов соответствующей ему дуги существует такое соответствие: сколько дуговых градусов содержит дуга какого-нибудь центрального угла, столько же угловых градусов содержит и соответствующий этой дуге центральный угол, и, наоборот, сколько угловых градусов содержит центральный угол, столько же дуговых градусов содержит дуга этого центрального угла. Принято говорить, что центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.



Черт 93

На чертеже 93 изображены два центральных угла. Дуга первого содержит 3°, столько же угловых градусов содержит и центральный угол. Второй центральный угол содержит 8°, столько же дуговых градусов содержит и соответствующая ему дуга.

Такое соответствие между числом угловых градусов центрального угла и числом дуговых градусов соответствующей ему дуги даёт возможность измерять углы и строить их.

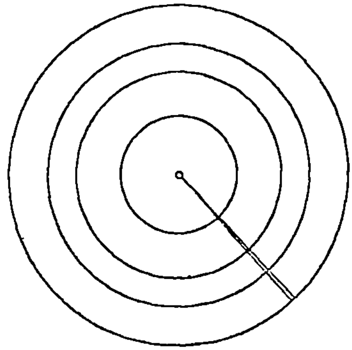
Угловой градус составляет $\frac{1}{360}$ часть полного угла. Так как полные углы равны между собой, то и угловые градусы равны между собой.

Развёрнутый угол равен 180 угловым градусам, прямой угол равен 90 угловым градусам. Иначе, угловой градус составляет $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла, или $\frac{1}{90}$ часть прямого угла.

Угловой градус, как и дуговой, делится на 60 равных частей, называемых *минутами*, которые в свою очередь тоже делятся на 60 равных частей, называемых *секундами*.

Диаметр Луны виден нами приблизительно под углом в 30′. Человеческий глаз может видеть только те предметы, которые находятся под углом зрения больше 1′. Поэтому горошина с расстояния в 1 *км* не видна человеческим глазом, так как угол зрения в этом случае составляет меньше 1″.

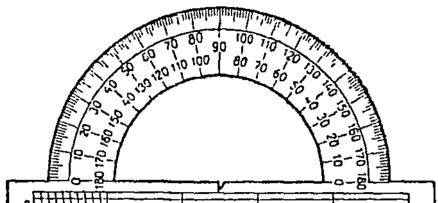
Все угловые градусы равны между собой, но этого нельзя сказать о дуговых градусах (черт. 94). Длина дугового градуса изменяется в зависимости от длины радиуса.



Черт. 94

Чем больше радиус окружности, тем больше длина дугового градуса. Так, например, длина дугового градуса земного меридиана (или экватора) приблизительно равна 110 *км*.

Дуговые градусы равны только в одной окружности и в равных окружностях.



Черт. 95

3. Транспортир.

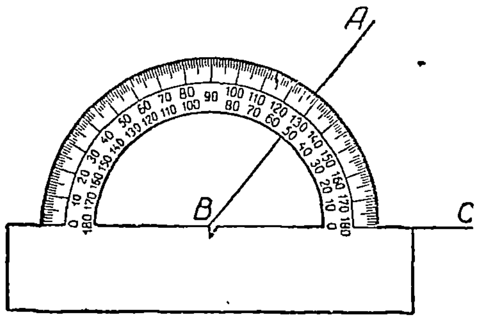
Для измерения углов, а также для построения углов существует прибор, называемый транспортиром (черт. 95). Он состоит из линейки, к которой присоединена полуокружность. Центр полуокружности отмечен небольшим вырезом или штрихом на диаметре полуокружности.

Дуга полуокружности разделена на градусы от 0 до 180°.

4. Измерение углов с помощью транспортира.

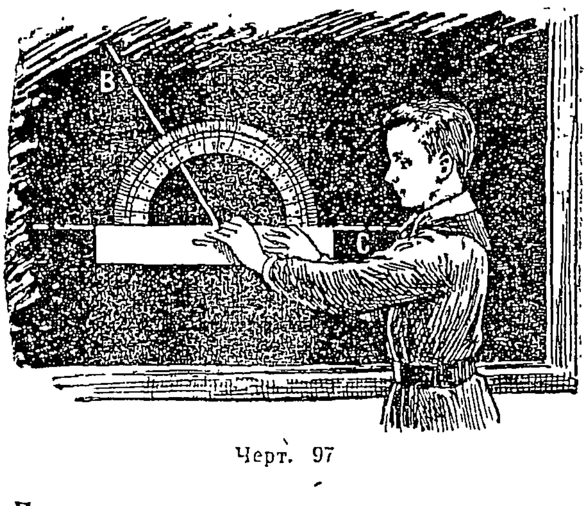
Измерение углов с помощью транспортира производится следующим образом.

Пусть нам нужно измерить $\angle ABC$ (черт. 96). Сделаем этот угол центральным. Для этого совместим центр транспортира с вершиной $\angle ABC$ (с точкой B). Направим диаметр транспортира по одной стороне $\angle ABC$ (по BC), тогда другая сторона угла покажет, сколько градусов содержит дуга измеряемого угла. В данном случае она содержит 52°, следовательно, $\angle ABC$ будет равен 52 угловым градусам. На чертеже 97 показано измерение тупого угла BOC. Угол BOC равен 120°.



Черт. 96

Записывается это так: $\angle ABC = 52°$. $\angle BOC = 120°$.



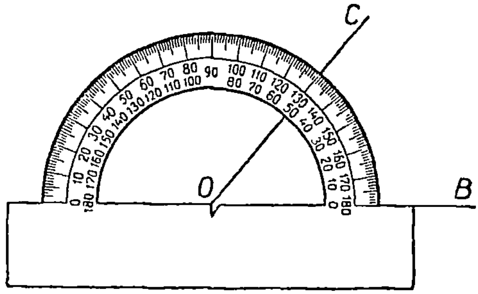
Черт. 97

5. Построение углов с помощью транспортира.

Пусть требуется построить угол в 50° по данной его вершине O и по данной стороне OB. Совместим центр транспортира с точкой O. Таким образом, угол, который мы строим, делаем центральным.

Направим диаметр транспортира по прямой OB (черт. 98) и отсчитаем по дуге транспортира справа от нуля 50°. Поставим против 50° точку C и соединим её с точкой O (вершиной угла). Мы получим искомый $\angle COB$, равный 50°.

Если нам прямая не дана и не указана точка, которая должна быть вершиной угла, а просто сказано: построить угол в 125°, то мы сначала проведём произвольную прямую и где-нибудь на ней возьмём точку O, которую примем за вершину угла, и таким же образом построим требуемый угол.



Черт. 98

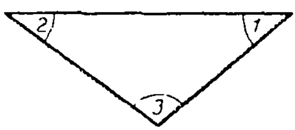
6. Приближённое деление угла на равные части.

Можно разделить угол на несколько равных частей с помощью транспортира. Для этого надо измерить угол, число градусов угла разделить на данное число частей и построить требуемые углы.

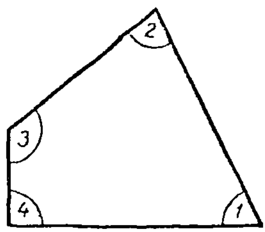
Упражнения.

1. Какой угол составляют минутная и часовая стрелки в 1 час пополудни (в 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 часов)?

2. Начертить прямой угол с помощью транспортира. Провести в нем из его вершины луч. Измерить отдельно $\angle 1$ и $\angle 2$, найти их сумму. Вычислить процент погрешности по отношению к прямому углу (90°).



Черт. 99



Черт. 100

3. Измерить углы фигуры, помещённой на чертеже 99, и найти их сумму.

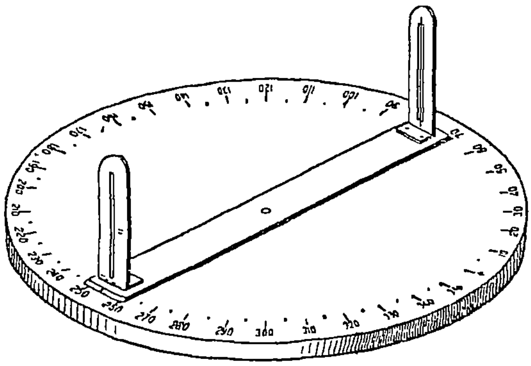
4. Измерить углы фигуры, помещённой на чертеже 100, и найти их сумму.

5. Построить несколько углов и разделить их на 2, 3, 4, 5 равных частей с помощью транспортира.

7. Астролябия.

Для измерения и построения углов на местности служат специальные приборы, называемые угломерами. Простейшим из этих приборов является а с т р о л я б и я, её упрощённая схема дана на чертеже 101.

Основной частью астролябии служит круг (лимб) с делениями от 0 до 360°. На ось, проходящую через центр круга, насажена металлическая или деревянная линейка так, что она может вращаться около этой оси. На концах линейки находятся два диоптра, которые используются для установки линейки в определённом положении. Один из диоптров, называемый глазным диоптром, имеет



Черт. 101

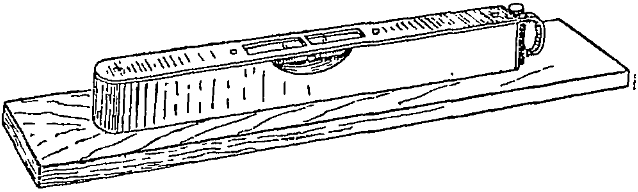
узкую вертикальную щель. В другом диоптре щель более широкая, в ней установлен вертикально волосок или тонкая проволока. Этот диоптр называется предметным. Линейка вместе с диоптрами называется а л и д а д о й. Наружные края алидады скошены, и на них имеются указатели (штрихи или выступы) для отсчёта делений на круге.

Весь прибор устанавливается на треножнике.

8. Уровень.

Для того чтобы круг астролябии (либм) принял горизонтальное положение, что очень важно для точности при измерении углов, употребляется особый прибор, называемый у р о в н е м (черт. 102).

Основной частью уровня является стеклянная трубка, запаянная с обоих концов. Трубка эта заполняется спиртом или эфиром; причём в трубке оставляется небольшой пузырёк воздуха. Если положить уровень на горизонтальную плоскость, то пузырёк воздуха будет находиться в середине трубки; если же плоскость не будет горизонтальной, то пузырёк воздуха переместится к одному из концов трубки. Уровень устанавливается на лимбе по крайней мере в двух различных направлениях. Таким образом, наблюдая за положением пузырька воздуха, можно установить, будет ли данная плоскость горизонтальной или она будет иметь уклон в ту или другую сторону.

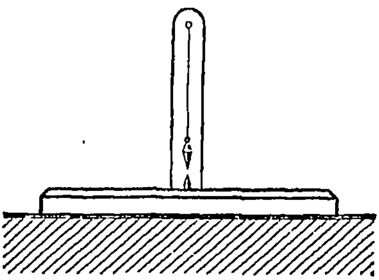


Черт. 102

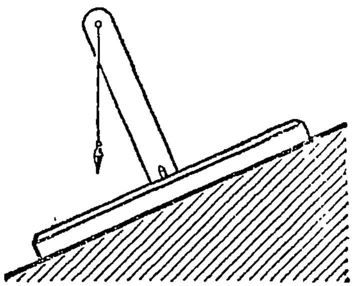
В целях большей прочности и удобства пользования прибором трубка уровня заключается в металлическую оправу, в которой оставляется небольшое оконце для наблюдения за положением пузырька воздуха. Уровень укрепляется на металлической пластинке. Иногда на поверхности круга астролябии закрепляются неподвижно два уровня в различных направлениях.

Применяется уровень и как самостоятельный прибор, с помощью которого можно проверить горизонтальность любой плоскости или прямой линии.

При выполнении строительных работ вместо уровня нередко применяется более упрощённый прибор, называемый в а т е р п а с о м (черт. 103). Он состоит из двух деревянных планок, соединённых под прямым углом. На одной из планок подвешен шнур с грузиком (отвес).



Черт. 103



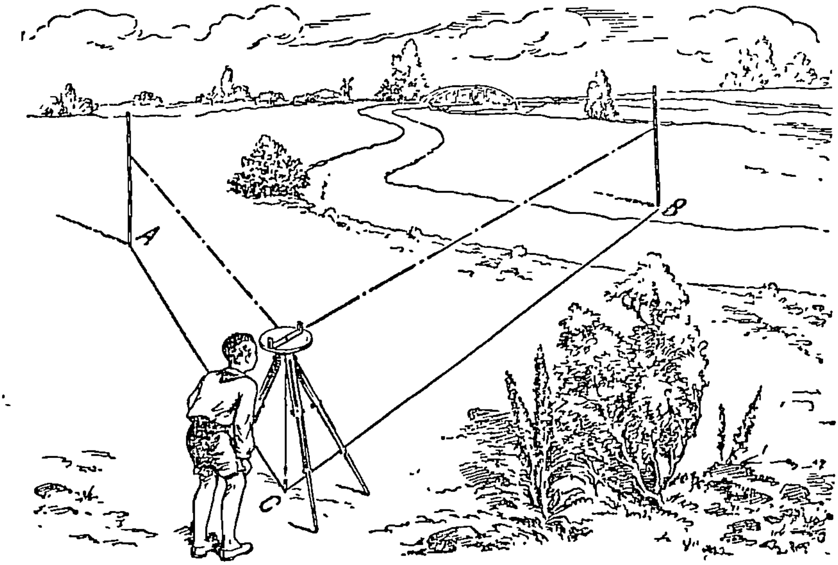
Черт. 104

В случае горизонтального положения проверяемой плоскости отвес совпадает с направлением планки; если проверяемая плоскость не горизонтальна, отвес уклоняется от этого направления (черт. 104).

9. Измерение углов при помощи астролябии.

Предположим, нужно измерить на местности угол ACB (черт. 105).

Вершину угла (точку C) отмечают колышком длиной в 25—30 *см*, треножник с астролябией устанавливают над точкой C так, чтобы отвес, подвешенный к центру круга, находился как раз над выступающим из земли колышком, а плоскость круга астролябии была горизонтальной.



Черт. 105

После этого алидаду устанавливают так, чтобы её положение совпало с одним из направлений CA или CB, например с направлением CA. Вначале алидаду устанавливают на глаз, а затем, смотря в узкую щель глазного диоптра, перемещают алидаду до тех пор, пока волосок предметного диоптра не закроет предмет A. После этого отмечают деление круга, против которого находится указатель одного из двух диоптров.

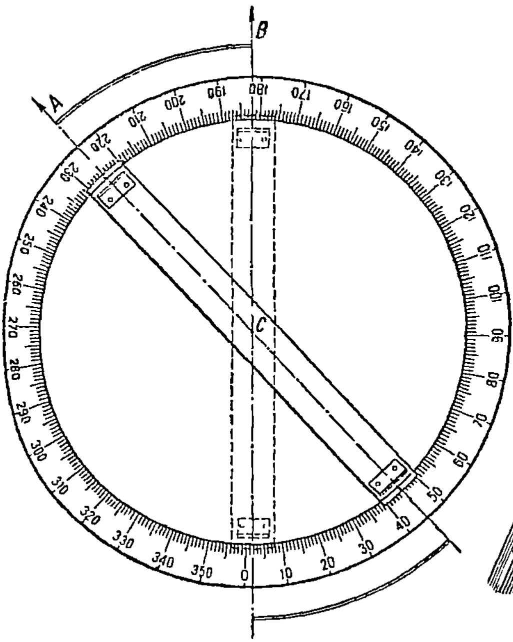
Затем алидаду устанавливают по направлению CB и отмечают деление круга, против которого находится указатель того же диоптра.

Разность отсчётов и даст угол между направлениями CB и CA, т. е. угол ACB (черт. 106).

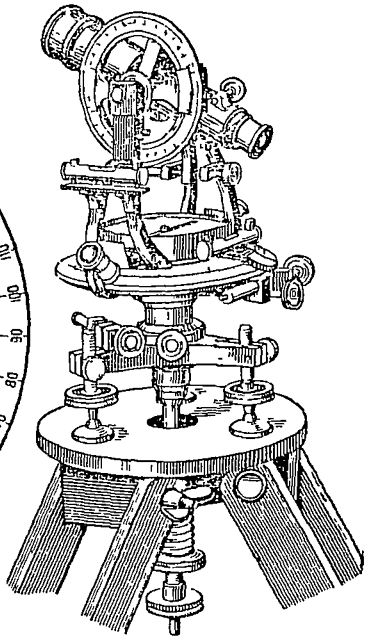
Если отсчёты на A и B окажутся по разные стороны нуля, то величину угла можно определить по противоположным меткам алидады.

Описанный выше прибор даёт небольшую точность.

С целью повышения точности измерений используются более совершенные приборы. На чертеже 107 показан один из таких приборов (теодолит).



Черт. 106


Черт. 107

Упражнения.

1. При измерении угла с помощью астролябии получили отсчёты 25° и 75°. Чему равен измеряемый угол?

2. При измерении угла с помощью астролябии получили отсчёты 35° и 340°. Чему равен измеряемый угол?

Указание. Для решения задачи рекомендуем сделать чертёж.

ГЛАВА II.

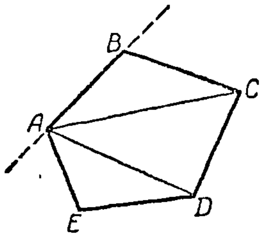
ТРЕУГОЛЬНИКИ.

§ 14. ПОНЯТИЕ О МНОГОУГОЛЬНИКЕ.

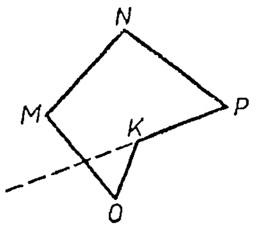
Часть плоскости, ограниченная замкнутой ломаной линией, называется многоугольником,

Отрезки этой ломаной линии называются сторонами многоугольника. AB, BC, CD, DE, EA (черт. 108) — стороны многоугольника $ABCDE$. Сумма всех сторон многоугольника называется его периметром.

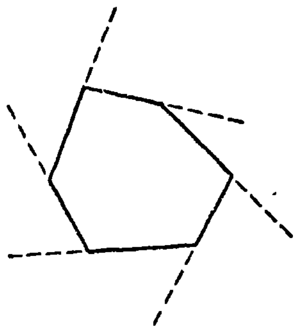
Многоугольник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от любой своей стороны, неограниченно продолженной за обе вершины.



Черт. 108



Черт. 109



Черт. 110.

Многоугольник $MNPKO$ (черт. 109) не будет выпуклым, так как он расположен не по одну сторону прямой KP.

Мы будем рассматривать только выпуклые многоугольники.

Углы, составленные двумя соседними сторонами многоугольника, называются его внутренними углами, а вершины их — вершинами многоугольника.

Отрезок прямой, соединяющий две несоседние вершины многоугольника, называется диагональю многоугольника.

AC, AD — диагонали многоугольника (черт. 108).

Углы, смежные с внутренними углами многоугольника, называются внешними углами многоугольника (черт. 110).

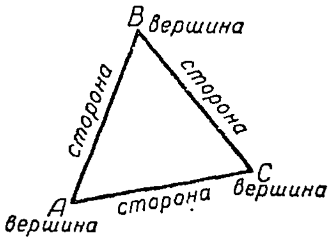
В зависимости от числа углов (сторон) многоугольник называется треугольником, четырёхугольником, пятиугольником и т. д.

Два многоугольника называются равными, если их можно совместить наложением.

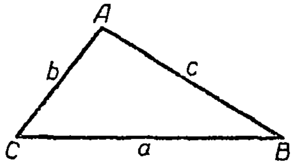
§ 15. ТРЕУГОЛЬНИК И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ.

1. Треугольник обозначается тремя заглавными буквами, стоящими при его вершинах. Для сокращения записи слово «треугольник» заменяют знаком $\triangle$. Треугольник, изображённый на чертеже 111, можно записать так: $\triangle ABC$.

Сторону треугольника принято обозначать той же буквой, что и вершину угла, противолежащего этой стороне, но малой буквой.

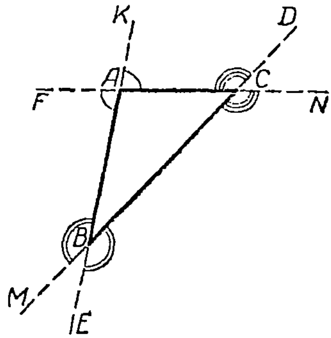


Черт. 111



Черт. 112

Так, например, на чертеже 112 сторона BC обозначена буквой a, так как она лежит против угла A; сторона CA обозначена буквой b, так как она лежит против угла B; сторона AB обозначена буквой c, так как она лежит против угла C.



Черт. 113

Если продолжим какую-нибудь сторону треугольника, то получим угол, смежный с одним из внутренних углов треугольника. Такой угол называется в н е ш н и м углом треугольника.

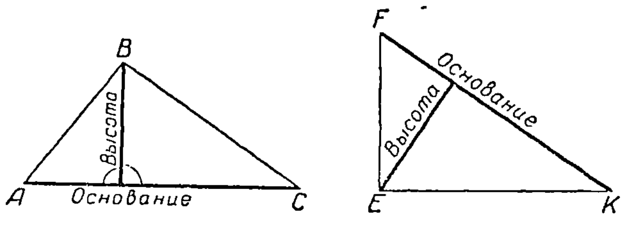
При каждой вершине треугольника может быть построено по два внешних угла (черт. 113).

2. Если из какой-либо вершины треугольника опустим перпендикуляр на противоположную сторону, то получим отрезок, который называется в ы с о т о й треугольника (черт. 114).

Сторону треугольника, к которой проведена высота, принимают за о с н о в а н и е треугольника.

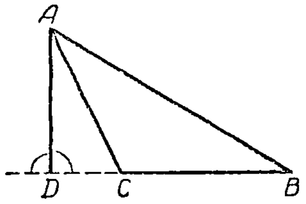
Высота может быть проведена к любой стороне треугольника. Иногда высота треугольника пересекает не само основание треугольника, а его продолжение. Так, на чертежах 115 и 116 высоты AD и EM пересекают продолжения оснований BC и FK.

В каждом треугольнике можно провести три высоты. Если аккуратно провести все высоты треугольника, то можно заметить, что

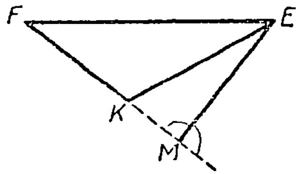


Черт. 114

все высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (черт. 117, 118). Если же высоты или их продолжения пересекутся не в одной точке, то можно с уверенностью сказать, что чертёж сделан неточно.

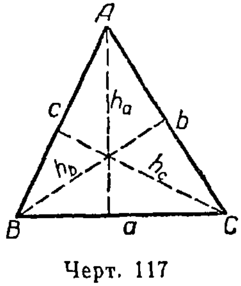


Черт. 115

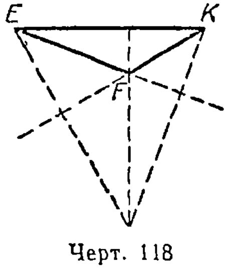


Черт. 116

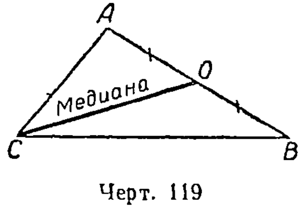
Высота треугольника обозначается буквой h, к которой присоединяется обозначение той стороны, к которой она проведена: h_a, h_b, h_c (черт. 117).



Черт. 117



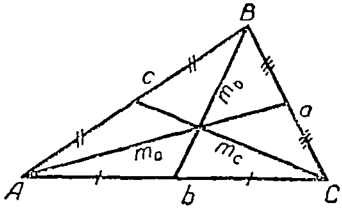
Черт. 118



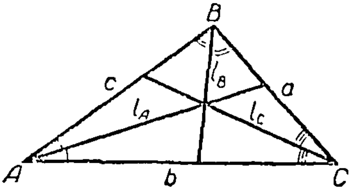
Черт. 119

3. Если соединить какую-нибудь вершину треугольника с серединой противолежащей ей стороны, то получим отрезок, который называется м е д и а н о й треугольника (черт. 119). Медиана обозначается буквой m, к которой присоединяется обозначение той стороны, к середине которой она проведена: m_a, m_b, m_c (черт. 120).

В каждом треугольнике можно провести три медианы. Если проводить их аккуратно, то в любом треугольнике медианы пересекутся в одной точке (черт. 120).



Черт. 120



Черт. 121

4. Отрезок биссектрисы угла треугольника от его вершины до противолежащей стороны называется б и с с е к т р и с о й треугольника. Биссектриса обозначается буквой l, к которой присоединяется обозначение угла, из вершины которого она проведена: l_A, l_B, l_C (черт. 121). Биссектрисы треугольника (так же как высоты и медианы) пересекаются в одной точке (черт. 121).

Стороны и углы треугольника, а также его высоты, медианы, биссектрисы называются элементами треугольника. Слово «элемент» значит «составная часть».

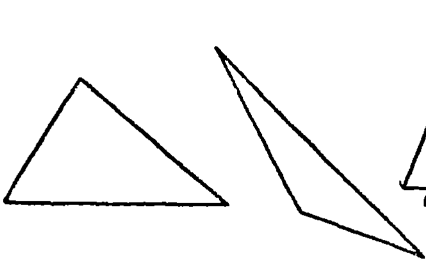
Упражнения.

1. Начертить несколько треугольников и провести в каждом из них с помощью чертёжного треугольника по три высоты.
2. Начертить несколько треугольников и провести в каждом из них по три медианы.
3. Начертить несколько треугольников и провести в каждом из них по три биссектрисы.

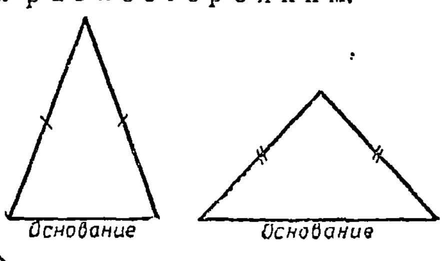
§ 16. ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СРАВНИТЕЛЬНОЙ ДЛИНЫ ИХ СТОРОН И ВЕЛИЧИНЫ УГЛОВ.

1. Виды треугольников в зависимости от сравнительной длины их сторон.

Треугольник, у которого все три стороны *имеют различные* длины (черт. 122), называется р а з н о с т о р о н н и м.

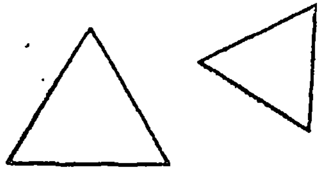


Черт. 122.



Черт. 123

Треугольник, у которого две стороны равны (черт. 123), называется равнобедренным.



Черт. 124

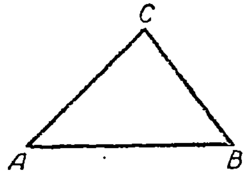
Сторона равнобедренного треугольника, не равная двум другим сторонам, обыкновенно принимается за его основание (если не сделано особой оговорки).

Треугольник, у которого равны все три стороны, называется равносторонним (черт. 124).

2. Зависимость между сторонами треугольника.

В треугольнике каждая сторона — отрезок, а две другие его стороны составляют ломаную линию, соединяющую концы этого отрезка. Поэтому ***каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон*** (§ 6).

В $\triangle ABC$ (черт. 125) $AC + BC > AB$.



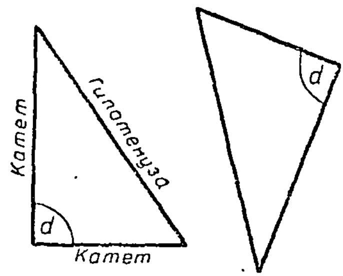
Черт. 125

Если от обеих частей этого неравенства отнимем по BC, то получим $AC > AB - BC$, т. е. ***сторона треугольника больше разности двух других его сторон.***

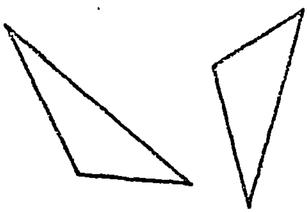
3. Виды треугольников в зависимости от величины их углов.

Треугольник, у которого все три угла острые, называется остроугольным.

Треугольник, в котором есть прямой угол, называется прямоугольным.



Черт. 126



Черт. 127

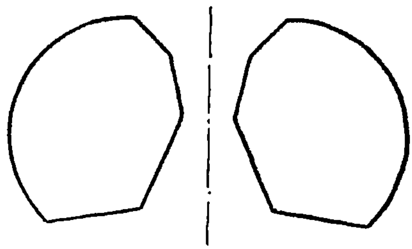
Стороны треугольника, заключающие прямой угол, называются катетами, а сторона, лежащая против прямого угла, называется гипотенузой (черт. 126).

Треугольник, в котором есть тупой угол, называется тупоугольным (черт. 127).

§ 17. СИММЕТРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМОЙ.

1. Фигуры, симметричные друг другу.

Начертим на листе бумаги чернилами какую-нибудь фигуру, а карандашом вне её — произвольную прямую. Затем, не давая чернилам высохнуть, перегнём лист бумаги по этой прямой так, чтобы одна часть листа налегла на другую. На этой другой части листа получится, таким образом, отпечаток данной фигуры. Если затем лист бумаги опять распрямить, то на нём окажутся две фигуры, которые называются **симметричными** относительно данной прямой (черт. 128).



Черт. 128

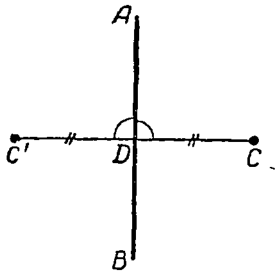
Две фигуры называются симметричными относительно некоторой прямой, если при перегибании плоскости чертежа по этой прямой они совмещаются.

Прямая, относительно которой данные фигуры симметричны, называется их **осью симметрии**.

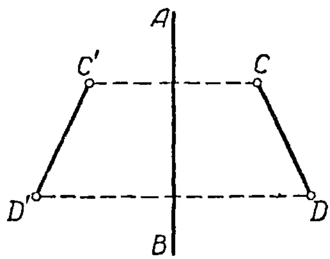
Из определения симметричных фигур следует, что всякие симметричные фигуры равны.

Получить симметричные фигуры можно и не пользуясь перегибанием плоскости, а с помощью геометрического построения. Пусть требуется построить точку C', симметричную данной точке C относительно прямой AB. Опустим из точки C перпендикуляр CD на прямую AB и на продолжении его отложим отрезок $DC' = DC$. Если перегнём плоскость чертежа по AB, то точка C совместится с точкой C': точки C и C' симметричны (черт. 129).

Пусть требуется теперь построить отрезок $C'D'$, симметричный данному отрезку CD относительно прямой AB. Построим точки C'



Черт. 129

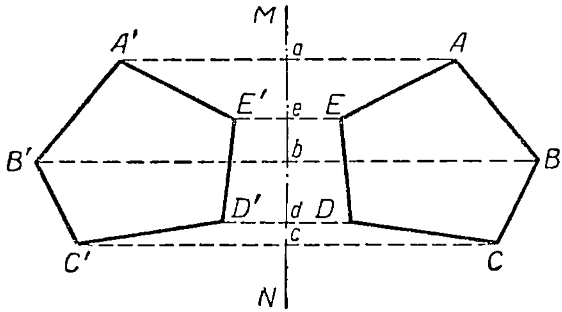


Черт. 130

и D', симметричные точкам C и D. Если перегнём плоскость чертежа по AB, то точки C и D совместятся соответственно с точками

C' и D' (черт. 130). Поэтому отрезки CD и $C'D'$ совместятся, они будут симметричны.

Построим теперь фигуру, симметричную данному многоугольнику $ABCDE$ относительно данной оси симметрии MN (черт. 131). Для решения этой задачи опустим перпендикуляры Aa, Bb, Cc, Dd и Ee на ось симметрии MN. Затем на продолжениях этих перпендикуляров отложим отрезки $aA' = Aa$, $bB' = Bb$, $cC' = Cc$; $dD' = Dd$ и $eE' = Ee$.



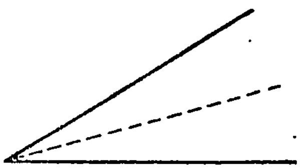
Черт. 131

Многоугольник $A'B'C'D'E'$ будет симметричным многоугольнику $ABCDE$. Действительно, если перегнуть чертёж по прямой MN, то соответствующие вершины обоих многоугольников совместятся, а значит, совместятся и сами многоугольники; это и доказывает, что многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'\ E'$ симметричны относительно прямой MN.

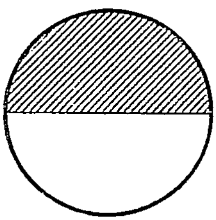
2. Фигуры, состоящие из симметричных частей.

Часто встречаются геометрические фигуры, которые какой-нибудь прямой разделяются на две симметричные части. Такие фигуры называются с и м м е т р и ч н ы м и.

Так, например, угол — фигура симметричная, и биссектриса угла является его осью симметрии, так как при перегибании по ней одна часть угла совмещается с другой (черт. 132).



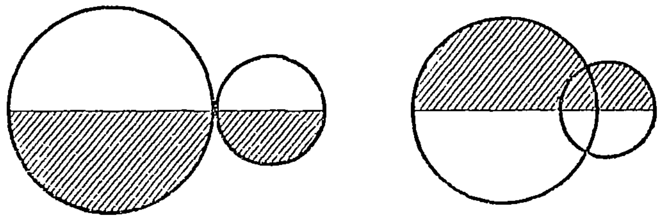
Черт. 132



Черт. 133

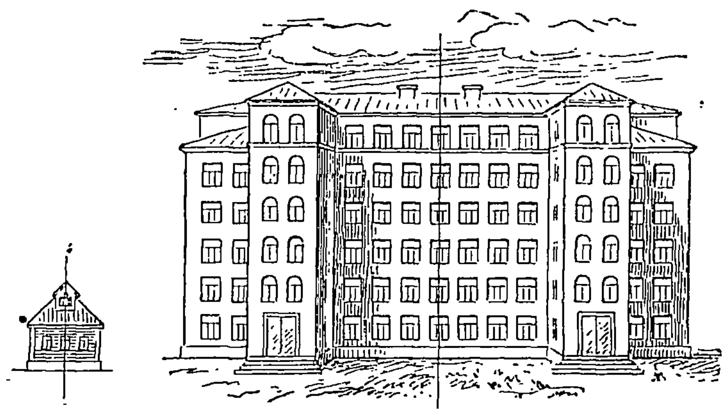
В круге осью симметрии является его диаметр, так как при перегибании по нему один полукруг совмещается с другим (черт. 133).

Точно так же симметричны фигуры на чертежах 134, *a*, *b*.

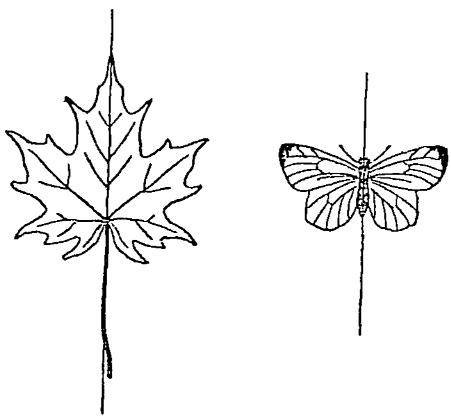


а) б)

Черт. 134



Черт. 135



Черт. 136

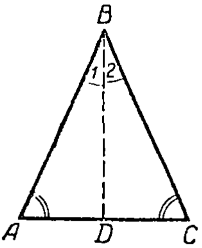
Симметричные фигуры часто встречаются в природе, строительстве, в украшениях. Изображения, помещённые на чертежах 135 и 136, симметричны.

Следует заметить, что симметричные фигуры совместить простым передвижением по плоскости можно лишь в некоторых случаях. Чтобы совместить симметричные фигуры, как правило, необходимо одну из них повернуть обратной стороной.

§ 18. СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА.

Построим равнобедренный треугольник ABC и проведём в нём биссектрису угла, заключённого между равными сторонами AB и CB. Равнобедренный треугольник разбился на два треугольника ABD и CBD (черт. 137).

Перегнём мысленно плоскость чертежа по биссектрисе BD так, чтобы правая часть её совпала с левой. Тогда сторона BC пойдёт по стороне BA, так как $\angle 1 = \angle 2$, и точка C совпадет с точкой A, так как $BC = BA$.



Черт. 137

Следовательно, при перегибании чертежа по BD треугольник BDC совместился с треугольником BDA, т. е. биссектриса BD является осью симметрии треугольника ABC.

Отрезки CD и DA совместились, т. е. сторона AC в точке D разделилась пополам.

Следовательно, BD будет не только биссектрисой треугольника ABC, но и его медианой.

Углы BDC и BDA совместились, следовательно, они равны. Но в то же время они смежные, поэтому каждый из них равен прямому углу. Значит, BD является высотой треугольника.

Углы C и A совместились, следовательно, они равны.

Отсюда: 1. ***Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии.***

2. ***Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника в то же время является его медианой и высотой.***

Так как из вершины треугольника можно провести только одну биссектрису, одну медиану и одну высоту, то медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является и биссектрисой, и высотой, точно так же и высота является и биссектрисой, и медианой.

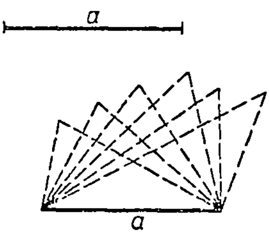
3. ***Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой.***

4. ***В равностороннем треугольнике все внутренние углы равны между собой.***

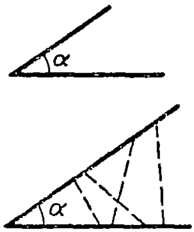
§ 19. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПО ОДНОМУ ИЛИ ДВУМ ЭЛЕМЕНТАМ.

Пусть требуется построить треугольник по данной стороне a. Так как об углах треугольника и о других его сторонах ничего не сказано, то можем построить сколько угодно различных треугольников, у которых одна сторона будет равна отрезку a (черт. 138).

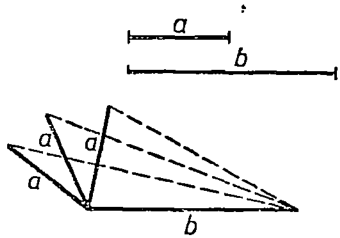
Пусть требуется построить треугольник по данному углу α. В этом случае также можно построить сколько угодно различных треугольников, имеющих данный угол (черт. 139).



Черт. 138

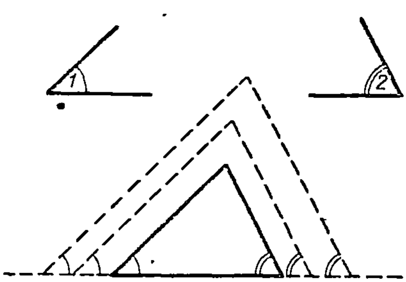


Черт. 139

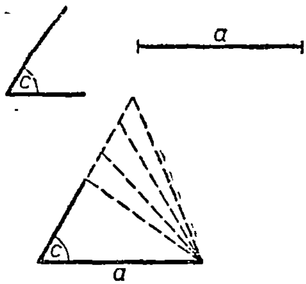


Черт. 140

Точно так же можно построить сколько угодно различных треугольников по двум сторонам, или по двум углам, или по углу и стороне (черт. 140, 141, 142).



Черт. 141



Черт. 142

Таким образом, если будут заданы только один или два элемента треугольника, то по этим элементам можно построить сколько угодно различных треугольников.

Перейдём теперь к построению треугольников не по одному и не по двум, а по трём его элементам.

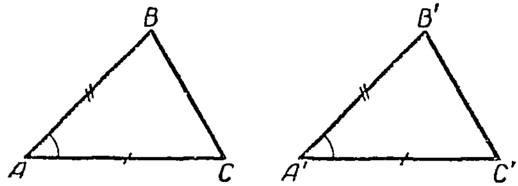
§ 20. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ ДАННЫМ ЕГО СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ. ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Пусть требуется построить треугольник, одна сторона которого равна, например, 35 *мм*, другая сторона равна 32 *мм* и угол, заключённый между этими сторонами, равен 46°.

Построим с помощью транспортира $\angle A$, равный 46°, и на его сторонах отложим отрезки AB и AC, соответственно равные 35 *мм* и 32 *мм* (черт. 143). Соединив точки B и C, получим искомый треугольник ABC. По тем же данным построим другой треугольник — $\triangle A'B'C'$.

Докажем, что эти треугольники равны между собой.

Для этого наложим $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы вершины A' и A совместились. Сторону $A'C'$ направим по стороне AC. Тогда точка C' совместится с точкой C, потому что $A'C' = AC$.



Черт. 143

Сторона $A'B'$ пойдёт по стороне AB, так как $\angle A' = \angle A$. Точка B' совместится с точкой B, так как $A'B' = AB$. Если точки C и C', B и B' совместились, то совместятся и стороны $B'C'$ и BC.

Треугольники ABC и $A'B'C'$ совпали, значит, они равны.

Мы можем по этим же данным построить сколько угодно треугольников, и все они будут равны между собой.

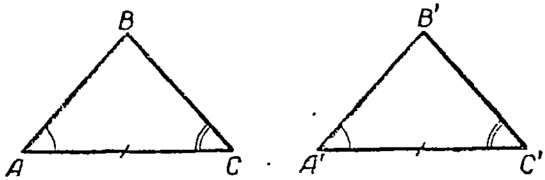
Таким образом, ***если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны между собой.***

Назовём это первым признаком равенства треугольников.

§ 21. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО СТОРОНЕ И ДВУМ ПРИЛЕЖАЩИМ К НЕЙ УГЛАМ. ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Пусть требуется построить треугольник, одна сторона которого равна, например, 40 *мм*, а углы, прилежащие к ней, равны 50° и 48°.

На произвольной прямой построим отрезок AC, равный 40 *мм*. Затем на этом отрезке при точке A построим угол, равный 50°, а при точке C — угол, равный 48° (черт. 144).



Черт. 144

Если мы достаточно продолжим стороны этих углов, то они пересекутся в некоторой точке B. Получим треугольник ABC.

По тем же данным построим другой треугольник — $\triangle A'B'C'$ и докажем, что эти треугольники будут равны между собой.

Для этого наложим $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ так, чтобы совместились равные стороны AC и $A'C'$. Тогда сторона $A'B'$ пойдёт по стороне AB, так как $\angle A' = \angle A$, и сторона $C'B'$ пойдёт по стороне CB, так как $\angle C' = \angle C$. Точка B' одновременно должна быть и на стороне AB, и на стороне CB, следовательно, она совместится с точкой B, так как две прямые могут пересечься только в одной точке.

Треугольники ABC и $A'B'C'$ совпали, значит, они равны.

По этим же данным можно построить сколько угодно треугольников, и все они будут равны между собой.

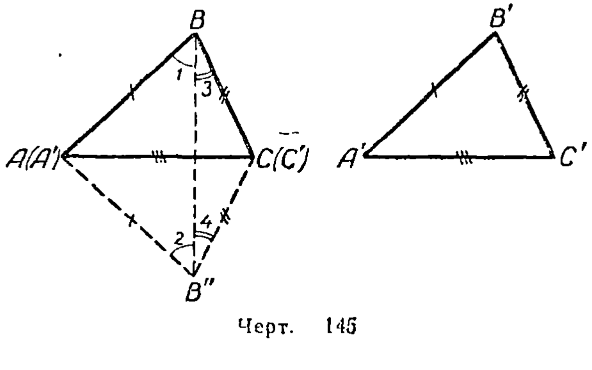
Таким образом, ***если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны между собой.***

Назовём это в т о р ы м признаком равенства треугольников.

§ 22. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ТРЁМ ДАННЫМ ЕГО СТОРОНАМ. ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Пусть требуется построить треугольник по трём его сторонам, например, сторона $a = 30$ *мм*, сторона $c = 40$ *мм* и сторона $b = 42$ *мм*. (Заданные размеры должны удовлетворять условию: сумма двух любых сторон треугольника больше третьей стороны.)

Сначала на произвольной прямой построим отрезок AC, равный данному отрезку b, т. е. 42 *мм*; мы сразу получим две вершины искомого треугольника — A и C (черт. 145).



Черт. 145

Так как длина второй и третьей сторон соответственно равна отрезкам c и a (в данном случае 40 *мм* и 30 *мм*), то третья вершина треугольника должна находиться как на дуге, описанной из центра A радиусом, равным 40 *мм*, так и на дуге, описанной из центра C радиусом, равным 30 *мм*. Следовательно, третьей вершиной треугольника будет точка пересечения этих дуг. Обозначив эту точку буквой B и соединив её отрезками с точками A и C, получим искомый треугольник ABC.

По тем же данным построим второй треугольник— $\triangle A'B'C'$ и докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Для этого приложим треугольник $A'B'C'$ к треугольнику ABC так, чтобы их равные стороны $A'C'$ и AC совместились (черт. 145), причём точка A' совпала бы с точкой A, точка C' — с точкой C. Тогда треугольник $A'B'C'$ примет положение $AB''C$. Сторона AB будет равна стороне AB'' и сторона BC — стороне $B''C$.

Соединив отрезком прямой точки B и B'', получим два равнобедренных треугольника BAB'' и BCB'', у которых $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 3 = \angle 4$, откуда $\angle B = \angle B''$. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle AB''C$, но тогда и $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

По этим же данным можно построить сколько угодно треугольников, и все они будут равны между собой.

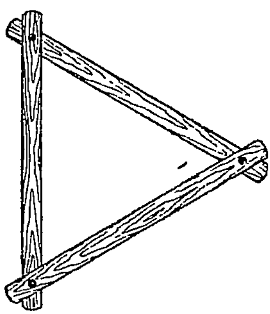
Мы доказали, что ***если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны между собой.***

Назовём это т р е т ь и м признаком равенства треугольников.

З а м е ч а н и я. 1. Во всех трёх признаках равенства треугольников в число трёх данных элементов входит хотя бы одна сторона треугольника.

2. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и, обратно, против равных углов лежат равные стороны.

§ 23. ЖЁСТКОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКА.

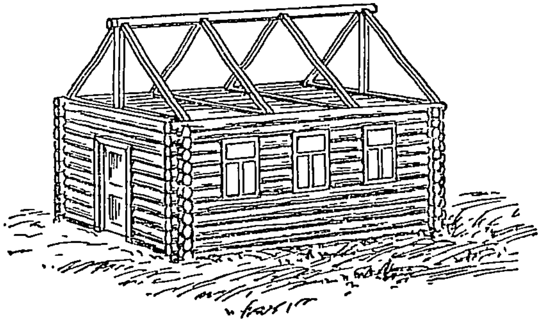


Черт. 146

Если возьмём три металлические или деревянные планки, закрепим их концы булавками или гвоздиками так, чтобы получить треугольник, то увидим, что нам не удастся изменить форму полученного треугольника (черт. 146).

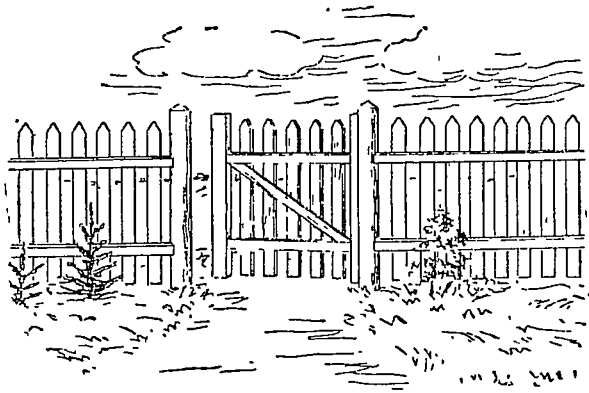
Треугольник — фигура ж ё с т к а я. Если заданы три его стороны, то форма треугольника уже не может измениться. Это вытекает из только что доказанного признака равенства треугольников.

Стропила зданий имеют вид треугольников. Это придаёт им крепость и устойчивость (черт. 147).



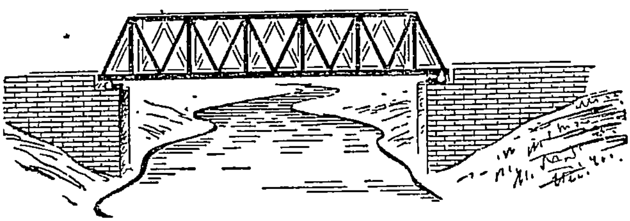
Черт. 147

При устройстве садовой калитки обязательно прибивают планку (доску), иногда две планки, чтобы получились треугольники. Это придаёт крепость калитке; иначе её скоро перекосит (черт. 148).

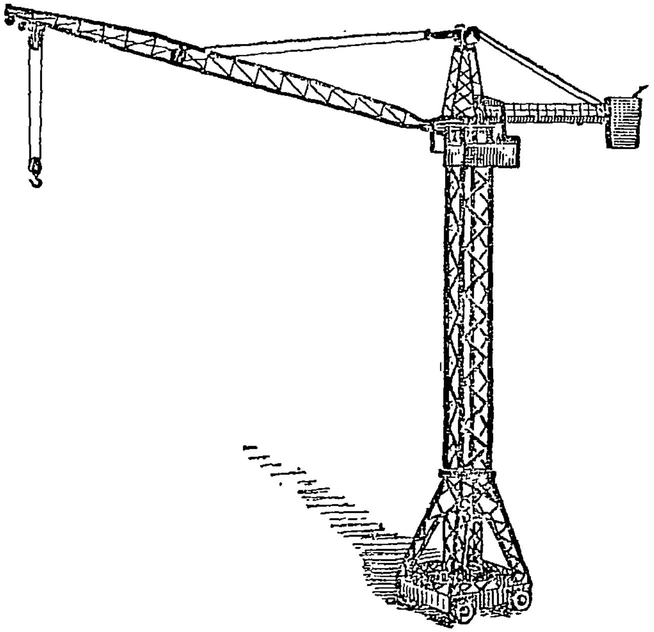


Черт. 148

На чертежах 149, 150 также показано, как пользуются на практике жёсткостью треугольника.



Черт. 149

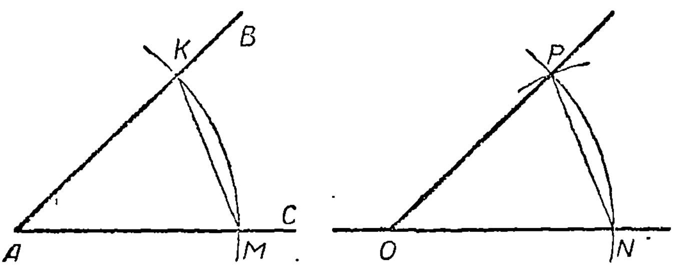


Черт. 150

§ 24. ПОСТРОЕНИЕ УГЛА, РАВНОГО ДАННОМУ.

Дан угол BAC (черт. 151), требуется с помощью циркуля и линейки построить угол, равный углу BAC.

Решение. Проведём прямую линию и обозначим на ней произвольную точку O. Из вершины A данного угла BAC как из центра произвольным радиусом опишем дугу так, чтобы она пересекла обе стороны данного угла. Обозначим точки пересечения бук-



Черт. 151

вами K и M. Потом тем же радиусом из точки O как из центра проведём дугу так, чтобы она пересекла взятую нами прямую. Обозначим точку пересечения буквой N. После этого возьмём циркулем расстояние KM и из точки N как из центра опишем дугу радиусом, равным расстоянию KM, так, чтобы она пересекла дугу, описанную из точки O, в какой-нибудь точке P.

Проведя прямую OP, получим угол PON, равный углу BAC. Чтобы убедиться в равенстве этих углов, проведём отрезки MK и NP, получим два треугольника KAM и PON, которые равны по 3-му признаку равенства треугольников.

Следовательно, $\angle PON = \angle BAC$, так как эти углы лежат в равных треугольниках против равных сторон.

§ 25. ЗНАЧЕНИЕ ПРИЗНАКОВ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

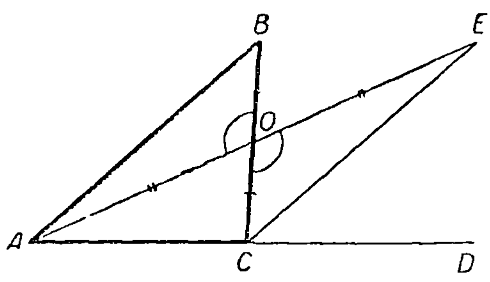
При изучении геометрии нам часто придётся отыскивать равные треугольники. Теоремы, изложенные в параграфах 20, 21, 22, дают три признака, на основании которых можно устанавливать равенство треугольников. Практическое значение этих признаков заключается в следующем: по определению треугольники называются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они совместились; однако выполнить наложение треугольников иногда бывает затруднительно, а иногда и невозможно; признаки равенства треугольников дают возможность заменить наложение треугольников измерением и сравнением некоторых его основных элементов — сторон и углов — и таким образом установить равенство треугольников.

§ 26. СВОЙСТВО ВНЕШНЕГО УГЛА ТРЕУГОЛЬНИКА.

Теорема. ***Внешний угол всякого треугольника больше каждого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним.***

Дано: $\angle BCD$ — внешний угол треугольника ABC.

Надо доказать, что $\angle BCD > \angle B$ и $\angle BCD > \angle A$ (черт. 152).



Черт. 152

Доказательство. Для доказательства выполним в первую очередь построение, в результате которого внешний угол BCD разобьётся на две части.

1. Проведём медиану AO треугольника ABC.
2. Продолжим её на отрезок OE, равный AO.
3. Проведём отрезок EC.

После этого рассмотрим треугольники AOB и COE. В этих треугольниках

$$\left.\begin{array}{l} AO = OE \\ BO = OC \end{array}\right\} \text{по построению.}$$

Углы AOB и COE равны, как вертикальные (§ 11).

Следовательно, треугольник AOB равен треугольнику COE (по двум сторонам и углу, заключённому между ними, т. е. по 1-му признаку равенства треугольников, § 20).

Из равенства треугольников следует, что $\angle B = \angle BCE$, так как они лежат в равных треугольниках против равных сторон AO и OE. Но угол BCE только часть внешнего угла BCD, поэтому весь внешний угол BCD больше внутреннего угла B. Таким же способом доказывается, что внешний угол BCD больше внутреннего угла A (в этом случае построение надо начать с проведения медианы треугольника ABC к стороне AC).

Из этой теоремы вытекают следствия, важные для доказательства некоторых теорем.

Следствие 1. ***В тупоугольном треугольнике только один угол тупой, остальные острые,*** так как внешний угол, смежный с тупым внутренним углом, — острый, поэтому каждый из остальных внутренних углов тоже острый.

Следствие 2. ***В прямоугольном треугольнике только один угол прямой, остальные острые,*** так как внешний угол, смежный с прямым внутренним углом, тоже прямой, поэтому каждый из остальных внутренних углов — острый.

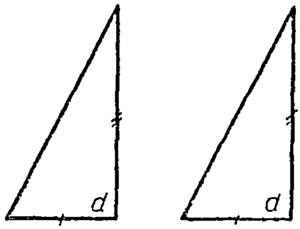
Следствие 3. ***Из точки, взятой вне прямой, можно провести к этой прямой только один перпендикуляр,*** так как, предположив, что из взятой точки проходит и второй перпендикуляр к данной прямой, мы получили бы треугольник, внешний угол которого равняется внутреннему углу, не смежному с ним, что противоречит доказанной теореме.

§ 27. РАВЕНСТВО ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

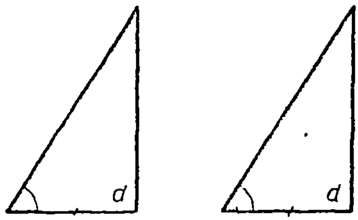
1. Первые два признака равенства прямоугольных треугольников.

Мы установили, что для равенства двух треугольников достаточно, чтобы три элемента одного треугольника были равны соответствующим элементам другого треугольника, при этом непременно в число этих элементов должна входить хотя бы одна сторона.

Так как все прямые углы равны между собой, то прямоугольные треугольники уже имеют по одному равному элементу, именно по равному прямому углу.



Черт 153



Черт. 154

Отсюда следует, что ***прямоугольные треугольники равны:***

1) ***если катеты одного треугольника соответственно равны катетам другого треугольника*** (черт. 153);

2) ***если катет и прилежащий острый угол одного треугольника соответственно равны катету и прилежащему острому углу другого треугольника*** (черт. 154).

Упражнения.

1. Можно ли построить треугольник по стороне и двум углам, если оба заданных угла будут прямые? оба тупые? один прямой, другой тупой?

2. Построить треугольник по трем его сторонам, если его стороны соответственно равны:

а) 6 *см*, 5 *см*, 7 *см*,

б) 5 *см*, 7 *см*, 8 *см*.

3. Можно ли построить треугольник, если стороны его будут соответственно равны:

а) 10 *см*, 6 *см*, 4 *см*;

б) 48 *мм*, 32 *мм*, 8 *мм*?

Если нельзя построить эти треугольники, то почему?

4. Построить прямоугольный треугольник с помощью циркуля и чертёжного треугольника по двум его катетам.

2. Две задачи на построение прямоугольных треугольников.

З а д а ч а 1. *Построить прямоугольный треугольник по следующим данным: гипотенуза* $c = 5{,}4$ *см*, $\angle A = 38°$.

Р е ш е н и е (черт. 155).

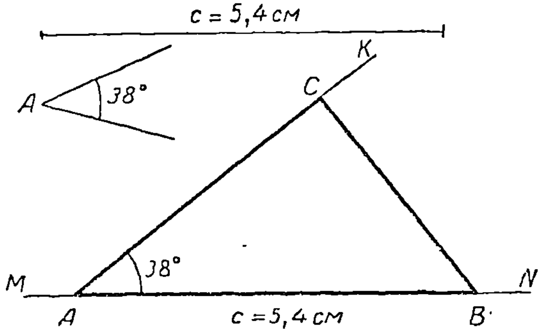
1. На прямой MN откладываем отрезок $AB = 5{,}4$ *см*.

2. Строим угол KAB, равный $38°$.

3. Из точки B опускаем с помощью чертёжного треугольника перпендикуляр BC на прямую AK.

Треугольник ABC отвечает условию задачи.

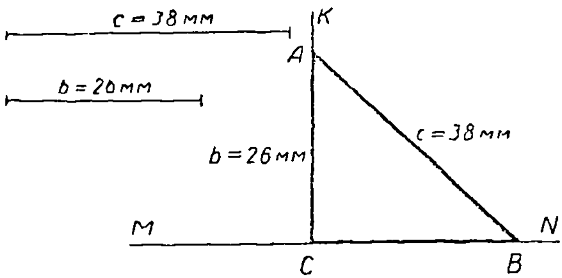
З а д а ч а 2. *Построить прямоугольный треугольник по следующим данным: гипотенуза* $c = 38$ *мм*, *катет* $b = 26$ *мм*.



Черт. 155

Решение (черт. 156).

1. *На произвольной прямой* MN берём точку C и проводим $CK \perp MN$.



Черт. 156

2. На прямой CK откладываем отрезок $CA = 26$ *мм*.

3. Из точки A как из центра радиусом, равным отрезку $c = 38$ *мм*, описываем дугу так, чтобы она пересекла прямую MN, например, в точке B.

4. Точки A и B соединяем отрезком.

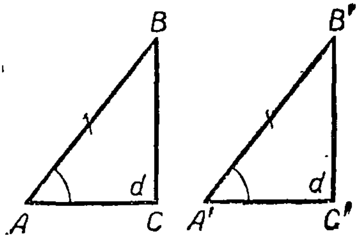
Треугольник ABC отвечает условию задачи.

Докажем теперь две теоремы, устанавливающие ещё два признака равенства прямоугольных треугольников.

3. Теорема о признаках равенства прямоугольных треугольников.

Теорема 1. ***Если гипотенуза и острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.***

Чтобы доказать эту теорему, построим два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$, у которых углы A и A' равны, гипотенузы AB и $A'B'$ также равны, а углы C и C' — прямые (черт. 157). Наложим треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы вершина A' совпала с вершиной A, гипотенуза $A'B'$ — с равной гипотенузой AB. Тогда вследствие равенства углов A и A' катет $A'C'$ пойдёт по катету AC; катет $B'C'$ совместится с катетом BC: оба они перпендикуляры, проведённые к одной прямой AC из одной точки B (§ 26, следствие 3). Значит, вершины C и C' совместятся.



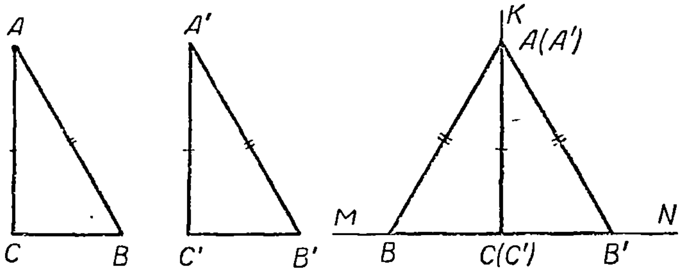
Черт. 157

Треугольник ABC совместится с треугольником $A'B'C'$. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Эта теорема даёт 3-й признак равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и острому углу).

Теорема 2. ***Если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого треугольника, то такие прямоугольные треугольники равны.***

Чтобы доказать это, построим два прямоугольных треугольника ABC и $A'B'C'$, у которых углы C и C' — прямые, катеты AC и $A'C'$ равны, гипотенузы AB и $A'B'$ также равны (черт. 158).



Черт. 158

Проведём прямую MN и отметим на ней точку C, из этой точки проведём перпендикуляр CK к прямой MN. Затем прямой угол треугольника ABC наложим на прямой угол KCM так, чтобы вершины их совместились и катет AC пошёл по лучу CK, тогда катет BC пойдёт по лучу CM. Прямой угол треугольника $A'B'C'$ наложим на прямой угол KCN так, чтобы вершины их совместились и катет $A'C'$ пошёл по лучу CK, тогда катет $C'B'$ пойдёт по лучу CN. Вершины A и A' совпадут вследствие равенства катетов AC и $A'C'$.

Треугольники ABC и $A'B'C'$ составят вместе равнобедренный треугольник BAB', в котором AC окажется высотой и биссектрисой а значит, и осью симметрии треугольника BAB' (§ 18). Из этого следует, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

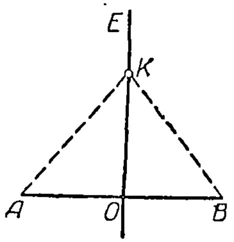
Эта теорема даёт 4-й признак равенства прямоугольных треугольников (по гипотенузе и катету).

4. Перпендикуляр к отрезку, проведённый через его середину.

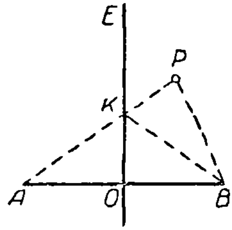
Теорема. ***Всякая точка, лежащая на перпендикуляре, проведённом к отрезку через его середину, одинаково удалена от концов этого отрезка*** (черт. 159).

Пусть прямая EO перпендикулярна к отрезку AB и $AO = OB$. Возьмём на EO произвольную точку K и докажем, что $AK = BK$. Прямоугольные треугольники AOK и BOK равны по двум катетам: $AO = OB$ по условию, KO — общая сторона. Следовательно, $AK = KB$. Так как точка K взята произвольно, то и всякая другая точка перпендикуляра EO одинаково удалена от концов отрезка AB.

Если же мы возьмём какую-нибудь точку P на плоскости, не находящуюся на перпендикуляре EO, то отрезки PA и PB не будут



Черт. 159



Черт. 160

равны (черт. 160). Соединим точку K (точку пересечения EO и AP) с точкой B. $BK + KP > PB$, но по доказанному ранее $AK = BK$, поэтому $AK + KP > PB$, или $AP > PB$, т. е. всякая точка, не находящаяся на перпендикуляре EO, неодинаково удалена от концов отрезка AB.

Упражнения.

1. Построить равносторонний треугольник по данной его стороне.
2. В следующих задачах дополнить условие недостающими данными, чтобы решение каждой задачи было единственным:
   а) Построить равнобедренный треугольник по данному его основанию.
   б) Построить прямоугольный треугольник по данному его катету.
   в) Построить прямоугольный треугольник по данной его гипотенузе.

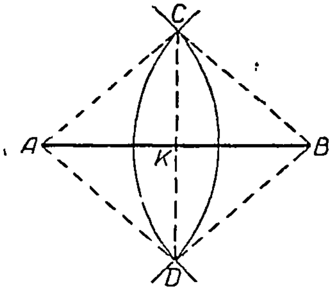
§ 28. ПОСТРОЕНИЯ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ.

До сих пор при решении задач на построение мы пользовались циркулем, линейкой, чертёжным треугольником и транспортиром. Решим теперь ряд задач на построение с помощью только двух инструментов — циркуля и линейки.

Задача. *Разделить данный отрезок пополам.*

Дан отрезок AB, требуется разделить его пополам.

Решение. Радиусом, большим половины отрезка AB, опишем из точек A и B как из центров пересекающиеся дуги (черт. 161). Через точки пересечения этих дуг проведём прямую CD, которая пересечёт отрезок AB в некоторой точке K и разделит его этой точкой пополам: $AK = KB$.

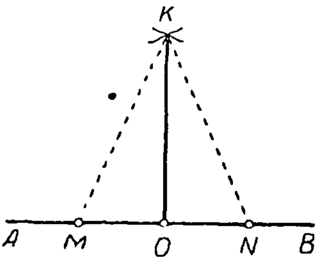


Черт. 161

Докажем это. Соединим точки A и B с точками C и D. $\triangle CAD = \triangle CBD$, так как по построению $AC = CB$, $AD = BD$, CD — общая сторона.

Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ACK = \angle BCK$, т. е. CK является биссектрисой угла при вершине равнобедренного треугольника ACB. А биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является и его медианой, т. е. прямая CD разделила отрезок AB пополам.

Задача 2. *Провести перпендикуляр к данной прямой AB через точку O, находящуюся на этой прямой.*



Черт. 162

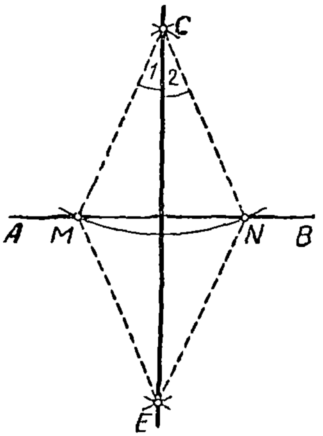
Дана прямая AB и точка O, лежащая на этой прямой. Требуется провести перпендикуляр к прямой AB, проходящий через точку O.

Решение. Отложим на прямой AB от точки O два равных отрезка OM и ON (черт. 162). Из точек M и N как из центров одним и тем же радиусом, большим OM, опишем две дуги. Точку их пересечения K соединим с точкой O. KO — медиана в равнобедренном треугольнике MKN, следовательно, $KO \perp AB$ (§ 18).

Задача 3. *Провести перпендикуляр к данной прямой AB через точку C, находящуюся вне этой прямой.*

Даны прямая AB и точка C вне этой прямой, требуется провести перпендикуляр к прямой AB, проходящий через точку C.

Решение. Из точки C как из центра опишем дугу таким радиусом, чтобы она пересекла прямую AB, например, в точках M и N (черт. 163). Из точек M и N как из центров одним и тем же радиусом, большим половины MN, опишем дуги. Точку их пересечения E соединим с точкой C и с точками M и N. Треугольники CME и CNE равны по трём сторонам. Значит, $\angle 1 = \angle 2$ и CE является биссектрисой угла C в равнобедренном треугольнике MCN, а следовательно, и перпендикуляром к прямой AB (§ 18).



Черт. 163

§ 29. ПОНЯТИЕ О ТЕОРЕМЕ И АКСИОМЕ

1. Понятие о теореме.

В предыдущих параграфах путём рассуждений мы установили, или, как говорят, доказали, ряд свойств различных геометрических фигур.

Например:

Сумма двух смежных углов равна $2d$ (§ 11).

Вертикальные углы равны между собой (§ 11).

Если в одном и том же круге центральные углы равны, то равны и соответствующие им дуги (§ 13).

Такие математические предложения, в правильности которых мы убеждаемся путём рассуждения (доказательств), мы называли **теоремами**.

Каждая теорема состоит из двух частей: из условия и заключения. Условие обыкновенно начинается со слова «если», а заключение — со слова «то». Условие — то, что дано; заключение — то, что надо доказать.

Например:

	Условие	Заключение
1	Если два угла смежные,	то сумма их равна $2d$.
2	Если два угла вертикальные,	то они равны между собой.
3	Если в одном и том же круге центральные углы равны,	то равны и соответствующие им дуги.
4	Если каждое слагаемое делится на какое-нибудь число,	то и сумма этих слагаемых разделится на это число
5	Если сумма цифр какого-нибудь числа делится на 9,	то и само это число разделится на 9.

Последние две теоремы (4-я и 5-я) известны нам из арифметики. Значит, и там мы уже встречались с теоремами.

2. Теоремы прямая и обратная.

Если в теореме условие сделать заключением, а заключение—условием, то первая теорема будет называться **прямой**, а вторая — **обратной**, а обе теоремы вместе — **взаимно- обратными**.

	Прямая теорема	Обратная теорема
1	Если в одном и том же круге центральные углы равны, то равны и соответствующие им дуги.	Если в одном и том же круге дуги равны, то равны и соответствующие им центральные углы.
2	Если сумма цифр какого-нибудь числа делится на 9, то и само это число разделится на 9.	Если число делится на 9, то и сумма цифр этого числа делится на 9.
3	Если два угла смежные, то сумма их равна $2d$.	Если сумма двух углов равна $2d$, то они смежные (?).
4	Если два угла вертикальные, то они равны между собой.	Если два угла равны между собой, то они вертикальные (?).
5	Если каждое слагаемое делится на какое-нибудь число, то и сумма этих слагаемых делится на это число.	Если сумма нескольких слагаемых делится на какое-нибудь число, то и каждое слагаемое делится на это число (?).

Если верна прямая теорема, то это еще не значит, что верна и обратная ей теорема.

В приведенных примерах для 1-й и 2-й теорем обратные теоремы верны. Что же касается теорем 3-й, 4-й и 5-й, то здесь обратные теоремы не верны.

В самом деле, можно иметь два угла, сумма которых равна $2d$, но они могут быть не смежными.

Если есть два равных угла, то это не значит ещё, что они обязательно вертикальные.

Сумма двух или нескольких слагаемых может делиться, например, на 10, но это не значит, что каждое из этих слагаемых делится на 10.

Например, сумма 71 и 19 делится на 10 ($90 : 10 = 9$), но ни 71, ни 19 на 10 не делятся.

Отсюда следует сделать такой вывод: если доказана справедливость какой-нибудь теоремы, то это ещё не значит, что справедлива и обратная теорема. Она так же нуждается в доказательстве, как и прямая теорема.

3. Понятие об аксиоме.

Некоторые свойства геометрических фигур принимают без доказательств.

Например:

Через всякие две точки можно провести прямую линию, и притом только одну (§ 3).

Отрезок прямой короче всякой другой линии, соединяющей его концы (§ 6).

Такие математические предложения, которые принимаются без доказательств, называются **аксиомами**.

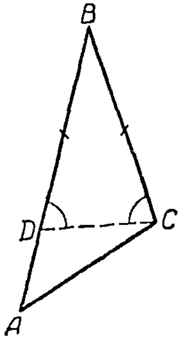
Упражнение.

Сформулировать две теоремы, обратные теоремам: 1) «Если треугольник равнобедренный, то биссектриса угла при вершине совпадает с его высотой»; 2) «Если треугольник равнобедренный, то медиана, проведённая к основанию, совпадает с его высотой» — и доказать их справедливость.

§ 30. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Теорема 1. ***Против большей стороны в треугольнике лежит и больший угол.***

Пусть в $\triangle ABC$ сторона AB больше стороны BC. Докажем, что угол C, лежащий против большей стороны AB, больше угла A, лежащего против меньшей стороны BC (черт. 164).



Черт. 164

Отложим на стороне AB от точки B отрезок BD, равный стороне BC, и соединим отрезком точки D и C.

Треугольник DBC равнобедренный.

Угол BDC равен углу BCD, так как они лежат против равных сторон в треугольнике.

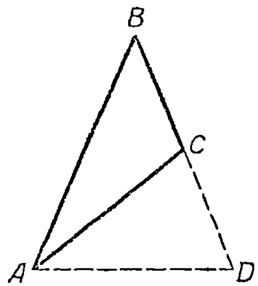
Угол BDC — внешний угол треугольника ADC, поэтому он больше угла A.

Так как $\angle BCD = \angle BDC$, то и угол BCD больше угла A: $\angle BCD > \angle A$. Но угол BCD составляет только часть всего угла C, поэтому угол C будет и подавно больше угла A.

Доказать самостоятельно ту же теорему по чертежу 165, когда $BD = AB$.

В § 18 мы доказали, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, т. е. в треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Докажем теперь обратные теоремы.

Теорема 2. ***Против равных углов в треугольнике лежат и равные стороны.***



Черт. 165

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$ (черт. 166). Докажем, что $AB = BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

Между сторонами AB и BC может быть только одно из трёх следующих соотношений:

1) $AB > BC$;
2) $AB < BC$;
3) $AB = BC$.

Если бы сторона AB была больше BC, то угол C был бы больше угла A, но это противоречит условию теоремы, следовательно, AB не может быть больше BC.

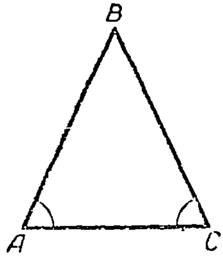
Точно так же AB не может быть меньше BC, так как в этом случае угол C был бы меньше угла A.

Следовательно, возможен только третий случай, т. е.

$$AB = BC.$$

Итак, мы доказали: против равных углов в треугольнике лежат и равные стороны.

Теорема 3. ***Против большего угла в треугольнике лежит бо́льшая сторона.***



Черт. 166

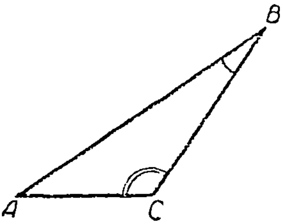
Пусть в треугольнике ABC (черт. 167) $\angle C > \angle B$.

Докажем, что $AB > AC$.

Здесь также может быть одно из трёх следующих соотношений:

1) $AB = AC$;
2) $AB < AC$;
3) $AB > AC$.

Если бы сторона AB была равна стороне AC, то $\angle C$ был бы равен $\angle B$. Но это противоречит условию теоремы. Значит, AB не может равняться AC.



Черт. 167

Точно так же AB не может быть меньше AC, так как в этом случае угол C был бы меньше угла B, что также противоречит данному условию.

Следовательно, возможен только один случай, а именно:

$$AB > AC.$$

Мы доказали: против большего угла в треугольнике лежит и бо́льшая сторона.

Следствие. ***В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше любого из его катетов.***

§ 31. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ К ПРЯМОЙ.

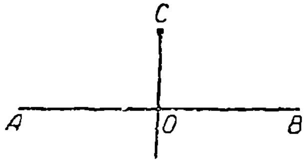
1. Проекция отрезка на прямую.

Если через какую-нибудь точку, взятую вне прямой, провести прямую, перпендикулярную к ней, то отрезок от данной точки до прямой для краткости называют одним словом перпендикуляр.

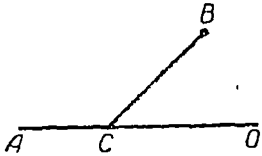
Отрезок CO — перпендикуляр к прямой AB. Точка O называется основанием перпендикуляра CO (черт. 168).

Если прямая, проведённая через данную точку, пересекает другую прямую, но не перпендикулярна к ней, то отрезок её от данной точки до точки пересечения с другой прямой называют наклонной к этой прямой.

Отрезок BC — наклонная к прямой AO. Точка C называется **основанием** наклонной (черт. 169).

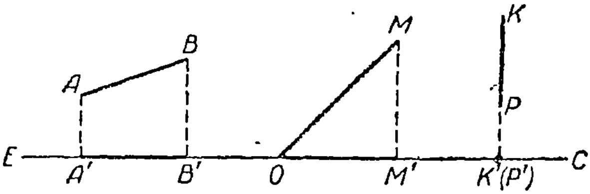


Черт. 168



Черт. 169

Если из концов какого-нибудь отрезка опустим перпендикуляры на произвольную прямую, то отрезок прямой, заключённый между основаниями перпендикуляров, называется **проекцией отрезка** на эту прямую.



Черт. 170

Отрезок $A'B'$ — проекция отрезка AB на EC. Отрезок OM' также называется проекцией отрезка OM на EC.

Проекцией отрезка KP, перпендикулярного к EC, будет точка K' (черт. 170).

2. Свойства перпендикуляра и наклонных.

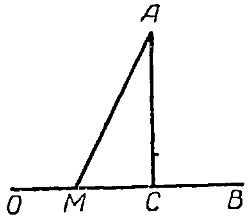
Теорема 1. ***Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки к прямой, меньше всякой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой.***

Отрезок AC (черт. 171) является перпендикуляром к прямой OB, а AM — одна из наклонных, проведённых из точки A к прямой OB.

Требуется доказать, что $AM > AC$.

В $\triangle MAC$ отрезок AM является гипотенузой, а гипотенуза больше каждого из катетов этого треугольника (§ 30). Следовательно, $AM > AC$. Так как наклонная AM взята нами произвольно, то можно утверждать, что всякая наклонная к прямой больше перпендикуляра к этой прямой (а перпендикуляр короче всякой наклонной), если они проведены к ней из одной и той же точки.

Верно и обратное утверждение, а именно: если отрезок AC (черт. 171) меньше всякого другого отрезка, соединяющего точку A с любой точкой прямой OB, то он является перпендикуляром к OB. В самом деле, отрезок AC не может быть наклонной к OB, так как тогда он не был бы самым коротким из отрезков, соединяющих точку A с точками прямой OB. Значит, он может быть только перпендикуляром к OB.

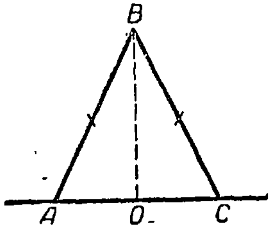


Черт. 171

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, принимается за р а с с т о я н и е от данной точки до этой прямой.

Т е о р е м а 2. ***Если две наклонные, проведённые к прямой из одной и той же точки, равны, то равны и их проекции.***

Пусть BA и BC — наклонные, проведённые из точки B к прямой AC (черт. 172), причём $AB = BC$. Нужно доказать, что равны и их проекции.



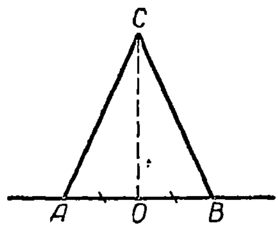
Черт. 172

Для доказательства опустим из точки B перпендикуляр BO на AC. Тогда AO и OC будут проекции наклонных AB и BC на прямую AC. Треугольник ABC равнобедренный по условию теоремы. BO — высота этого треугольника. Но высота в равнобедренном треугольнике, проведённая к основанию, является в то же время и медианой этого треугольника (§ 18).

Поэтому $AO = OC$.

Т е о р е м а 3 (обратная). ***Если две наклонные, проведённые к прямой из одной и той же точки, имеют равные проекции, то они равны между собой.***

Пусть AC и CB — наклонные к прямой AB (черт. 173). $CO \perp AB$ и $AO = OB$.



Черт. 173

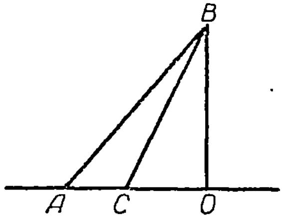
Требуется доказать, что $AC = BC$.

В прямоугольных треугольниках AOC и BOC катеты AO и OB равны. CO — общий катет этих треугольников. Следовательно, $\triangle AOC = \triangle BOC$. Из равенства треугольников вытекает, что $AC = BC$.

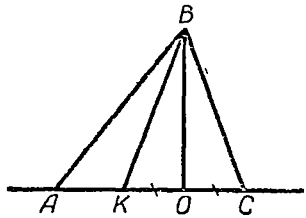
Т е о р е м а 4. ***Если из одной и той же точки проведены к прямой две наклонные, то та из них больше, которая имеет бо́льшую проекцию на эту прямую.***

Пусть AB и BC — наклонные к прямой AO; $BO \perp AO$ и $AO > CO$. Требуется доказать, что $AB > BC$.

1) Наклонные расположены по одну сторону перпендикуляра.



Черт. 174



Черт. 175

Угол ACB внешний по отношению к прямоугольному треугольнику COB (черт. 174), а поэтому $\angle ACB > \angle COB$, т. е. он тупой. Отсюда следует, что $AB > CB$.

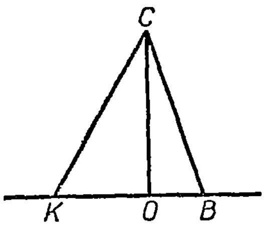
2) Наклонные расположены по обе стороны перпендикуляра.

Для доказательства отложим на AO от точки O отрезок $OK = OC$ и соединим точку K с точкой B (черт. 175). Тогда по теореме 3 имеем: $BK = BC$, по $AB > BK$, следовательно, $AB > BC$, т. е. теорема справедлива и в этом случае.

Теорема 5 (обратная). ***Если из одной и той же точки проведены к прямой две наклонные, то бо́льшая наклонная имеет и бо́льшую проекцию на эту прямую.***

Пусть KC и BC — наклонные к прямой KB (черт. 176), $CO \perp KB$ и $KC > BC$. Требуется доказать, что $KO > OB$.

Между отрезками KO и OB может быть только одно из трёх соотношений: 1) $KO < OB$, 2) $KO = OB$, 3) $KO > OB$.



Черт. 176

KO не может быть меньше OB, так как тогда по теореме 4 наклонная KC была бы меньше наклонной BC, а это противоречит условию теоремы.

Точно так же KO не может равняться OB, так как в этом случае по теореме 3 $KC = BC$, что также противоречит условию теоремы.

Следовательно, остаётся верным только последнее соотношение, а именно, что $KO > OB$.

§ 32. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОКРУЖНОСТИ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ОТРЕЗКУ, ПРОВЕДЕННОМУ ЧЕРЕЗ ЕГО СЕРЕДИНУ, И БИССЕКТРИСЫ УГЛА.

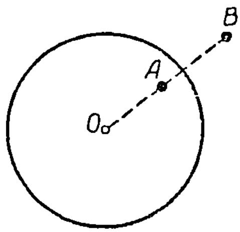
1. Окружность. Все точки окружности обладают одним и тем же свойством, а именно: все они находятся на одном и том же расстоянии от центра, равном радиусу данной окружности.

Любая точка плоскости, не лежащая на данной окружности, этим свойством уже не обладает. Расстояние от центра до всякой точки, лежащей внутри данной окружности, меньше радиуса этой окружности (черт. 177):

$$OA < R.$$

Расстояние от центра до всякой точки, лежащей вне этой окружности, больше радиуса:

$$OB > R.$$



Черт. 177

Фигура (например, линия), все точки которой обладают одним и тем же свойством, а ни одна из других точек плоскости этим свойством не обладает, называется геометрическим местом точек, обладающих данным свойством.

Окружность можно теперь определить так: геометрическое место точек плоскости, одинаково удалённых от одной точки этой плоскости, называется окружностью.

2. Перпендикуляр к отрезку, проведённый через его середину. В § 27 было доказано, что всякая точка, лежащая на перпендикуляре, проведённом к отрезку через его середину, одинаково удалена от концов этого отрезка (см. черт. 159); всякая же точка плоскости, не находящаяся на этом перпендикуляре, этим свойством не обладает (см. черт. 160). Поэтому можно сказать, что перпендикуляр, проведённый к отрезку через его середину, есть геометрическое место точек, каждая из которых одинаково удалена от концов этого отрезка.

3. Биссектриса угла. Все точки биссектрисы угла обладают одним общим свойством: каждая из них находится на одинаковом расстоянии от сторон этого угла.

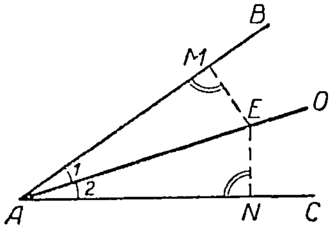
Пусть луч AO является биссектрисой угла BAC (черт. 178). Возьмём какую-нибудь произвольную точку E на биссектрисе AO и опустим из неё на стороны угла перпендикуляры: $EN \perp AC$ и $EM \perp AB$. Мы получим два треугольника AEM и AEN.

Треугольники эти прямоугольные по построению, сторона AE является общей, а $\angle 1 = \angle 2$ по условию. Отсюда следует, что $\triangle AME = \triangle ANE$ (§ 27, п. 3) и $EM = EN$, т. е. точка E одинаково удалена от сторон угла BAC. Так как точка E была взята на биссектрисе произвольно, то можно утверждать, что и всякая точка биссектрисы AO одинаково удалена от сторон $\angle BAC$.

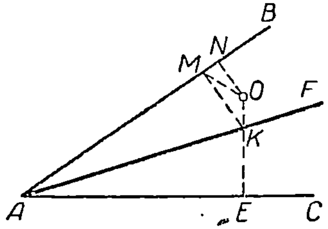
Всякая же точка O, находящаяся не на биссектрисе AF (черт. 179), неодинаково удалена от сторон этого угла.

Опустим из точки O перпендикуляры ON и OE на AB и AC и докажем, что ON не равняется OE.

Из точки K пересечения биссектрисы AF и перпендикуляра OE опустим перпендикуляр KM на AB. По доказанному ранее $KM = KE$, кроме того, $MK + KO > MO$, тогда и $EK + KO > MO$, т. е. $OE > OM$. Но $MO > NO$, так как MO — гипотенуза, а NO — катет в треугольнике MON. Поэтому OE и подавно больше ON.



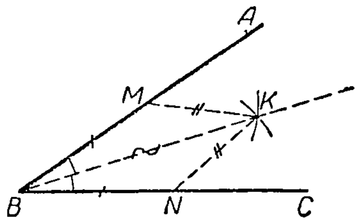
Черт. 178



Черт. 179

Следовательно, всякая точка, не лежащая на биссектрисе угла, неодинаково удалена от сторон этого угла.

Биссектриса угла есть **г е о м е т р и ч е с к о е м е с т о т о ч е к**, каждая из которых одинаково удалена от сторон этого угла. Она является осью симметрии угла.



Черт. 180

4. З а д а ч а. *Построить биссектрису угла, т. е. разделить угол пополам.*

Дан угол ABC, требуется разделить его пополам.

На сторонах данного угла ABC (черт. 180) от его вершины B отложим равные отрезки BM и BN. Из точек M и N одним и тем же радиусом описываем дуги. Точку K пересечения этих дуг соединим с точкой B. Луч BK будет биссектрисой данного угла ABC.

Чтобы доказать это, соединим точку K с точками M и N и сравним треугольники BMK и BNK:

$$\left.\begin{aligned} BM &= BN \\ MK &= NK \end{aligned}\right\} \text{ по построению.}$$

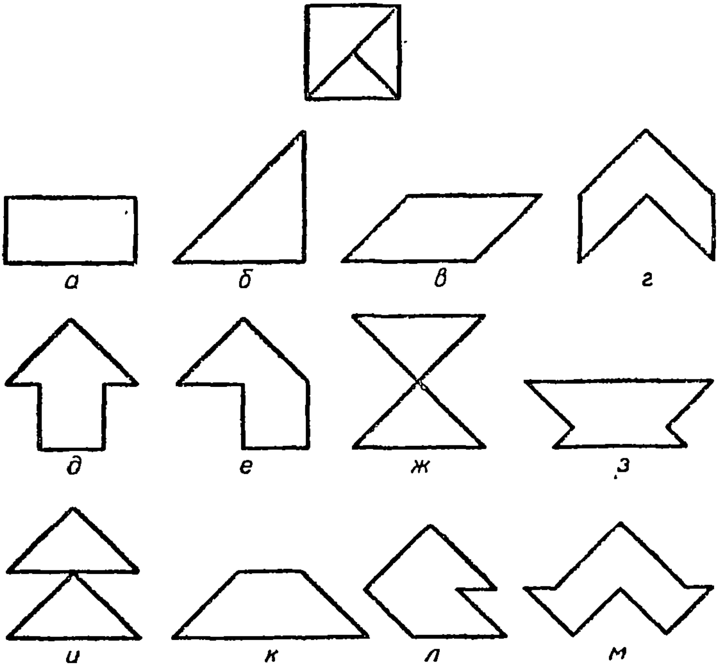
BK — общая сторона.

Следовательно, $\triangle BMK = \triangle BNK$.

Отсюда $\angle MBK = \angle NBK$, так как они лежат против равных сторон в двух равных треугольниках, т. е. BK служит биссектрисой угла ABC.

Упражнения.

1. Вырезать из плотной бумаги квадрат. Разрезать его на три треугольника, как показано на чертеже 181, и из полученных треугольников составить фигуры, изображённые на чертежах *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*, *з*, *и*, *к*, *л*, *м*.



Черт. 181

2. Доказать, что высоты, проведённые из вершин углов при основании равнобедренного треугольника на его боковые стороны, равны.

3. Доказать, что медианы, проведённые к равным сторонам равнобедренного треугольника, равны.

ГЛАВА III.

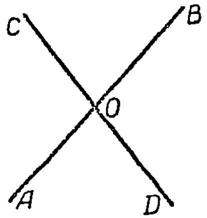
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

§ 33. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ.

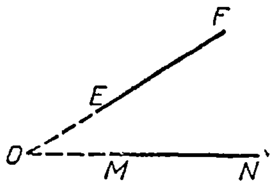
1. Определение параллельных прямых.

Прямые линии называются пересекающимися, если они имеют только одну общую точку.

Так, например, прямые AB и CD имеют только одну общую



Черт. 182

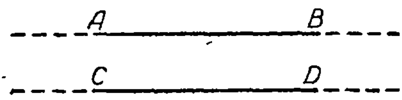


Черт. 183

точку O; эти прямые пересекающиеся. Прямые EF и MN также пересекающиеся (черт. 182, 183).

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие ни одной общей точки, называются параллельными (черт. 184).

Параллельность прямых обозначается знаком $\parallel$. Если прямые AB и CD параллельны, то пишут: $AB \parallel CD$.



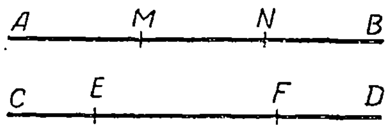
Черт. 184

Представление о параллельных прямых дают нам линии в разлинованных ученических тетрадях (в линейку и в клетку), противоположные края листа бумаги, тетради, стола, переплёты оконных рам.

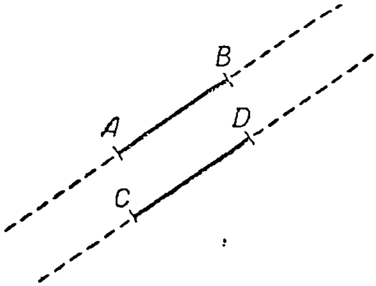
2. Параллельные отрезки.

Если два отрезка расположены на параллельных прямых линиях, то эти отрезки также называются параллельными. На чертеже 185 $AB \parallel CD$, отрезки MN и EF, расположенные на них, будут параллельными.

Точно так же называются параллельными два отрезка, если при неограниченном продолжении их образуются параллельные прямые (черт. 186).



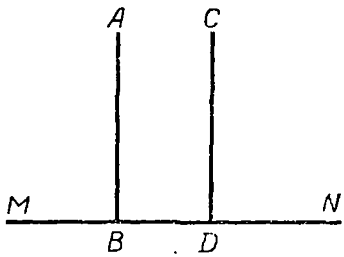
Черт. 185



Черт. 186

3. Свойство двух перпендикуляров к одной и той же прямой.

Теорема. ***Если две прямые AB и CD перпендикулярны к одной и той же прямой MN*** (черт. 187), ***то они параллельны.***

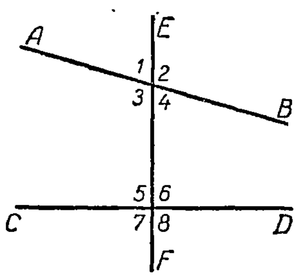


Черт. 187

В самом деле, если бы AB и CD были не параллельны, т. е. имели бы общую точку, например точку O, то тогда из одной и той же точки O на прямую MN было бы опущено два перпендикуляра, а этого быть не может (§ 26).

§ 34. УГЛЫ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ И СЕКУЩЕЙ.

Если две прямые AB и CD пересечём третьей прямой EF (черт. 188), то получим восемь углов (не считая развёрнутых), из них четыре угла расположены вокруг одной точки пересечения этих прямых и четыре угла — вокруг другой точки пересечения.



Черт. 188

Прямая EF, пересекающая обе прямые AB и CD, называется их секущей.

Четыре угла, расположенные между прямыми AB и CD, т. е. углы 3, 4, 5, 6, называются внутренними углами, а углы 1, 2, 7, 8 — внешними.

Эти восемь углов можно различным образом объединить парами.

В зависимости от их положения относительно прямых и секущей этим парам углов дают различные названия.

Углы 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**.

Углы 3 и 6, 4 и 5 называются **внутренними накрест лежащими**.

Углы 1 и 8, 2 и 7 называются **внешними накрест лежащими**.

Углы 3 и 5, 4 и 6 называются **внутренними односторонними**.

Углы 1 и 7, 2 и 8 называются **внешними односторонними**.

§ 35. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ДВУХ ПРЯМЫХ.

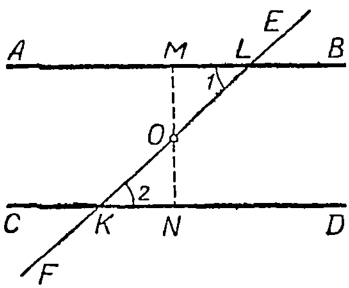
Теорема о том, что два перпендикуляра к одной прямой параллельны (§ 33), даёт признак параллельности двух прямых. Можно вывести более общие признаки параллельности двух прямых.

1. Первый признак параллельности.

Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.

Пусть прямые AB и CD пересечены прямой EF и $\angle 1 = \angle 2$. Возьмём точку O — середину отрезка KL секущей EF (черт. 189).

Опустим из точки O перпендикуляр OM на прямую AB и продолжим его до пересечения с прямой CD, $AB \perp MN$. Докажем, что и $CD \perp MN$. Для этого рассмотрим два треугольника: MOL и NOK. Эти треугольники равны между собой. В самом деле, $\angle 1 = \angle 2$ по условию теоремы; $OK = OL$ по построению; $\angle MOL = \angle NOK$, как вертикальные углы. Таким образом, сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника; следовательно, $\triangle MOL = \triangle NOK$, а отсюда и $\angle LMO = \angle KNO$, но $\angle LMO$ прямой, значит, и $\angle KNO$ тоже прямой.



Черт. 189

Таким образом, прямые AB и CD перпендикулярны к одной и той же прямой MN, следовательно, они параллельны (§ 33), что и требовалось доказать.

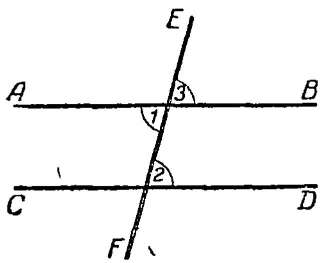
Примечание. Пересечение прямых MO и CD может быть установлено путём поворота треугольника MOL вокруг точки O на 180°.

2. Второй признак параллельности.

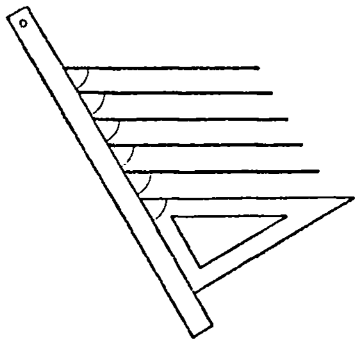
Посмотрим, будут ли параллельны прямые AB и CD, если при пересечении их третьей прямой EF равны соответственные углы.

Пусть какие-нибудь соответственные углы равны, например $\angle 3 = \angle 2$ (черт. 190). $\angle 3 = \angle 1$, как углы вертикальные; значит, $\angle 2$ будет равен $\angle 1$. Но углы 2 и 1 — внутренние накрест лежащие углы, а мы уже знаем, что если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны. Следовательно, $AB \parallel CD$.

Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то эти две прямые параллельны.



Черт. 190


Черт. 191

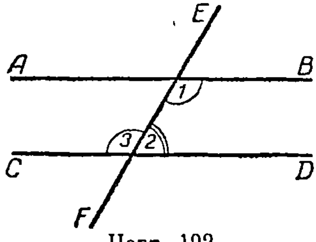
На этом свойстве основано построение параллельных прямых при помощи линейки и чертёжного треугольника.

Выполняется это следующим образом.

Приложим треугольник к линейке так, как это показано на чертеже 191. Будем передвигать треугольник так, чтобы одна его сторона скользила по линейке, а по какой-либо другой стороне треугольника проведём несколько прямых. Эти прямые будут параллельны.

3. Третий признак параллельности.

Пусть нам известно, что при пересечении двух прямых AB и CD третьей прямой сумма каких-нибудь внутренних односторонних углов равна $2d$ (или 180°). Будут ли в этом случае прямые AB и CD параллельны (черт. 192)?



Черт. 192

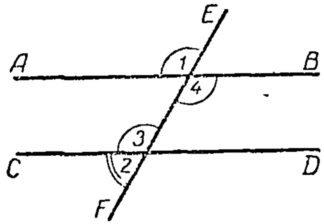
Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ — внутренние односторонние углы и в сумме составляют $2d$. Но $\angle 3 + \angle 2 = 2d$, как углы смежные. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2$.

Отсюда $\angle 1 = \angle 3$, а эти углы внутренние накрест лежащие. Следовательно, $AB \parallel CD$.

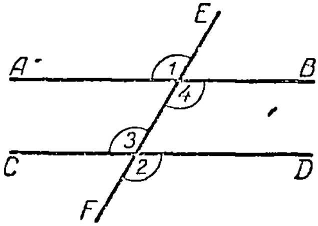
Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов равна 2d, то эти две прямые параллельны.

Упражнение.

Доказать, что прямые параллельны: а) если внешние накрест лежащие углы равны (черт. 193); б) если сумма внешних односторонних углов равняется $2d$ (черт. 194).



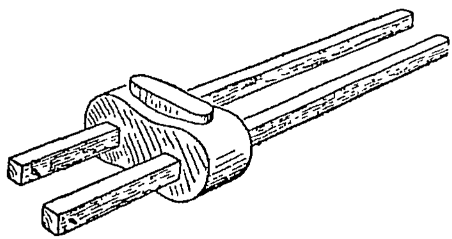
Черт. 193



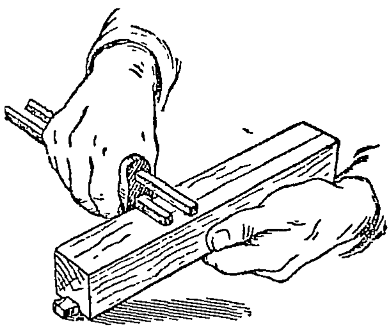
Черт. 194

§ 36. РЕЙСМАС. МАЛКА.

В столярной мастерской применяется прибор, называемый р е й с м а с о м. Он употребляется для того, чтобы края изготовляемого бруска были параллельны. Устройство рейсмаса и работа с ним показаны на чертежах 195 и 196.



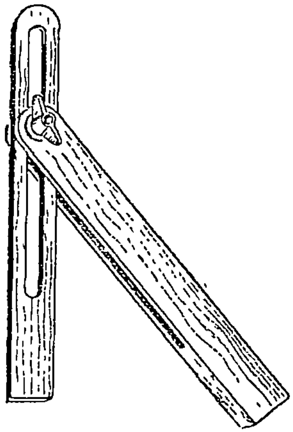
Черт. 195



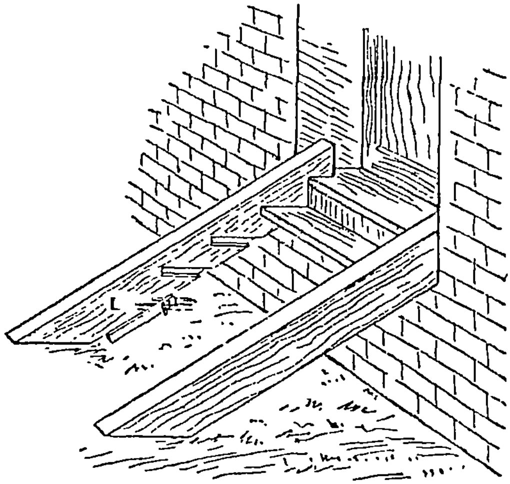
Черт. 196

Один край деревянного бруска выстругивают точно по прямой, а затем к нему прикладывают рейсмас и ведут его по бруску. Металлический шпенёк вычертит прямую, параллельную краю бруска.

При столярных и плотничных работах употребляется ещё прибор, называемый м а л к о й (черт. 197). Он применяется в тех случаях, когда нужно провести несколько параллельных прямых линий, идущих под определённым углом к какой-нибудь прямой, например при разметке гнёзд для ступеней лестницы (черт. 198).



Черт. 197



Черт. 198

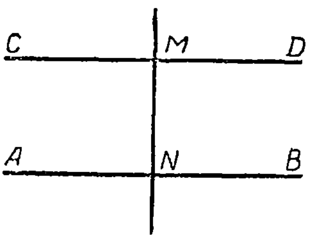
Малка — это две пластинки, соединённые винтом. Они могут быть поставлены под любым углом друг к другу и удерживаться в этом положении винтом. Одна пластинка скользит вдоль кромки доски, а по краю другой пластинки чертятся параллельные линии.

§ 37. АКСИОМА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ЕВКЛИДА.

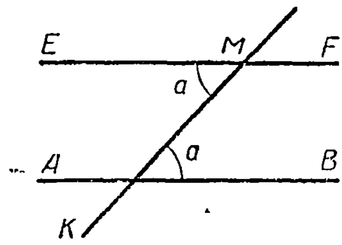
З а д а ч а. *Через точку М, взятую вне прямой АВ, провести прямую, параллельную прямой АВ.*

Пользуясь доказанными теоремами о признаках параллельности прямых, можно эту задачу решить различными способами.

Р е ш е н и е. 1-й с п о с о б (черт. 199).



Черт. 199



Черт. 200

Проводим $MN \perp AB$ и через точку M проводим $CD \perp MN$; получаем $CD \perp MN$ и $AB \perp MN$.

На основании теоремы § 33 заключаем, что $CD \parallel AB$.

2-й способ (черт. 200).

Проводим MK, пересекающую AB под любым углом a, и через точку M проводим прямую EF, образующую с прямой MK угол EMK, равный углу a. На основании теоремы § 35 заключаем, что $EF \parallel AB$.

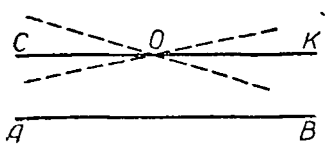
Решив данную задачу, можем считать доказанным, что через любую точку M, взятую вне прямой AB, можно провести прямую, ей параллельную. Возникает вопрос: сколько же прямых, параллельных данной прямой и проходящих через данную точку, может существовать?

Практика построений позволяет предполагать, что существует только одна такая прямая, так как при тщательно выполненном чертеже прямые, проведённые различными способами через одну и ту же точку параллельно одной и той же прямой, сливаются.

В теории ответ на поставленный вопрос даёт так называемая аксиома параллельности Евклида; она формулируется так:

Через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой.

На чертеже 201 через точку O проведена прямая CK, параллельная прямой AB.



Черт. 201

Всякая другая прямая, проходящая через точку O, уже не будет параллельна прямой AB, а будет её пересекать.

В начале настоящего курса было сказано о том, что геометрия возникла в глубокой древности и что особенно много для её развития сделал греческий математик Евклид.

Принятая Евклидом в его «Началах» аксиома, которая утверждает, что на плоскости через точку, взятую вне данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную этой прямой, называется аксиомой параллельности Евклида.

Более двух тысячелетий после Евклида многие учёные-математики пытались доказать это математическое предложение, но всегда их попытки оказывались безуспешными.

Только в 1826 г. великий русский учёный, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский доказал, что, используя все другие аксиомы Евклида, это математическое предложение доказать нельзя, что оно действительно должно быть принято за аксиому.

Н. И. Лобачевский создал новую геометрию, которая в отличие от геометрии Евклида названа геометрией Лобачевского.

§ 38. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ УГЛАМИ, ОБРАЗОВАННЫМИ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ И СЕКУЩЕЙ.

Мы знаем, что две прямые параллельны, если при пересечении их третьей прямой равны соответственные углы, или внутренние или внешние накрест лежащие углы, или сумма внутренних или сумма внешних односторонних углов равна $2d$.

Докажем, что верны и обратные теоремы, а именно:

Если две параллельные прямые пересечены третьей, то:

1) соответственные углы равны;

2) внутренние накрест лежащие углы равны;

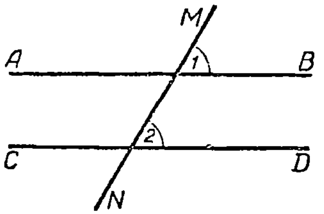
3) внешние накрест лежащие углы равны;

4) сумма внутренних односторонних углов равна $2d$;

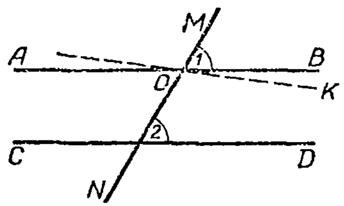
5) сумма внешних односторонних углов равна $2d$.

Докажем, например, что если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то соответственные углы равны.

Пусть прямые AB и CD параллельны, а MN — их секущая (черт. 202). Докажем, что соответственные углы 1 и 2 равны между собой.



Черт. 202



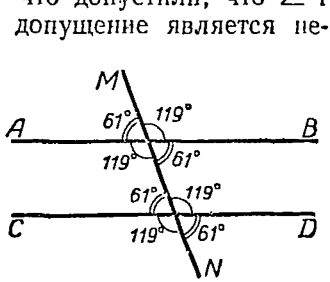
Черт. 203

Допустим, что $\angle 1$ и $\angle 2$ не равны. Тогда при точке O можно построить $\angle MOK$, соответственный и равный $\angle 2$ (черт. 203).

Но если $\angle MOK = \angle 2$, то прямая OK будет параллельна CD (§ 35).

Получили, что через точку O проведены две прямые AB и OK, параллельные прямой CD. Но этого быть не может (§ 37).

Мы пришли к противоречию, потому что допустили, что $\angle 1$ и $\angle 2$ не равны. Следовательно, наше допущение является неправильным и $\angle 1$ должен быть равен $\angle 2$, т. е. соответственные углы равны.



Черт. 204

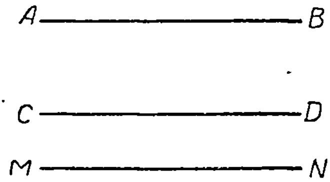
Установим соотношения между остальными углами. Пусть прямые AB и CD параллельны, а MN — их секущая (черт. 204).

Мы только что доказали, что в этом случае соответственные углы равны. Положим, что какие-нибудь два из них имеют по 119°. Вычислим величину каждого из остальных шести углов. На основании свойств смежных и вертикальных углов мы получим, что четыре угла из восьми будут иметь по 119°, а остальные — по 61°.

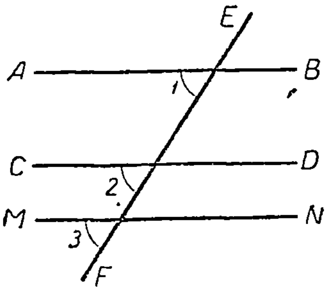
Оказалось, что как внутренние, так и внешние накрест лежащие углы попарно равны, а сумма внутренних или внешних односторонних углов равна 180° (или $2d$).

То же самое будет иметь место и при любом другом значении равных соответственных углов.

Следствие 1. ***Если каждая из двух прямых AB и CD параллельна одной и той же третьей прямой MN, то первые две прямые параллельны между собой*** (черт. 205.)

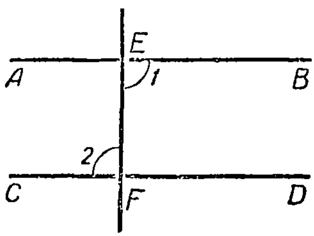


Черт. 205



Черт. 206

В самом деле, проведя секущую EF (черт. 206), получим: а) $\angle 1 = \angle 3$, так как $AB \parallel MN$; б) $\angle 2 = \angle 3$, так как $CD \parallel MN$. Значит, $\angle 1 = \angle 2$, а это углы соответственные при прямых AB и CD и секущей EF, следовательно, прямые AB и CD параллельны.



Черт. 207

Следствие 2. ***Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой*** (черт. 207).

В самом деле, если $EF \perp AB$, то $\angle 1 = d$; если $AB \parallel CD$, то $\angle 1 = \angle 2$.

Следовательно, $\angle 2 = d$, т. е. $EF \perp CD$.

§ 39. СУММА ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА.

1. Теорема. ***Сумма внутренних углов треугольника равна двум прямым углам.***

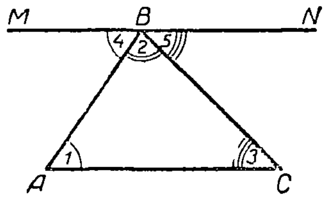
Возьмём какой-нибудь треугольник ABC (черт. 208). Обозначим его внутренние углы цифрами 1, 2 и 3. Докажем, что

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d.$$

Проведём через какую-нибудь вершину треугольника, например B, прямую MN параллельно AC.

При вершине B мы получили три угла: $\angle 4$, $\angle 2$ и $\angle 5$. Их сумма составляет развёрнутый угол, следовательно, она равна $2d$.

$$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 2d.$$



Черт. 208

Но $\angle 4 = \angle 1$—это внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых MN и AC и секущей AB.

$\angle 5 = \angle 3$ — это внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых MN и AC и секущей BC.

Значит, $\angle 4$ и $\angle 5$ можно заменить равными им $\angle 1$ и $\angle 3$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$, или $180°$. Теорема доказана.

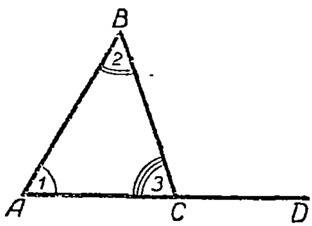
2. Свойство внешнего угла треугольника.

Теорема. ***Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.***

В самом деле, в треугольнике ABC (черт. 209) $\angle 1 + \angle 2 = 2d - \angle 3$, но и $\angle BCD$, внешний угол этого треугольника, не смежный с $\angle 1$ и $\angle 2$, также равен $2d - \angle 3$.

Таким образом,

$$\angle 1 + \angle 2 = 2d - \angle 3;$$
$$\angle BCD = 2d - \angle 3.$$



Черт. 209

Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = \angle BCD$.

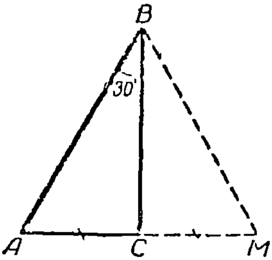
Выведенное свойство внешнего угла треугольника уточняет содержание ранее доказанной теоремы о внешнем угле треугольника (§ 26), в которой утверждалось только, что внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла треугольника, не смежного с ним; теперь же устанавливается, что внешний угол равен сумме обоих внутренних углов, не смежных с ним.

3. Свойство прямоугольного треугольника с углом в 30°.

Теорема. ***Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.***

Пусть в прямоугольном треугольнике ACB угол B равен $30°$ (черт. 210). Тогда другой его острый угол будет равен $60°$.

Докажем, что катет AC равен половине гипотенузы AB. Продолжим катет AC за вершину прямого угла C и отложим отрезок CM, равный отрезку AC. Точку M соединим с точкой B. Полученный треугольник BCM равен треугольнику ACB (§ 27). Мы видим, что каждый угол треугольника ABM равен 60°, следовательно, этот треугольник равносторонний.



Черт. 210

Катет AC равен половине AM, а так как AM равняется AB, то катет AC будет равен половине гипотенузы AB.

Упражнения.

1. Чему равна сумма двух острых углов прямоугольного треугольника?
2. Начертить треугольник. С помощью транспортира измерить его углы и найти их сумму.

Вычислить, какой процент по отношению к 180° составляет допущенная погрешность при измерении углов треугольника.

3. Доказать, что биссектрисы двух внутренних односторонних углов, образованных двумя параллельными и секущей, составляют прямой угол.
4. Доказать, что прямоугольные треугольники равны, если катет и противолежащий ему угол одного прямоугольного треугольника равны катету и противолежащему углу другого прямоугольного треугольника.
5. Построить прямоугольный треугольник:

а) по катету и прилежащему острому углу;

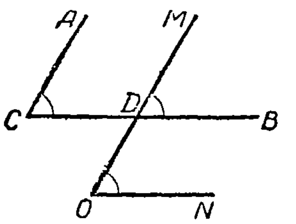
б) по катету и противолежащему острому углу.

6. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

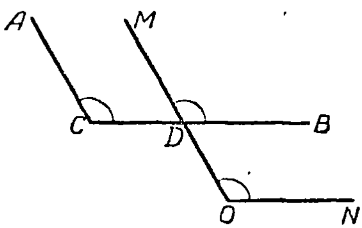
§ 40. УГЛЫ С СООТВЕТСТВЕННО ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ СТОРОНАМИ.

1. Углы с соответственно параллельными сторонами.

Возьмём на плоскости две точки C и O и из этих точек проведём две пары лучей $CA \parallel OM$ и $CB \parallel ON$ так, чтобы углы ACB и MON были оба острые (черт. 211) или оба тупые (черт. 212).



Черт. 211

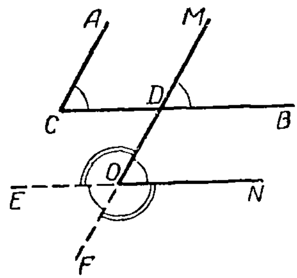


Черт. 212

Углы ACB и MON — углы с соответственно параллельными сторонами. Докажем, что эти углы равны между собой.

Пусть CB пересекает OM в точке D. $\angle ACB = \angle MDB$, как соответственные углы при параллельных AC и MO и секущей CB. $\angle MDB = \angle MON$, как соответственные углы при параллельных CB и ON и секущей MO, но тогда $\angle ACB = \angle MON$.

Следовательно, ***углы с соответственно параллельными сторонами равны, если они оба острые или оба тупые.***



Черт. 213

Построим два острых угла ACB и MON с соответственно параллельными сторонами (черт. 213): $CA \parallel MO$ и $CB \parallel ON$ — и продолжим за вершину O стороны угла MON.

При вершине O образовались два тупых угла EOM и FON (так как смежный с ними угол MON по построению острый).

Каждый из них в сумме с углом MON составляет $2d$, а так как $\angle MON = \angle ACB$, то $\angle ACB + \angle MOE = 2d$ и $\angle ACB + \angle FON = 2d$.

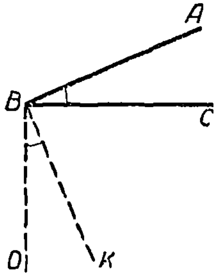
Следовательно, ***углы с соответственно параллельными сторонами в сумме составляют 2d, если один из них острый, а другой тупой.***

2. Углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

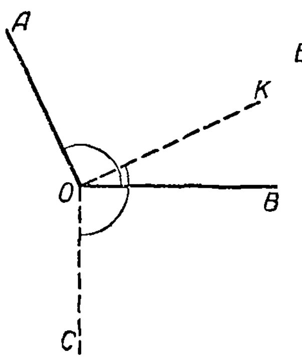
Построим произвольный острый угол ABC. Проведём через вершину угла лучи, перпендикулярные к его сторонам, так, чтобы они образовали острый угол.

$BO \perp BC$ и $BK \perp AB$ (черт. 214). Мы получим новый угол OBK. Стороны углов ABC и OBK взаимно перпендикулярны.

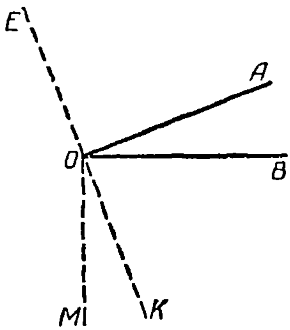
$\angle ABC = d - \angle CBK$; $\angle OBK = d - \angle CBK$.



Черт. 214



Черт. 215



Черт. 216

Отсюда следует, что $\angle ABC = \angle OBK$.

Построим произвольный тупой угол AOB и через его вершину проведём лучи, перпендикулярные к его сторонам, так, чтобы они образовали тупой угол. $OK \perp OA$ и $OC \perp OB$ (черт. 215), угол KOC — тупой. Стороны углов AOB и KOC взаимно перпендикулярны, поэтому

$$\angle AOB = d + \angle KOB;$$
$$\angle KOC = d + \angle KOB.$$

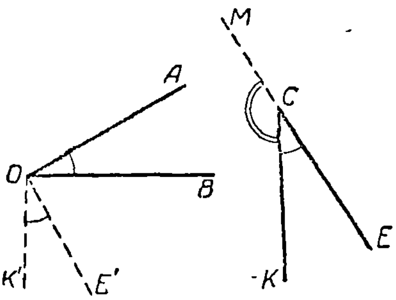
Отсюда следует, что $\angle AOB = \angle KOC$.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны между собой, если они оба острые или оба тупые.

Построим произвольный острый угол AOB и проведём через его вершину перпендикуляры к его сторонам так, чтобы они образовали острый угол (черт. 216). Получим: $\angle KOM = \angle AOB$. Продолжим сторону OK за вершину O. Стороны угла EOM перпендикулярны сторонам угла AOB. При этом $\angle EOM$ — тупой, так как смежный с ним $\angle MOK$ — острый. $\angle KOM + \angle EOM = 2d$ (как углы смежные). Но $\angle KOM$ по ранее доказанному равен $\angle AOB$. Следовательно, и $\angle AOB + \angle EOM = 2d$.

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами в сумме составляют 2d, если один из них острый, а другой тупой.

Мы рассматривали углы, составленные взаимно перпендикулярными сторонами, когда они имели общую вершину. Выведенные нами свойства будут справедливы и в том случае, когда углы не будут иметь общей вершины.



Черт. 217

Построим произвольный острый угол AOB и через какую-нибудь точку C (черт. 217) проведём лучи $CE \perp OA$ и $CK \perp OB$ так, чтобы угол KCE был тоже острый.

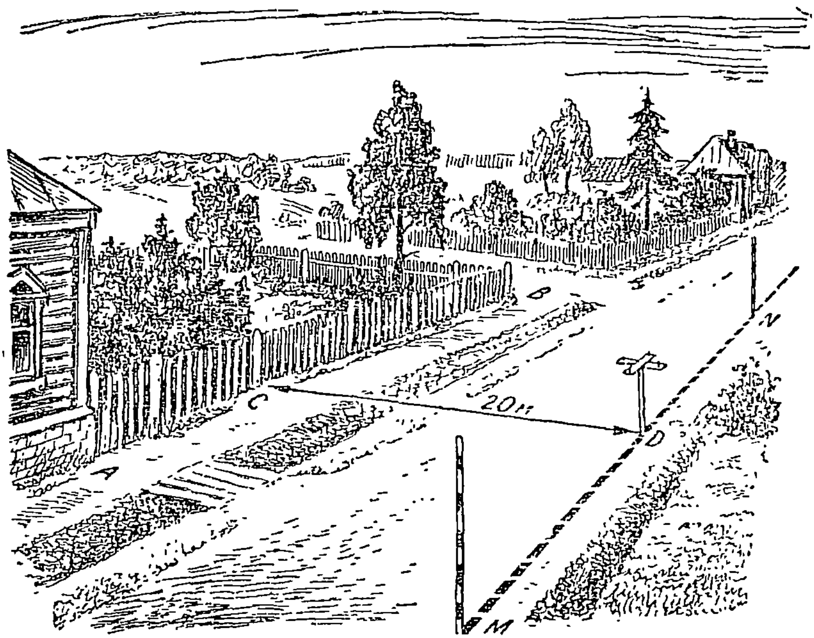
Углы AOB и KCE составлены взаимно перпендикулярными сторонами. Докажем, что они равны между собой. Для этого через точку O (вершину $\angle AOB$) проведём $OK' \parallel CK$ и $OE' \parallel CE$. $\angle KCE = \angle K'OE'$, так как они составлены взаимно параллельными сторонами и оба острые. Но $\angle K'OE' = \angle AOB$ по доказанному. Следовательно, $\angle AOB = \angle KCE$.

Если продолжим сторону CE за вершину угла, мы получим $\angle MCK$, смежный с $\angle KCE$. $\angle MCK + \angle KCE = 2d$, но $\angle KCE = \angle AOB$. Поэтому $\angle AOB + \angle MCK = 2d$.

§ 41. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ НА МЕСТНОСТИ.

1. Проведение параллельных прямых на местности.

Пусть нам нужно провести прямую, параллельную имеющейся изгороди AB (черт. 218), на данном от неё расстоянии, например на расстоянии 20 *м*.



Черт. 218

Для решения этой практической задачи провешим с помощью эккера из точки C прямую, перпендикулярную к прямой AB, и на ней отложим отрезок CD длиной 20 *м*. В точке D установим эккер так, чтобы направление одного бруска эккера совпало с направлением CD.

По направлению второго бруска эккера провешим прямую MN. Она будет параллельна прямой AB.

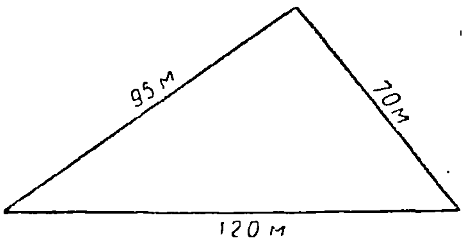
Докажите это с помощью какого-либо признака параллельности двух прямых линий, приняв CD за секущую прямых AB и MN.

2. Съёмка плана земельного участка, имеющего форму многоугольника.

а) Съёмка плана земельного участка, имеющего форму треугольника.

Пусть нам нужно начертить план земельного участка, имеющего форму треугольника, стороны которого равны, например, 120 *м*, 95 *м* и 70 *м* (черт. 219).

Приняв масштаб миллиметр за один метр, построим треугольник, стороны которого соответственно равны 120 *мм*, 95 *мм* и 70 *мм*. Получим план данного нам земельного участка, построенный в масштабе, равном 0,001.

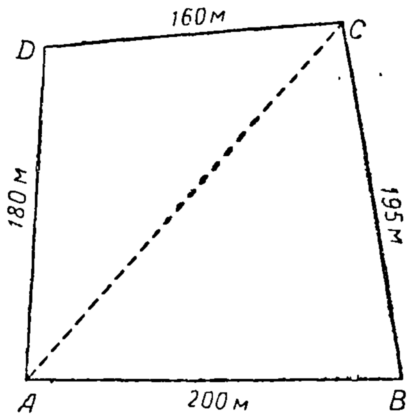


Черт. 219

При вычерчивании плана масштаб должен выбираться в зависимости от размеров участка и от размеров листа бумаги, на котором будет изображён план.

б) Съёмка плана земельного участка, имеющего форму четырёхугольника.

Пусть требуется начертить план четырёхугольного участка, стороны которого равны, например, 200 *м*, 180 *м*, 160 *м* и 195 *м* (черт. 220). Провешим диагональ этого четырёхугольника, например AC, и измерим её длину. Пусть она будет равна 210 *м*.



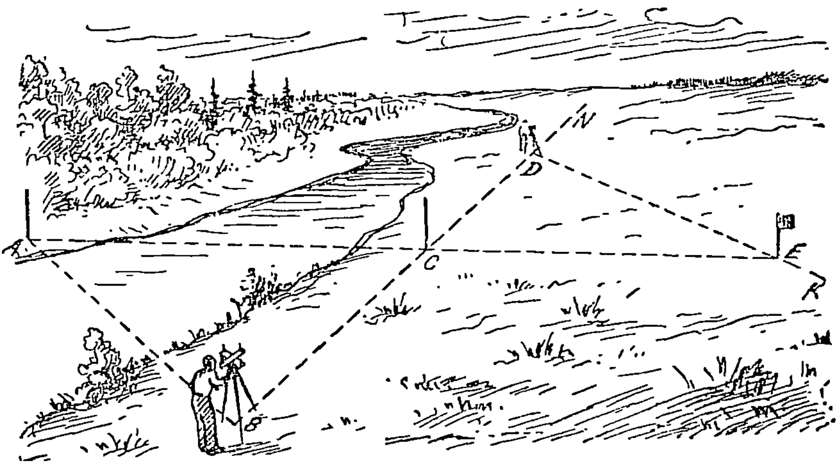
Черт. 220

Выбрав подходящий масштаб, построим сначала один треугольник, например треугольник ABC, а затем к стороне AC пристроим второй треугольник ADC. В результате получим план данного нам участка, построенный в выбранном масштабе.

Если надо начертить план земельного участка, имеющего форму пятиугольника или шестиугольника, то поступаем так же: разбиваем этот многоугольник на треугольники, измеряем длины их сторон, выбираем подходящий масштаб и последовательно строим треугольники, располагая их на чертеже в том же порядке, как они расположены на самом земельном участке.

3. Определение расстояния между двумя точками, одна из которых недоступна.

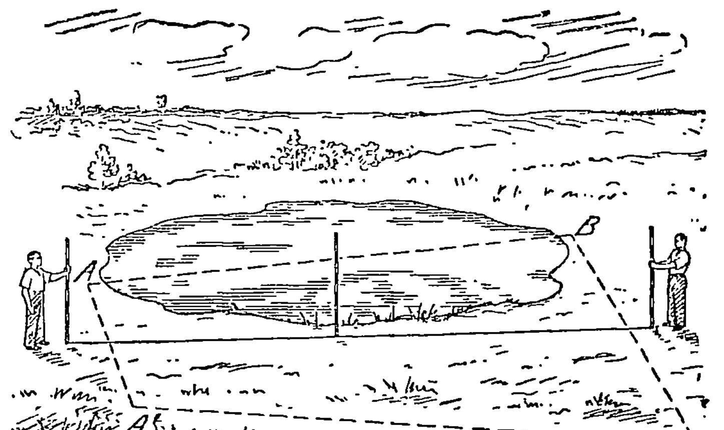
Чтобы определить расстояние между точками A и B, разделёнными рекой (черт. 221), строим при точке B с помощью эккера прямой угол ABN. На прямой BN откладываем последовательно два равных отрезка BC и CD. Точки C и D отмечаем вехами. При точке D строим прямой угол BDK. Продолжение отрезка AC пересечёт прямую DK в некоторой точке E. $DE = AB$. Доказать самостоятельно правильность решения.



Черт. 221

4. Определение расстояния между двумя доступными точками, разделёнными препятствием (черт. 222).

Пусть требуется определить расстояние между точками A и B. Провешим произвольную прямую, примем её за ось симметрии



Черт. 222

и построим с помощью эккера точки A' и B', симметричные заданным. Отрезок, соединяющий построенные точки, имеет искомую длину, т. е $A'B' = AB$.

Упражнения.

1. На школьном дворе провести прямую, параллельную какой-нибудь данной прямой (изгороди, забору, стене школьного здания).

2. Отметить вехами где-нибудь вблизи школы земельный участок треугольной формы и начертить его план.

3. Начертить план какого-нибудь земельного участка четырёхугольной формы (например, школьного участка или участка, занимаемого огородом, садом; или предварительно на открытой ровной площадке обозначить вехами вершины какого-нибудь четырёхугольника и нанести его на план).

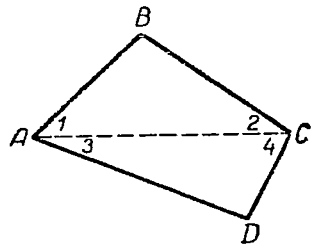
ГЛАВА IV.

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ.

§ 42. СУММА ВНУТРЕННИХ УГЛОВ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА.

Теорема. ***Сумма внутренних углов четырёхугольника равна 4d.***

В четырёхугольнике $ABCD$ (черт. 223) проведём диагональ AC. Тогда четырёхугольник разобьётся на два треугольника ABC и ACD. $\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 2d$, $\angle 3 + \angle D + \angle 4 = 2d$. Отсюда получим: $\angle 1 + \angle B + \angle 2 + \angle 3 + \angle D + \angle 4 = 4d$.



Черт. 223

Но $\angle 1 + \angle 3 = \angle A$, а $\angle 2 + \angle 4 = \angle C$.

Следовательно,

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4d.$$

Упражнения.

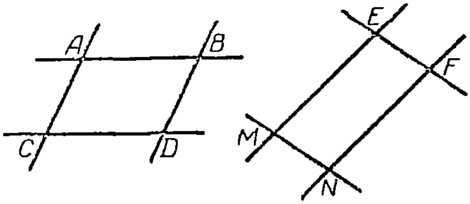
1. Начертить четырёхугольник и построить отрезок, равный его периметру.
2. Могут ли все 4 внутренних угла четырёхугольника быть тупыми?
3. Могут ли все 4 внутренних угла четырёхугольника быть острыми?
4. Начертить четырёхугольник. С помощью транспортира измерить его углы и найти их сумму. Вычислить, какой процент по отношению к истинной сумме внутренних углов четырёхугольника составляет допущенная погрешность.
5. Построить четырёхугольник по четырём его сторонам и одной из диагоналей.
6. Построить четырёхугольник по четырём его сторонам и одному из углов.

§ 43. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ.

1. Определение параллелограмма.

Если пару параллельных прямых пересечём другой парой параллельных прямых, то получим четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

В четырёхугольниках $ABDC$ и $EFNM$ (черт. 224) $BD \parallel AC$ и $AB \parallel CD$; $EF \parallel MN$ и $EM \parallel FN$.



Черт. 224

Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.

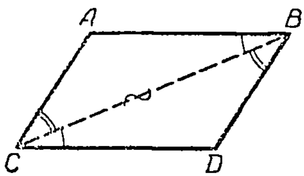
2. Свойства параллелограмма.

Теорема 1. ***Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.***

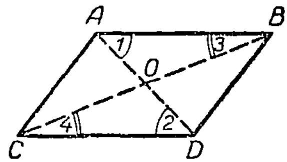
Пусть имеется параллелограмм $ABDC$ (черт. 225), в котором $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$.

Требуется доказать, что диагональ делит его на два равных треугольника.

Проведём в параллелограмме $ABDC$ диагональ CB. Докажем, что $\triangle CAB = \triangle CDB$.



Черт. 225



Черт. 226

Сторона CB общая для этих треугольников; $\angle ABC = \angle BCD$, как внутренние накрест лежащие углы при параллельных AB и CD и секущей CB; $\angle ACB = \angle CBD$, тоже как внутренние накрест лежащие углы при параллельных AC и BD и секущей CB (§ 38).

Отсюда $\triangle CAB = \triangle CDB$.

Таким же путём можно доказать, что диагональ AD разделит параллелограмм на два равных треугольника ACD и ABD.

Следствия. 1. ***Противоположные углы параллелограмма равны между собой.***

$\angle A = \angle D$, это следует из равенства треугольников CAB и CDB. Аналогично и $\angle C = \angle B$.

2. *Противоположные стороны параллелограмма равны между собой.*

$AB = CD$ и $AC = BD$, так как это стороны равных треугольников и лежат против равных углов.

Теорема 2. *Диагонали параллелограмма в точке их пересечения делятся пополам.*

Пусть BC и AD — диагонали параллелограмма $ABCD$ (черт. 226). Докажем, что $AO = OD$ и $CO = OB$.

Для этого сравним какую-нибудь пару противоположно расположенных треугольников, например $\triangle AOB$ и $\triangle COD$.

В этих треугольниках $AB = CD$, как противоположные стороны параллелограмма;

$\angle 1 = \angle 2$, как углы внутренние накрест лежащие при параллельных AB и CD и секущей AD;

$\angle 3 = \angle 4$ по той же причине, так как $AB \parallel CD$ и CB — их секущая (§ 38).

Отсюда следует, что $\triangle AOB = \triangle COD$. А в равных треугольниках против равных углов лежат равные стороны. Следовательно, $AO = OD$ и $CO = OB$.

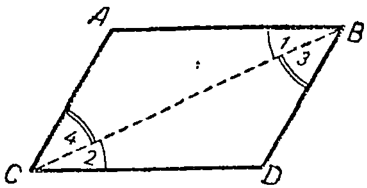
Теорема 3. *Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна $2d$.*

Доказать самостоятельно.

3. Признаки параллелограмма.

Теорема 1. *Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник—параллелограмм.*

Пусть в четырёхугольнике $ABDC$ (черт. 227) $AB = CD$ и $AC = BD$. Докажем, что при этом условии $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$, т. е. четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм. Соединим отрезком какие-нибудь две противоположные вершины этого четырёхугольника, например C и B. Четырёхугольник $ABDC$ разбился на два равных треугольника: $\triangle CAB$ и $\triangle CDB$. В самом деле, сторона CB у них общая, $AB = CD$ и $AC = BD$ по условию. Таким образом, три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого, поэтому $\triangle CAB = \triangle CDB$.



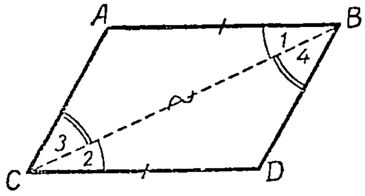
Черт. 227

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

Углы 1 и 2 являются внутренними накрест лежащими углами при пересечении прямых AB и CD прямой CB. Следовательно, $AB \parallel CD$.

Точно так же углы 3 и 4 являются внутренними накрест лежащими углами при пересечении прямых CA и BD прямой CB, следовательно, $CA \parallel BD$ (§ 35).

Таким образом, противоположные стороны четырёхугольника $ABDC$ попарно параллельны, следовательно, он параллелограмм, что и требовалось доказать.



Черт. 228

Теорема 2. ***Если две противоположные стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.***

Пусть в четырёхугольнике $ABDC$ $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Докажем, что при этих условиях четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм (черт. 228).

Соединим отрезком CB вершины C и B. Вследствие параллельности прямых AB и CD углы 1 и 2, как углы внутренние накрест лежащие, равны (§ 38). Тогда треугольник CAB равен треугольнику CDB, так как сторона CB у них общая, $AB = CD$ по условию теоремы и $\angle 1 = \angle 2$ по доказанному. Из равенства этих треугольников вытекает равенство углов 3 и 4, так как они лежат против равных сторон в равных треугольниках.

Но углы 3 и 4 — это внутренние накрест лежащие углы, образованные при пересечении прямых AC и BD прямой CB, следовательно, $AC \parallel BD$ (§ 35), т. е. четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм.

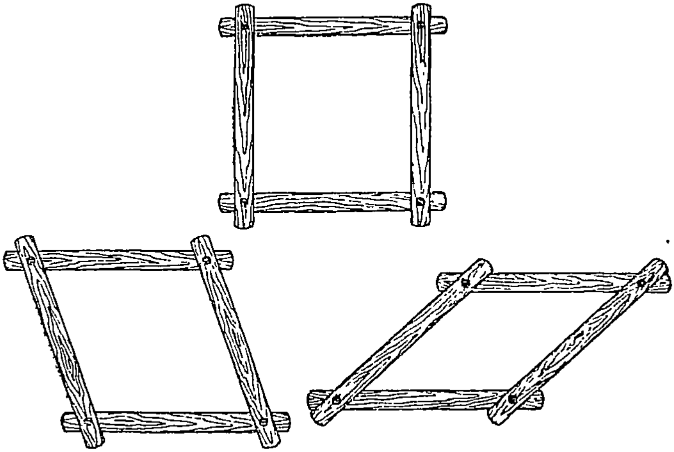
Упражнения.

1. Доказать, что если диагонали четырёхугольника в точке их взаимного пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
2. Доказать, что четырёхугольник, у которого сумма внутренних углов, прилежащих к каждой из двух соседних сторон, равна $2d$, есть параллелограмм.
3. Построить параллелограмм по двум сторонам и углу между ними: а) используя параллельность противоположных сторон параллелограмма; б) используя равенство противоположных сторон параллелограмма.
4. Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и диагонали.
5. Построить параллелограмм по двум его диагоналям и углу между ними.
6. Построить параллелограмм по его стороне и двум диагоналям.

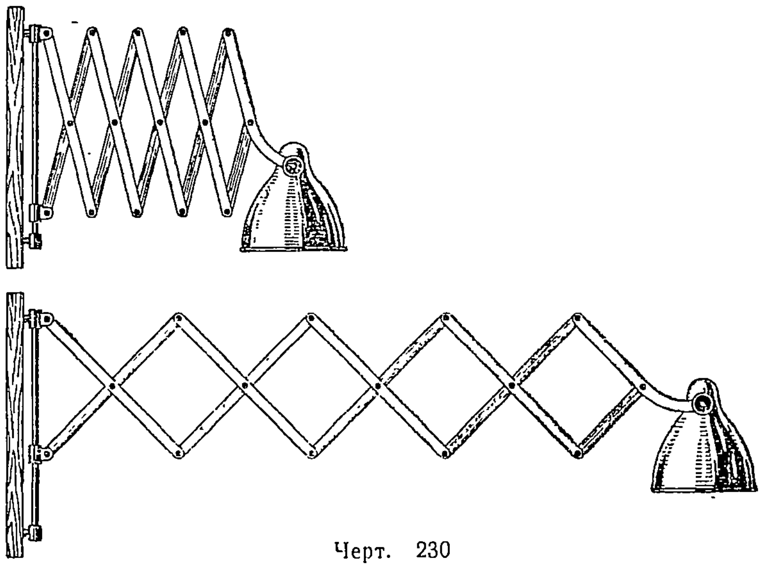
§ 44. ПОДВИЖНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА (ШАРНИРНОГО).

Параллелограмм в отличие от треугольника не является жёсткой фигурой. Если построить модель параллелограмма так, чтобы стороны его соединялись друг с другом с помощью шарниров, то такой параллелограмм окажется подвижным: стороны его можно вращать, изменяя углы между ними. Это свойство параллелограмма вытекает из того, что по данным сторонам можно строить параллелограммы с различными внутренними углами (черт. 229).

О такой фигуре говорят, что она не жёсткая. На чертеже 230 показано использование свойства нежёсткости фигуры.



Черт. 229



Черт. 230

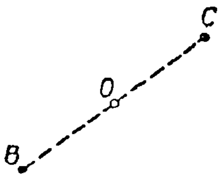
§ 45. ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ.

В § 17 были рассмотрены фигуры, симметричные относительно прямой, которая называлась осью симметрии.

В геометрии рассматривается и другой вид симметрии, которая называется *центральной симметрией* или симметрией относительно точки, называемой *центром* симметрии.

1. Центрально симметричные точки.

Если возьмём какую-нибудь точку O, проведём через неё прямую и отложим на этой прямой по разные стороны от точки O равные отрезки OB и OC (черт. 231), то получим две точки B и C, центрально симметричные относительно точки O. Точка O называется центром симметрии этих точек.



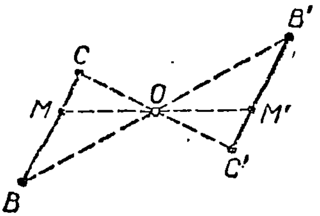
Черт. 231

Центрально симметричными относительно центра O называются две точки, которые лежат на одной прямой, проходящей через центр O, на равных расстояниях от центра O.

Если повернуть отрезок OC вокруг точки O на 180°, то точки C и B совпадут. **Две фигуры называются центрально симметричными относительно центра O, если при повороте одной из них вокруг этого центра на 180° они совместятся всеми своими точками.**

2. Центрально симметричные отрезки.

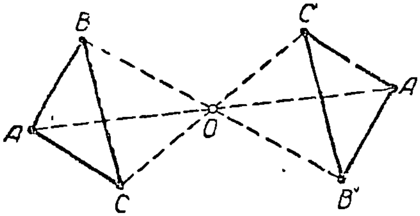
Возьмём две пары центрально симметричных точек относительно точки O (черт. 232): $OB = OB'$ и $OC = OC'$. Соединим отрезками точки B и C, B' и C'. Получим отрезки BC и $B'C'$, концы которых центрально симметричны относительно точки O.



Черт. 232

Если повернём чертёж вокруг точки O на 180°, то точки B' и C' займут соответственно положение точек B и C. Отрезки $B'C'$ и BC совместятся, они центрально симметричны. ***Центрально симметричные отрезки равны.***

3. Центрально симметричные треугольники.



Черт. 233

Возьмём три пары центрально симметричных точек относительно какой-нибудь точки O (черт. 233):

$$OA = OA', \quad OB = OB'$$

$$\text{и } OC = OC'.$$

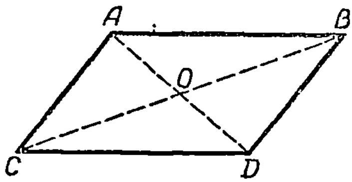
Соединив точку A с точками B и C, а точку A' с точками B' и C', получим два треугольника. Эти треугольники центрально симметричны относительно точки O, являющейся центром симметрии.

При повороте чертежа вокруг точки O на $180°$ точки A', C' и B' займут соответственно положение точек A, C и B, т. е. $\triangle A'C'B'$ и $\triangle ACB$ совместятся. ***Центрально симметричные треугольники равны.***

Точно так же равны и любые симметричные фигуры.

4. Симметрия параллелограмма.

Большое число фигур обладает тем свойством, что при повороте плоскости чертежа на $180°$ вокруг некоторой точки новое положение фигуры совпадает с первоначальным Такие фигуры называются центрально симметричными. Параллелограмм принадлежит к числу таких фигур, он центрально симметричен относительно точки пересечения его диагоналей (черт. 234).



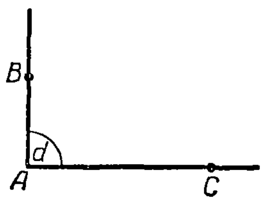
Черт. 234

В самом деле, так как $OC = OB$ и $OA = OD$, то точки C и B, а также A и D симметричны относительно центра O. Если параллелограмм повернуть на $180°$ вокруг точки пересечения его диагоналей, то новое положение параллелограмма совпадёт с первоначальным.

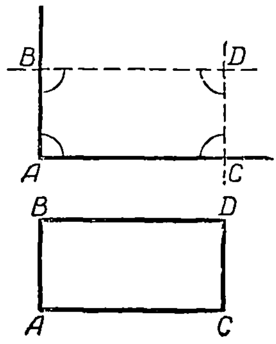
§ 46. ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ.

1. Прямоугольник.

Построим прямой угол A. Обозначим на его сторонах две произвольные точки B и C (черт. 235). Через точку B проведём прямую,



Черт. 235



Черт. 236

параллельную AC, а через точку C проведём прямую, параллельную AB. Точку пересечения этих прямых обозначим буквой D (черт. 236). Мы получили параллелограмм $ABDC$, в котором $\angle A = d$. Нетрудно доказать, что в этом параллелограмме все внутренние углы будут прямые.

В самом деле, $\angle B + \angle A = 2d$, как углы внутренние односторонние при параллельных прямых AC и BD и секущей AB. Но $\angle A = d$, следовательно, и $\angle B = d$. Кроме того, $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$, как противоположные углы параллелограмма. Таким образом, все углы этого параллелограмма прямые,

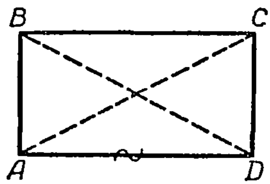
Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется прямоугольником.

2. Свойства прямоугольника.

Так как прямоугольник есть параллелограмм, то он обладает всеми его свойствами (§ 43).

1. Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника.
2. Диагонали прямоугольника в точке их пересечения делятся пополам.
3. Противоположные стороны прямоугольника равны между собой, равны также и противоположные углы его.

Кроме этих свойств, прямоугольник обладает ещё следующим свойством: ***диагонали прямоугольника равны.***



Черт. 237

Докажем это свойство. Возьмём прямоугольник $ABCD$, проведём в нём две диагонали (черт. 237) AC и BD и докажем, что они равны между собой.

Сравним два треугольника ABD и ACD. Сторона AD у них общая и $AB = DC$. Кроме того, они прямоугольные. Следовательно, они равны между собой, поэтому $AC = BD$.

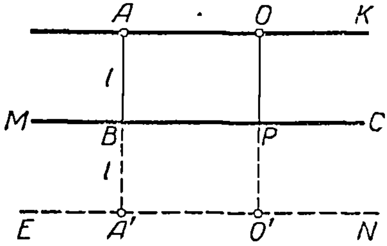
Упражнение. Докажите, что *если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.*

Этим свойством прямоугольника пользуются в столярных и слесарных мастерских для проверки, насколько точно сделаны те или иные детали или предметы, которые должны иметь прямоугольную форму, например: крышка стола, дно или боковая стенка ящика, рамка для картины и т. д.

Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны и равны его диагонали, то он должен быть прямоугольником. В противном же случае он не будет иметь форму прямоугольника и потребует соответствующего исправления.

3. Построение прямой, все точки которой находятся на данном расстоянии l от данной прямой.

Если через точку A, находящуюся на расстоянии l от данной прямой MC, провести прямую, параллельную MC, то любая точка этой прямой будет находиться на расстоянии l от прямой MC (черт. 238). Если $AB = l$ и $OP \perp MC$, то $OP = AB = l$ (как противоположные стороны прямоугольника).



Черт. 238

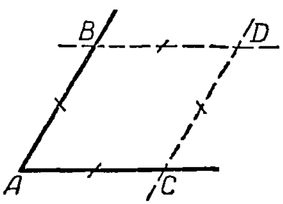
Кроме прямой AK, по другую сторону MC можно построить ещё прямую EN, обладающую тем же свойством: $BA' = PO' = l$. Точки плоскости, не лежащие на прямых AK и EN, этим свойством не обладают.

Прямые AK и EN являются геометрическим местом точек, отстоящих от данной прямой MC на расстоянии l.

Эти две прямые симметричны относительно данной прямой.

4. Ромб.

Построим угол и на его сторонах отложим от вершины A равные отрезки $AB=AC$ (черт. 239). Через точку B проведём прямую, параллельную AC; через точку C проведём прямую, параллельную AB. Точку пересечения этих прямых обозначим через D. Мы получили параллелограмм $ABDC$, причём $BD = AC$, $CD = AB$, как противоположные стороны параллелограмма. Отсюда $BD = AC = AB = DC$.



Черт. 239

Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется ромбом.

5. Свойства ромба.

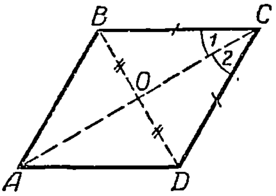
Так как ромб есть параллелограмм, то он обладает всеми его свойствами.

1. Диагональ ромба делит его на два равных треугольника.
2. Диагонали ромба в точке их пересечения делятся пополам.
3. Противоположные стороны ромба равны между собой, равны и противоположные углы его.

Кроме того, ромб обладает еще следующими свойствами:

а) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
б) диагональ ромба делит угол его пополам.

В ромбе $ABCD$ проведём две диагонали AC и BD (черт. 240), пересекающиеся в точке O, и докажем, что $AC \perp BD$, а диагональ AC делит угол C пополам. В равнобедренном треугольнике BCD отрезок CO является медианой, а следовательно, и высотой, и биссектрисой угла C. Отсюда $AC \perp BD$ и $\angle 1 = \angle 2$.



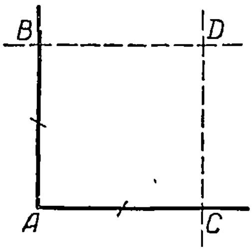
Черт. 240

Так же доказывается, что диагональ AC делит пополам угол A, а диагональ BD делит пополам углы B и D.

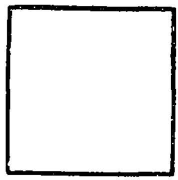
6. Квадрат.

Построим прямой угол и на его сторонах отложим равные отрезки AB и AC (черт. 241).

Через точки B и C проведём прямые, параллельные сторонам AC и AB. Точку пересечения их обозначим через D. Мы получили четырёхугольник, в котором:



Черт. 241


Черт. 242

а) противоположные стороны попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм;

б) все углы прямые, следовательно, это прямоугольник;

в) все стороны равны, следовательно, это ромб.

Прямоугольник, в котором все стороны равны, называется квадратом (черт. 242).

Может быть дано и такое определение квадрата: **ромб, у которого все углы прямые, называется квадратом.**

7. Свойства квадрата.

Так как квадрат является и параллелограммом, и прямоугольником, и ромбом, то он обладает всеми их свойствами.

1. а) Диагональ квадрата делит его на два равных треугольника.

б) Диагонали квадрата в точке их пересечения делятся пополам.

в) Противоположные стороны квадрата равны между собой, равны и противоположные углы его. (Свойства параллелограмма.)

2. Диагонали квадрата равны. (Свойство прямоугольника.)

3. а) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны.

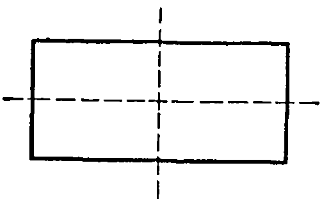
б) Диагональ квадрата делит его угол пополам. (Свойства ромба).

8. Симметрия прямоугольника, ромба и квадрата.

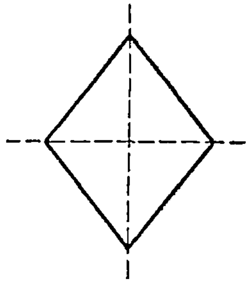
Так как прямоугольник, ромб и квадрат являются параллелограммами, то точка пересечения диагоналей этих фигур является также их центром симметрии.

Прямоугольник, ромб и квадрат, кроме того, имеют ещё оси симметрии. В прямоугольнике осями симметрии являются прямые, проходящие через середины противоположных сторон (черт. 243).

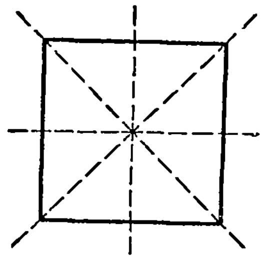
В ромбе осями симметрии являются две его диагонали (черт. 244).



Черт. 243



Черт. 244

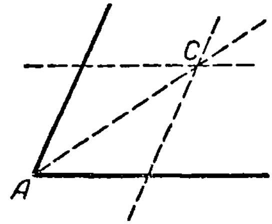


Черт. 245

Квадрат имеет четыре оси симметрии (черт. 245), которые указаны для прямоугольника и ромба.

Упражнения.

1. Перечислите изученные свойства параллелограмма.
2. Перечислите изученные свойства прямоугольника.
3. Перечислите изученные свойства ромба.
4. Диагонали четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Значит ли, что этот четырёхугольник — ромб? При каком дополнительном условии он будет ромбом?
5. Построить ромб по данной стороне и прилежащему углу.
6. Построить ромб по двум его диагоналям.
7. Построить квадрат по данной его стороне.
8. Построить квадрат по его диагонали.
9. Приложить двустороннюю линейку сначала к одной стороне произвольного угла A, а затем к другой стороне и провести две прямые,

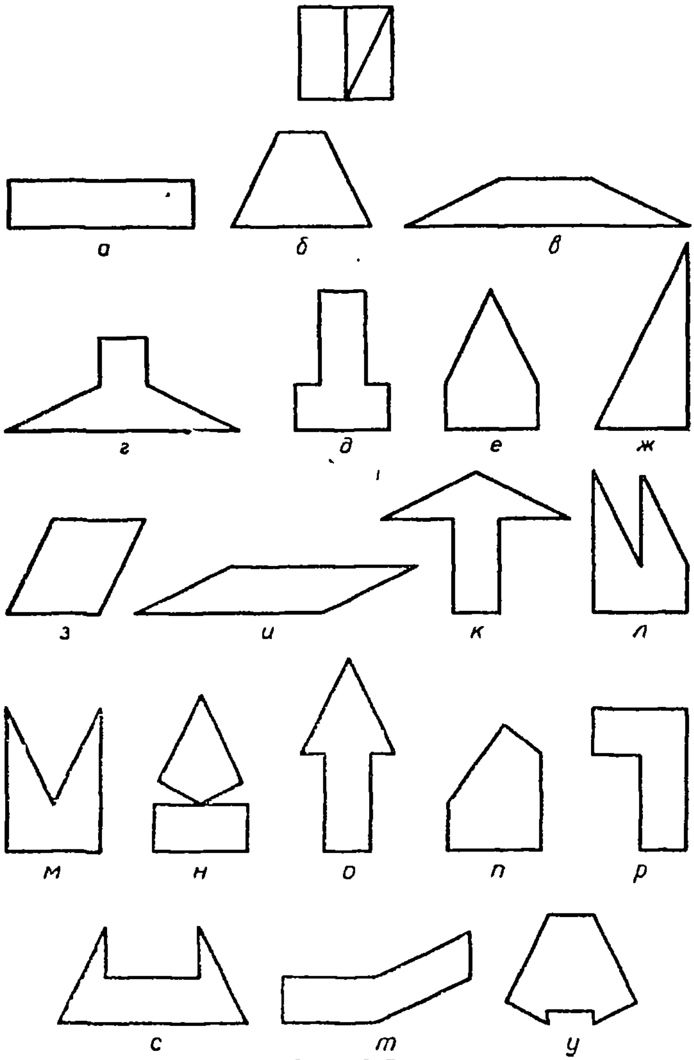


Черт. 246

параллельные сторонам этого угла (черт. 246). Точку C пересечения этих двух прямых соединить с вершиной угла и доказать, что прямая AC разделит $\angle A$ пополам.

10. В следующих задачах дополнить условие недостающими данными, чтобы решение было единственным:

а) построить ромб по данной его стороне;
б) построить прямоугольник по данной его стороне;
в) построить ромб по данному углу;
г) построить параллелограмм по данной его стороне.



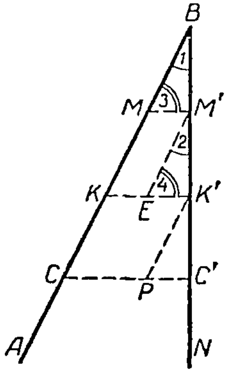
Черт. 247

11. Вырезать квадрат, разрезать его на части, как показано на чертеже 247, и составить из них фигуры, приведённые на этом чертеже.

§ 47. СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ, ОТСЕКАЕМЫХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРЯМЫМИ НА СТОРОНАХ УГЛА.

Теорема. ***Если на одной стороне угла отложить равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие другую сторону угла, то и на этой стороне угла отложатся равные между собой отрезки.***

Пусть на стороне AB угла ABN отложены равные отрезки $BM = MK = KC$ (черт. 248) и через точки деления M, K и C проведены параллельные прямые, пересекающие сторону BN того же угла.

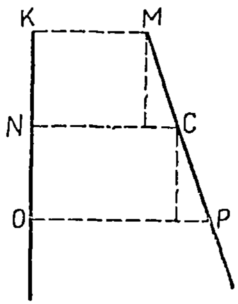


Черт. 248

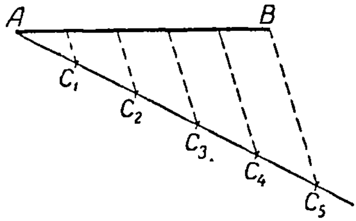
На этой стороне образовались три отрезка: BM', $M'K'$ и $K'C'$. Требуется доказать, что $BM' = M'K' = K'C'$.

Для доказательства через точки M' и K' проведём прямые, параллельные AB. Мы получим треугольники BMM', $M'EK'$ и $K'PC'$. Сравним эти треугольники.

Сначала сравним треугольники MBM' и $M'EK'$. В этих треугольниках имеем: $\angle 1 = \angle 2$, как соответственные углы при параллельных BA и $M'E$ и секущей BN; $\angle 3 = \angle 4$, как острые углы[1] с соответственно параллельными сторонами ($AB \parallel M'E$ и $MM' \parallel KK'$). $BM = MK$ по построению; $MK = M'E$, как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $BM = M'E$. Таким образом, $\triangle BMM' = \triangle M'EK'$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Отсюда следует, что $BM' = M'K'$. Так же можно



Черт. 249



Черт 250

доказать, что $BM' = K'C'$, т. е. $BM' = M'K' = K'C'$. При доказательстве теоремы мы откладывание отрезков начали от вершины

[1] Углы 3-й и 4-й могут оказаться оба тупыми, но и в этом случае они останутся равными, а потому доказательство теоремы не изменится.

4a*

угла, но теорема справедлива и для того случая, когда откладывание отрезков будет начато не от вершины угла, а от любой точки его стороны. (Докажите это самостоятельно.)

В этом случае вершину угла на чертеже можно не отмечать (черт. 249).

Теорема справедлива и для случая, когда прямые KO и MP параллельны.

З а д а ч а. *Разделить данный отрезок на n равных частей.*

Пусть отрезок AB (черт. 250) нужно разделить на 5 равных частей. Для этого из точки A под каким-нибудь углом к отрезку AB проведём луч и от вершины A отложим на нём последовательно 5 равных отрезков. Конец последнего отрезка, точку C_5, соединим отрезком прямой с точкой B и через точки деления C_1, C_2, C_3, C_4 проведём прямые, параллельные BC_5. Эти прямые разделят данный отрезок на 5 равных частей.

Подобным образом всякий отрезок можно разделить на любое число равных частей.

§ 48. СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Т е о р е м а. ***Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, параллелен третьей стороне треугольника и равен её половине.***

Д а н о: В треугольника ABC $AM = BM$ и $CK = BK$.

Н а д о д о к а з а т ь: 1) $MK \parallel AC$;

$$2)\ MK = \frac{AC}{2}.$$

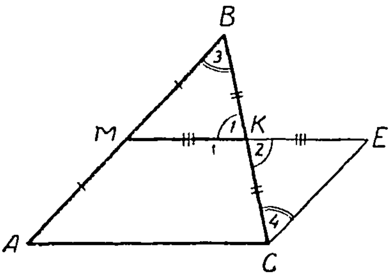
Д о к а з а т е л ь с т в о. Продолжим MK на отрезок $KE=MK$ и точку C соединим с точкой E (черт. 251).

Рассмотрим треугольники MBK и KEC.

$CK = KB$ — по условию,

$KE = MK$ — по построению, } следовательно,

$\angle 1 = \angle 2$, как вертикальные; } $\triangle MBK = \triangle KEC$.



Черт. 251

Из равенства этих треугольников следует: 1) $EC = MB$ и, значит, $EC = AM$; 2) $\angle 4 = \angle 3$, но эти углы внутренние накрест лежащие при прямых EC и MB и секущей BC, следовательно, $EC \parallel MB$, и значит, $EC \parallel AM$.

Рассмотрим теперь четырёхугольник $AMEC$. В нём $EC = AM$ и $EC \parallel AM$, поэтому $AMEC$ — параллелограмм (§ 43, п. 3).

Из этого следует:

1) $ME \parallel AC$ и, значит, $MK \parallel AC$;

2) $ME = AC$ и, значит, $MK = \frac{AC}{2}$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **с р е д н е й л и н и е й** треугольника.

Упражнения.

1. Доказать, что прямая, проходящая через середину какой-либо стороны треугольника параллельно другой его стороне, делит третью сторону треугольника пополам.

2. Доказать, что отрезки, соединяющие последовательно середины сторон любого четырёхугольника, образуют параллелограмм.

У к а з а н и е. Провести в четырёхугольнике диагонали.

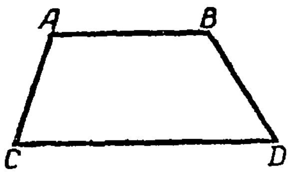
3. Диагонали четырёхугольника равны 38 *мм* и 36 *мм*. Вычислить периметр параллелограмма, образованного отрезками, соединяющими середины сторон этого четырёхугольника.

§ 49. ТРАПЕЦИЯ.

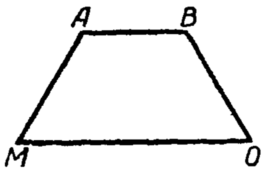
Четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а другие две не параллельны, называется трапецией.

На чертеже 252 у четырёхугольника $ABDC$ $AB \parallel CD$, $AC \nparallel BD$. $ABDC$ — трапеция. Параллельные стороны трапеции называются её о с н о в а н и я м и; AB и CD — основания трапеции. Остальные две стороны называются б о к о в ы м и с т о р о н а м и трапеции; AC и BD — боковые стороны трапеции.

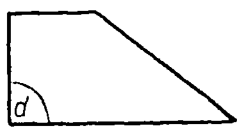
Если боковые стороны равны, то трапеция называется р а в н о б е д р е н н о й.



Черт. 252



Черт. 253



Черт. 254

Трапеция $ABOM$ равнобедренная, так как $AM = BO$ (черт 253).

Трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна к основанию, называется п р я м о у г о л ь н о й (черт. 254).

С р е д н е й л и н и е й трапеции называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Т е о р е м а. ***Средняя линия трапеции параллельна каждому из её оснований и равна их полусумме.***

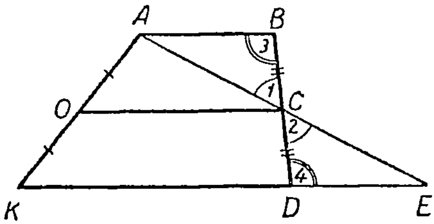
Д а н о: OC — средняя линия трапеции $ABDK$, т. е. $OK = OA$ и $BC = CD$ (черт. 255).

Надо доказать:

1) $OC \parallel KD$ и $OC \parallel AB$;

2) $OC = \frac{KD + AB}{2}$.

Доказательство. Через точки A и C проведём прямую, пересекающую продолжение основания KD в некоторой точке E.



Черт. 255

В треугольниках ABC и DCE: $BC = CD$ — по условию; $\angle 1 = \angle 2$, как вертикальные, $\angle 4 = \angle 3$, как внутренние накрест лежащие при параллельных AB и KE и секущей BD. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle DCE$.

Отсюда $AC = CE$, т. е. OC является средней линией треугольника KAE.

Следовательно (§ 48):

1) $OC \parallel KE$ и, значит, $OC \parallel KD$ и $OC \parallel AB$;

2) $OC = \frac{KE}{2} = \frac{KD + DE}{2}$, но $DE = AB$ (из равенства треугольников ABC и DCE), поэтому отрезок DE можно заменить равным ему отрезком AB. Тогда получим:

$$OC = \frac{KD + AB}{2}.$$

Теорема доказана.

Упражнения.

1. Доказать, что сумма внутренних углов трапеции, прилежащих к каждой боковой стороне, равна $2d$.
2. Доказать, что углы при основании равнобедренной трапеции равны.
3. Доказать, что если углы при основании трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.
4. Доказать, что диагонали равнобедренной трапеции равны между собой.
5. Доказать, что если диагонали трапеции равны, то эта трапеция равнобедренная.
6. Доказать, что периметр фигуры, образованной отрезками, соединяющими середины сторон четырёхугольника, равен сумме диагоналей этого четырёхугольника.
7. Доказать, что прямая, проходящая через середину одной из боковых сторон трапеции параллельно её основаниям, делит другую боковую сторону трапеции пополам.

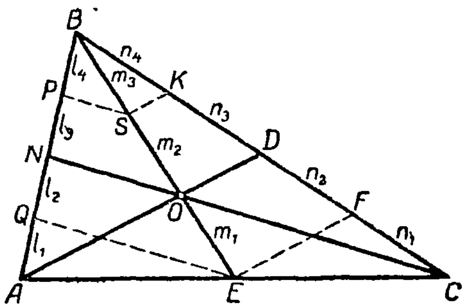
§ 50. СВОЙСТВА МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА.

Теорема. ***Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.***

Пусть в треугольнике ABC (черт. 256) AD и BE — медианы, пересекающиеся в точке O. Докажем, что и отрезок NC, проходящий через третью вершину этого треугольника и точку O, будет также медианой, т. е. $AN = NB$.

Для доказательства через точку E проведём $EF \parallel AD$, тогда $CF = FD$. Разделим отрезок BD пополам; пусть $DK = KB$. Получим $n_1 = n_2 = n_3 = n_4$, как половины равных отрезков CD и BD.

Через точку K проведём $KS \parallel AD$; тогда $m_1 = m_2 = m_3$, так как $KS \parallel OD \parallel EF$ и $n_4 = n_3 = n_2$.



Черт. 256

Через точки S и E проведём $SP \parallel ON$ и $EQ \parallel ON$, тогда $l_4 = l_3 = l_2$, так как $SP \parallel ON \parallel EQ$ и $m_3 = m_2 = m_1$. Кроме того, $l_2 = l_1$, так как $AE = EC$ и $EQ \parallel CN$. Отсюда $l_4 = l_3 = l_2 = l_1$, но $l_4 + l_3 = NB$, а $l_2 + l_1 = NA$.

Следовательно, $AN = NB$, т. е. NC является также медианой треугольника ABC.

Таким образом, все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Кроме того, мы видим (черт. 256), что отрезок OE составляет $\frac{1}{3}$ BE. Аналогично можно доказать, что отрезок ON составляет $\frac{1}{3}$ CN и отрезок OD составляет $\frac{1}{3}$ AD. Таким образом, ***точка пересечения медиан в треугольнике отделяет от каждой медианы третью часть, считая от соответствующей стороны.***

ГЛАВА V.

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР.

§ 51. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ. ПАЛЕТКА.

В жизни часто приходится вычислять площади геометрических фигур.

Например, приходится определять площадь поля, огорода, спортивной площадки или определять площадь пола в здании, площадь стен или окон в комнате.

При всяком измерении необходимо заранее иметь меру, с которой сравнивается измеряемая величина. При взвешивании употребляются меры веса: килограмм, грамм, тонна, центнер. Время измеряется часами, минутами, секундами.

При измерении длины отрезка мы сравниваем его с метром, сантиметром или с какой-нибудь другой мерой длины. При измерении углов пользуемся угловыми градусами, минутами.

Точно так же при измерении площадей геометрических фигур пользуются особыми мерами, с которыми сравниваются эти фигуры.

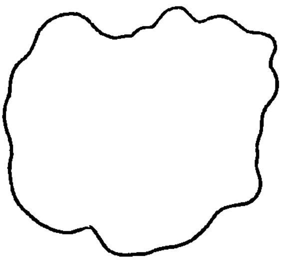
Такими мерами являются квадраты, стороны которых равны какой-нибудь линейной мере: метру, дециметру, сантиметру, миллиметру. При измерении площадей, имеющих большие размеры, за меру может быть принят квадрат, сторона которого равна километру.

Квадрат, сторона которого равна какой-нибудь линейной единице, называется квадратной единицей: квадратным метром, квадратным сантиметром, квадратным километром и т. д., в зависимости от того, какой линейной мере равняется сторона квадрата, принятого за единицу измерения.

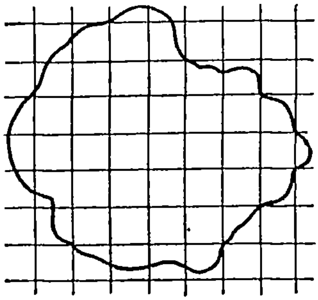
Измерить площадь какой-нибудь геометрической фигуры — значит узнать, сколько тех или иных квадратных единиц содержится в фигуре, площадь которой измеряется.

Палетка. В тех случаях, когда измерение площади какой-нибудь фигуры не требует большой точности, а также когда фигура, площадь которой требуется измерить, ограничена криволинейным контуром (черт. 257), для измерения площади употребляется особый прибор, называемый палеткой.

Палетка представляет собой прозрачную пластинку, на которую наносится масштабная квадратная сетка, например, со стороной квадрата, равной 1 *см*.



Черт. 257



Черт. 258

Эта пластинка накладывается на фигуру, площадь которой требуется измерить (черт. 258).

Сначала подсчитывается число квадратов, полностью укладывающихся в данной фигуре; на чертеже 258 их 26. Затем подсчитывается число квадратов, пересекаемых контуром фигуры; на чертеже их 21.

Каждый из неполных квадратов принимается за половину квадрата, таким образом, их общая площадь приближённо составит $21 : 2 = 10{,}5$ квадрата.

Общее число квадратов, заключающихся в измеряемой фигуре, таким образом, составит $26 + 10{,}5 = 36{,}5$ квадрата. Если, например, каждый квадрат в действительности соответствует 1 *кв. м*, то измеряемая площадь составит 36,5 *кв. м*.

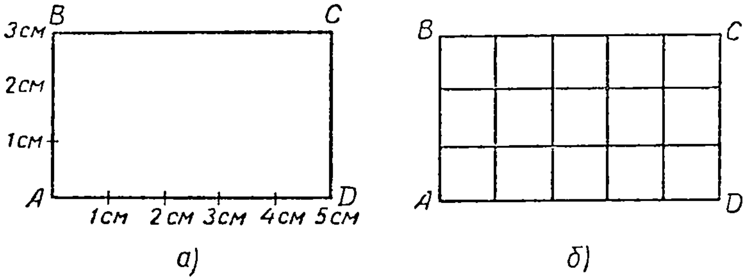
Однако измерение площадей с помощью палетки не отличается точностью, утомительно, поэтому на практике чаще всего пользуются более совершенными и точными способами измерения площадей, которые по существу сводятся к измерению длин отрезков и использованию особых формул.

В последующих параграфах мы рассмотрим некоторые формулы, с которыми наиболее часто приходится иметь дело на практике.

§ 52. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.

Пусть нужно определить площадь прямоугольника, одна сторона которого равна, например, 5 *см*, а сторона, смежная с ней, равна 3 *см*, или, как принято говорить, основание данного прямоугольника равно 5 *см*, высота — 3 *см* (черт. 259, *а*).

Если отложим на основании и высоте прямоугольника от вершины A отрезки, равные 1 *см*, и через полученные точки деления проведём прямые, параллельные сторонам прямоугольника (черт. 259, *б*), то прямоугольник окажется покрытым сеткой квадратов (как палеткой). Вдоль основания AD уложится 5 квадратов, т. е. столько, сколько сантиметров составляет длина основания прямоугольника.



Черт. 259

Таких полос получится 3, т. е. столько, сколько сантиметров составляет высота прямоугольника. Поэтому вся площадь прямоугольника составит

$$5 \text{ кв. см} \cdot 3 = 15 \text{ кв. см}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда длины сторон прямоугольника выражены дробными числами. Например, пусть основание прямоугольника $a = 5{,}4$ *см*, а высота $h = 1{,}6$ *см*.

Чтобы определить площадь прямоугольника, выразим длины его сторон в миллиметрах:

$$a = 54 \text{ мм}, \quad h = 16 \text{ мм}.$$

Тогда площадь прямоугольника, выраженная в квадратных миллиметрах, будет равна произведению чисел 54 и 16, т. е.

$$S = (54 \cdot 16) \quad \text{кв. мм}.$$

Чтобы получить ответ в квадратных сантиметрах, надо число, выражающее площадь прямоугольника в квадратных миллиметрах, разделить на число, показывающее, сколько квадратных миллиметров составляют один квадратный сантиметр, т. е. на $(10 \cdot 10)$ *кв. мм*, так как квадратный сантиметр — это прямоугольник, длина и ширина которого содержат по 10 *мм*.

Получим:

$$S = \left(\frac{54 \cdot 16}{10 \cdot 10}\right) \text{ кв. см} = \left(\frac{54}{10} \cdot \frac{16}{10}\right) \text{ кв. см} = (5{,}4 \cdot 1{,}6) \text{ кв. см}.$$

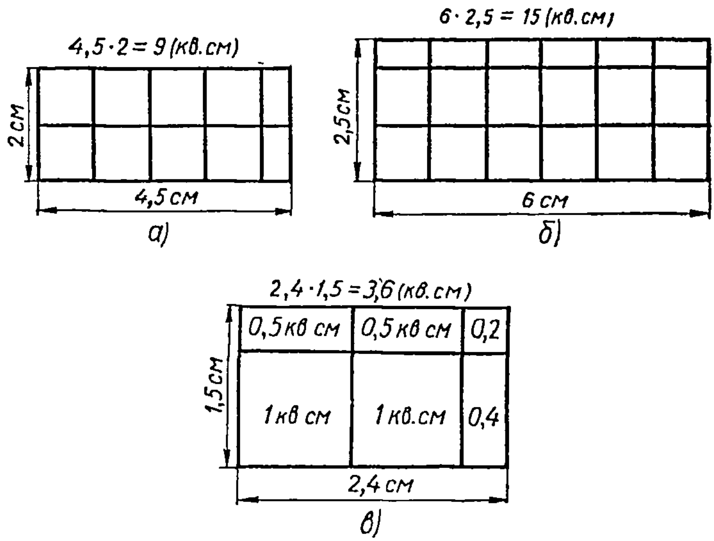
Таким образом, чтобы вычислить площадь прямоугольника, надо число, выражающее длину основания прямоугольника, умножить на число, выражающее длину его высоты в мерах того же наименования. Произведение этих чисел и выразит площадь прямоугольника в квадратных мерах того же наименования.

Для краткости говорят: ***площадь прямоугольника равна произведению его основания на высоту.***

Записывается это так: $S = a \cdot h$, где S — площадь прямоугольника, a — его основание, h — высота, выраженные в мерах одного наименования.

В тех случаях, когда основание и высота прямоугольника выражены в мерах различного наименования, необходимо предварительно выразить их в мерах одного наименования. Например, если основание прямоугольника равно 1,15 *м*, а высота равна 24 *см*, то нужно или 1,15 *м* выразить в сантиметрах, или 24 *см* выразить в долях метра. Получим: или 115 *см* $\times$ 24 *см* = 2760 *кв. см*, или 1,15 *м* $\times$ $\times$ 0,24 *м* = 0,276 *кв. м*. 2760 *кв. см* записывается ещё и так: 2760 *см*^{2}, а 0,276 *кв. м* можно записать так: 0,276 *м*^{2}.

Можно и другим способом проверить справедливость формулы площади прямоугольника, т. е. формулы $S = ah$, для случаев, когда одно или оба измерения прямоугольника выражаются дробными числами. На чертежах 260, *а*, *б*, *в* изображены такие прямоугольники.



Черт. 260

Чтобы определить площадь любого прямоугольника, например, в квадратных сантиметрах, достаточно подсчитать, сколько квадратных сантиметров полностью покрывают данный прямоугольник.

Такой подсчёт покажет, что:

на чертеже 260, *а* площадь прямоугольника равна 9 *кв. см*;
на чертеже 260, *б* площадь прямоугольника равна 15 *кв. см*;
на чертеже 260, *в* площадь прямоугольника равна 3,6 *кв. см*.

Если вычислим площадь каждого из данных прямоугольников по формуле $S = ah$, то получим точно такие же ответы. Значит, формула $S = ah$ для данных прямоугольников справедлива.

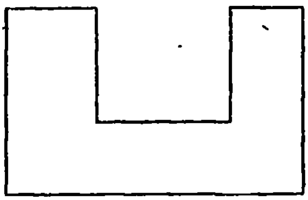
Подобным образом можно убедиться в справедливости формулы $S = ah$ для любого прямоугольника.

Доказать справедливость формулы $S = ah$ для прямоугольника, у которого $a = 3\frac{1}{3}$ *см* и $h = 2,5$ *см*.

Упражнения.

1. Вычислить площадь прямоугольника, длину или высоту по следующим данным:

	a	h	S		a	h	S
1	30 *см*	6 *см*	—	9	48 *см*	—	240 *см*^{2}
2	1 *м* 20 *см*	8 *см*	—	10	—	56 *см*	1120 *см*^{2}
3	14 *мм*	6 *мм*	—	11	30 *см*	—	1,2 *м*^{2}
4	1,8 *см*	5 *мм*	—	12	—	250 *см*	1 *м*^{2}
5	12 *км*	8 *км*	—	13	0,7 *м*	—	0,56 *м*^{2}
6	125 *км*	140 *м*	—	14	—	0,9 *м*	0,72 *м*^{2}
7	1,2 *м*	65 *см*	—	15	0,06 *км*	—	0,3 *км*^{2}
8	1 *км* 125 *м*	760 *м*	—	16	—	0,35 *км*	0,56 *км*^{2}



Черт. 261

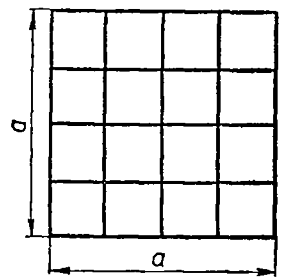
2. Вычислить площадь стен вашего класса (вашей комнаты) и составить формулу, обозначив длину класса через a, ширину—через b и высоту — через c.

3. Вычислить площадь фигуры, изображённой на чертеже 261, разбив её на прямоугольники и принимая 1 *мм* за 1 *м*.

4. Вычислить площадь школьного двора (школьного огорода).

§ 53. ПЛОЩАДЬ КВАДРАТА.

Так как квадрат есть прямоугольник, у которого основание и высота равны, то для вычисления площади квадрата достаточно измерить одну его сторону и полученное число возвести в квадрат, т. е. помножить само на себя. Полученное число и выражает площадь данного квадрата.



Черт. 262

Если сторону квадрата обозначить через a, то площадь его будет равна a^2. $S_{\text{квадрата}} = a \cdot a = a^2$ (черт. 262).

Упражнения.

1. Вычислить площадь квадрата, если его сторона равна 4 *см* (8 *м*, 12 *мм*, 1,2 *м*, 4,5 *км*, 4 *м* 50 *см*, 0,4 *м*, 0,15 *м*).
2. Сколько квадратных метров содержит участок в один гектар, если он имеет форму квадрата со стороной, равной 100 *м*?
3. Сколько квадратных метров содержит ар, если он имеет форму квадрата со стороной, равной 10 *м*?
4. Сколько аров содержит гектар?

§ 54. ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ ЧИСЕЛ.

При вычислении площадей различных квадратов приходится возводить число в квадрат. Чтобы ускорить и облегчить выполнение этой операции, обыкновенно пользуются таблицами квадратов чисел.

В школе пользуются четырёхзначными математическими таблицами В. М. Брадиса, в которых дано подробное описание их устройства и объяснено, как ими пользоваться.

§ 55. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ. ТАБЛИЦА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ ИЗ ЧИСЕЛ.

Возведение числа в квадрат является несложной операцией, в особенности если пользоваться таблицей квадратов чисел. Несколько сложнее обратная операция — извлечение из числа квадратного корня.

Пусть, например, перед нами поставлена задача: «Найти сторону квадрата, площадь которого равна 100 *кв. см*».

Если обозначить сторону квадрата через x, тогда $x^2 = 100$. Значит, x — это число, квадрат которого равен 100. Такое число называется квадратным корнем из 100 и записывается так: $\sqrt{100}$. Знак $\sqrt{}$ называется р а д и к а л о м.

В данной задаче можно легко подобрать ответ к ней: $\sqrt{100} = 10$. Точно так же легко устно решаются такие задачи: $\sqrt{121} = 11$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{400} = 20$; $\sqrt{900} = 30$ и т. д.

Труднее решить задачу, когда приходится извлекать квадратный корень из многозначного числа, например из 1296, 47 841 и т. д. В этом случае дело значительно облегчается, если воспользоваться таблицами В. М. Брадиса, в которых указаны приёмы извлечения точных и приближённых квадратных корней из чисел.

§ 56. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ.

1. Вычислить площадь пола вашего класса, коридора.
2. Вычислить площадь пола вашей комнаты (квартиры).
3. Вычислить площадь окна вашего класса (без переплётов).

П р и м е ч а н и е. Площадь окна без переплётов называется световой площадью.

4. Вычислить световую площадь всех окон вашего класса и найти её отношение к площади пола. Вычислить то же для вашей комнаты.

5. Измерить площадь какого-нибудь земельного участка, имеющего форму прямоугольника, и выразить её в гектарах и арах.

6. Вычислить площадь земельного участка прямоугольной формы по следующим данным (результат выразить в арах):

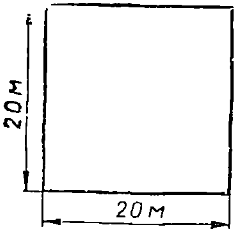
Длина	Ширина	Площадь (в арах)
30 м	20 м	—
48 м	32 м	—
12 м	7,5 м	—
9,4 м	6,8 м	—

7. Вычислить площадь земельного участка прямоугольной формы по следующим данным:

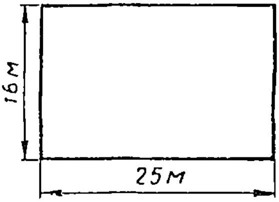
Длина	Ширина	Площадь (в гектарах)
240 м	150 м	—
128 м	105 м	—
326 м	242 м	—
428 м	351 м	—
637 м	492 м	—

§ 57. РАВНОВЕЛИКИЕ ФИГУРЫ.

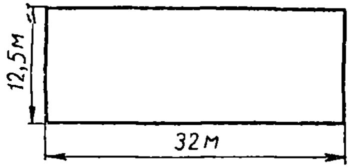
Вычислить площади прямоугольников, изображённых на чертежах 263, 264, 265.



Черт. 263



Черт. 264



Черт. 265

Измерения этих прямоугольников (длина и ширина) различны, однако площади их оказались равными. Геометрические фигуры, площади которых равны, называются **равновеликими**.

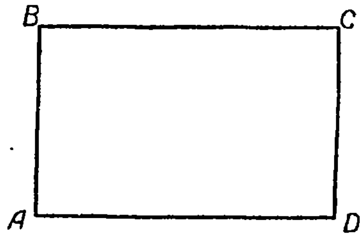
Упражнения.

1. Для пришкольного огорода решили отвести земельный участок площадью в один гектар. Какую длину и ширину может иметь пришкольный огород прямоугольной формы?

2. Для опытной делянки решили отвести участок в один ар. Какую длину и ширину может иметь этот участок, если он будет иметь форму прямоугольника?

3. Сделать необходимые измерения и вычислить площадь прямоугольника $ABCD$ (черт. 266), а затем построить несколько равновеликих ему прямоугольников.

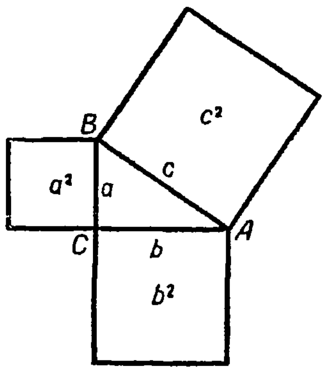
4. Какая разница между равными фигурами и равновеликими?



Черт. 266

§ 58. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА[1].

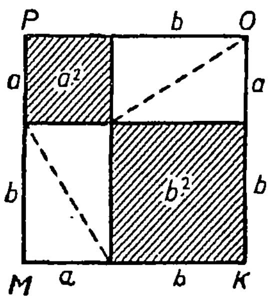
Пусть дан прямоугольный треугольник, стороны которого a, b и c (черт. 267).



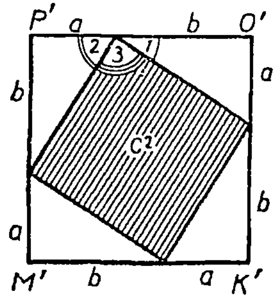
Черт. 267

Построим на его сторонах квадраты. Площади этих квадратов соответственно равны a^2, b^2 и c^2. Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Построим два квадрата $MKOP$ и $M'K'O'P'$ (черт. 268, 269), приняв за сторону каждого из них отрезок, равный сумме катетов прямоугольного треугольника ABC. Выполнив в этих квадратах построения, показанные на чертежах 268 и 269, мы увидим, что квадрат $MKOP$ разбился на два квадрата с площадями a^2 и b^2 и четыре равных прямоугольных треугольника, каждый из кото-



Черт. 268



Черт. 269

[1] Пифагор — греческий учёный, живший около 2500 лет назад (564 — 473 гг. до нашей эры).

рых равен прямоугольному треугольнику ABC. Квадрат $M'K'O'P'$ разбился на четырёхугольник (он на чертеже 269 заштрихован) и четыре прямоугольных треугольника, каждый из которых также равен треугольнику ABC. Заштрихованный четырёхугольник — квадрат, так как стороны его равны (каждая равна гипотенузе треугольника ABC, т. е. c), а углы прямые ($\angle 1 + \angle 2 = 90°$, откуда $\angle 3 = 90°$).

Таким образом, сумма площадей квадратов, построенных на катетах (на чертеже 268 эти квадраты заштрихованы), равна площади квадрата $MKOP$ без суммы площадей четырёх равных треугольников, а площадь квадрата, построенного на гипотенузе (на чертеже 269 этот квадрат тоже заштрихован), равна площади квадрата $M'K'O'P'$, равного квадрату $MKOP$, без суммы площадей четырёх таких же треугольников. Следовательно, площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

Получаем формулу $c^2 = a^2 + b^2$, где c — гипотенуза, a и b — катеты прямоугольного треугольника.

Теорему Пифагора кратко принято формулировать так:

Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

Из формулы $c^2 = a^2 + b^2$ можно получить такие формулы:

$$a^2 = c^2 - b^2; \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Этими формулами можно пользоваться для нахождения неизвестной стороны прямоугольного треугольника по двум данным его сторонам. Например: а) если даны катеты $a = 4$ *см*, $b = 3$ *см*, то можно найти гипотенузу (c): $c^2 = a^2 + b^2$, т. е. $c^2 = 4^2 + 3^2$; $c^2 = 25$, откуда $c = \sqrt{25} = 5$ (*см*);

б) если даны гипотенуза $c = 17$ *см* и катет $a = 8$ *см*, то можно найти другой катет (b):

$$b^2 = c^2 - a^2, \text{ т. е. } b^2 = 17^2 - 8^2;\ b^2 = 225,$$
$$\text{откуда } b = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)}.$$

Следствие. ***Если в двух прямоугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ гипотенузы c и c_1 равны, а катет b треугольника ABC больше катета b_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то катет a треугольника ABC меньше катета a_1 треугольника $A_1B_1C_1$.*** (Сделать чертеж, иллюстрирующий это следствие.)

В самом деле, на основании теоремы Пифагора получим:

$$a^2 = c^2 - b^2;$$
$$a_1^2 = c_1^2 - b_1^2.$$

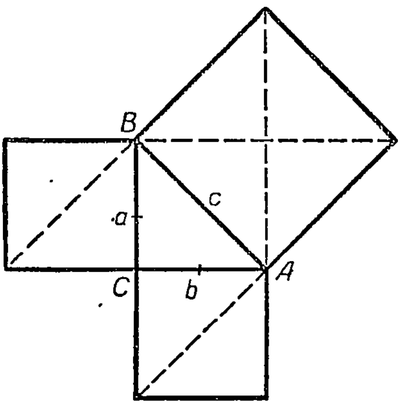
В записанных формулах уменьшаемые равны, а вычитаемое в первой формуле больше вычитаемого во второй формуле, следовательно, первая разность меньше второй, т. е. $a^2 < a_1^2$. Откуда $a < a_1$.

Упражнения.

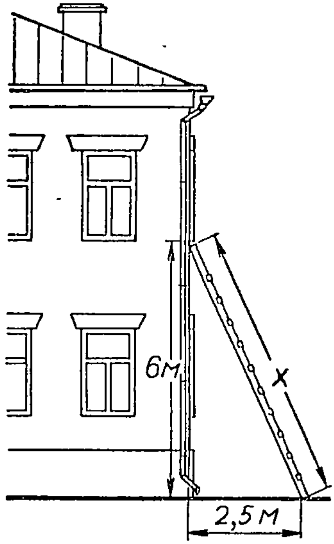
1. Пользуясь чертежом 270, доказать теорему Пифагора для равнобедренного прямоугольного треугольника.

2. Один катет прямоугольного треугольника равен 12 *см*, другой — 5 *см*. Вычислить длину гипотенузы этого треугольника.

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10 *см*, один из катетов равен 8 *см*. Вычислить длину другого катета этого треугольника.



Черт. 270



Черт. 271

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 37 *см*, один из его катетов равен 35 *см*. Вычислить длину другого катета этого треугольника.

5. Построить квадрат, по площади вдвое больший данного.

6. Построить квадрат, по площади вдвое меньший данного.

Указание. Провести в данном квадрате диагонали. Квадраты, построенные на половинах этих диагоналей, будут искомыми.

7. Катеты прямоугольного треугольника соответственно равны 12 *см* и 15 *см*. Вычислить длину гипотенузы этого треугольника с точностью до 0,1 *см*.

8. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 *см*, один из его катетов равен 15 *см*. Вычислить длину другого катета с точностью до 0,1 *см*.

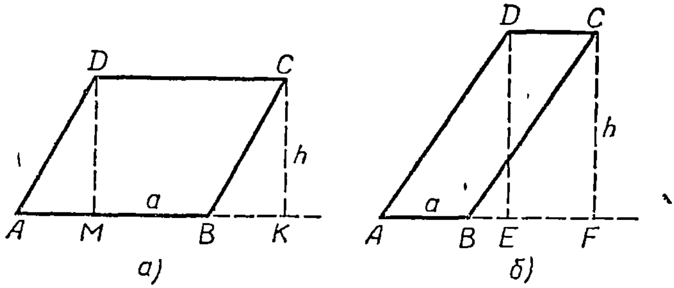
9. Какой длины должна быть лестница, чтобы её можно было приставить к окну, находящемуся на высоте 6 *м*, если нижний конец лестницы должен отстоять от здания на 2,5 *м*? (Черт. 271.)

§ 59. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА.

Пусть требуется найти площадь параллелограмма $ABCD$ (черт. 272, a). Примем сторону AB за основание параллелограмма и из вершин D и C проведём высоты DM и CK. Площадь полученного прямоугольника $MKCD$ равна произведению MK на DM.

Треугольники ADM и BCK равны, так как они имеют по равной гипотенузе и по равному катету: $AD = BC$ и $DM = CK$.

Параллелограмм $ADCB$ состоит из трапеции $MDCB$ и треугольника ADM, прямоугольник $MDCK$ состоит из той же трапеции $MDCB$ и треугольника BCK, который равен треугольнику ADM. Следовательно, площадь параллелограмма равна площади прямоугольника.



Черт. 272

Отсюда площадь параллелограмма равна также произведению MK на DM. Но $MK = AB$ ($MK = DC = AB$), поэтому площадь параллелограмма будет равна произведению AB на DM, т. е. ***площадь параллелограмма равняется произведению его основания на высоту.***

$S_{\text{параллелограмма}} = a \cdot h$, где a — основание параллелограмма и h — его высота.

Несколько иное рассуждение придётся применить для вывода формулы площади параллелограмма, изображённого на чертеже 272, б, где $ABCD$ — данный параллелограмм, а $EFCD$ — вспомогательный прямоугольник.

$$S_{ABCD} = S_{AFCD} - S_{BCF},$$

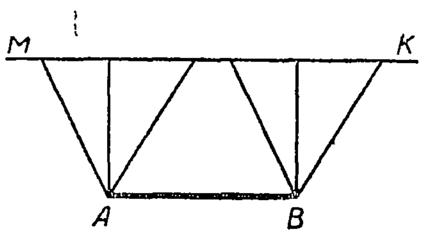
$$S_{EFCD} = S_{AFCD} - S_{ADE}, \text{ но}$$

$$\triangle BCF = \triangle ADE, \text{ следовательно,}$$

$$S_{ABCD} = S_{EFCD} = CD \cdot CF, \text{ т. е.}$$

$$S_{ABCD} = a \cdot h.$$

Упражнения.



Черт. 273

1. Доказать, что если на отрезке AB как на основании построить несколько параллелограммов, второе основание которых будет лежать на прямой MK, параллельной AB, то все эти параллелограммы будут равновелики (черт. 273).

2. Вычислить площадь параллелограмма по следующим данным:

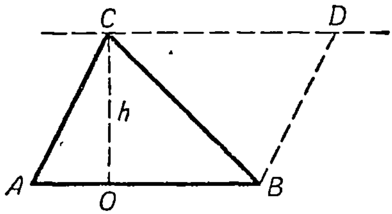
a	h	S
25 *мм*	14 *мм*	—
48 *м*	30 *м*	—
16,2 *см*	12,5 *см*	—
1,4 *м*	25 *см*	—
3,2 *см*	14 *мм*	—

3. Площадь параллелограмма равна 128 *кв. м*; основание его равно 16 *м*. Вычислить длину высоты параллелограмма.

4. Площадь параллелограмма равна 720 *кв. см*; высота его равна 12,5 *см*. Вычислить длину основания параллелограмма.

§ 60. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Пусть требуется определить площадь треугольника ABC. Проведём через вершины его C и B (черт. 274) прямые, параллельные сторонам AB и AC. Мы получим параллелограмм $ABDC$. Площадь его равна произведению основания AB на высоту CO. Параллелограмм $ABDC$ состоит из двух равных треугольников ABC и BCD, следовательно, площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, т. е. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CO$. Отсюда, ***площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.***



Черт. 274

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Эту формулу можно представить в таком виде:

$$S_{\triangle} = \frac{a}{2} \cdot h, \text{ или } S_{\triangle} = a \cdot \frac{h}{2}.$$

Выразить эти формулы словами.

Упражнения.

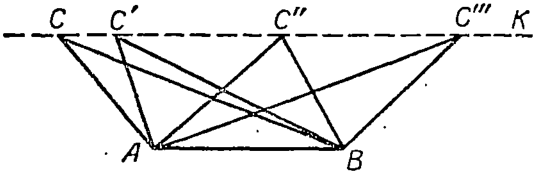
1. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

2. Вычислить площадь треугольника по следующим данным:

Основание	Высота	Площадь
32 *см*	18 *см*	—
1 *м* 15 *см*	64 *см*	—
1,2 *м*	1,4 *м*	—
42,5 *мм*	18 *мм*	—

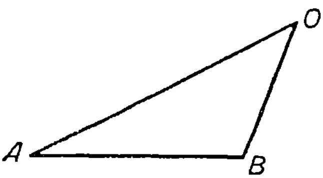
3. Площадь треугольника равна 360 *кв. см* (288 *кв. см*). Основание его равно 72 *см*. Вычислить высоту треугольника.

4. Площадь треугольника равна 240 *кв. мм*, высота его равна 200 *мм* (30 *мм*, 8 *см*). Вычислить основание треугольника.

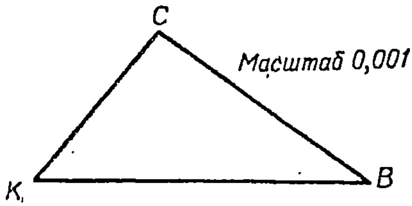


Черт. 275

5. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая CK, параллельная стороне треугольника AB (черт. 275). Доказать, что все треугольники, построенные на стороне AB как на основании с вершиной на прямой CK, равновелики.



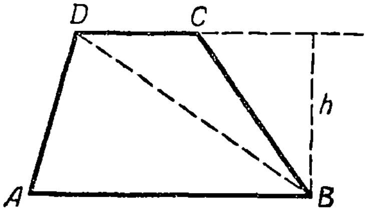
Черт. 276



Черт. 277

6. Сделать необходимые построения и измерения и вычислить:
а) площадь треугольника AOB (черт. 276);
б) площадь треугольника CBK (черт. 277).

§ 61. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ.



Черт. 278

Пусть нам нужно узнать, чему равняется площадь трапеции $ABCD$ (черт. 278). Проведём в ней диагональ DB. Трапеция разобьётся на два треугольника ADB и DCB. Обозначим высоту трапеции и треугольников через h, а площади треугольников ADB и DBC — через S_1 и S_2. Тогда

$$S_1 = \frac{AB \cdot h}{2}; \quad S_2 = \frac{DC \cdot h}{2}.$$

Следовательно, площадь всей трапеции выразится так:

$$S_{ABCD} = \frac{AB \cdot h}{2} + \frac{DC \cdot h}{2} = \frac{(AB + DC)\,h}{2} = \frac{AB + DC}{2} \cdot h.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.

$S_{\text{трапеции}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — основания трапеции, а h — её высота.

Упражнения.

1. Найти площадь трапеции по следующим данным:

a	b	h	S
38 *см*	25 *см*	12 *см*	—
45,5 *см*	16,8 *см*	75 *см*	—
425 *мм*	328 *мм*	12 *см*	—

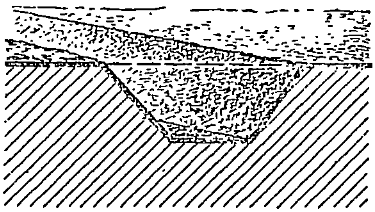
2. Площадь трапеции равна 480 *кв. см*; высота её равна 12 *см*; одно из оснований на 6 *см* больше другого.

Вычислить основания этой трапеции.

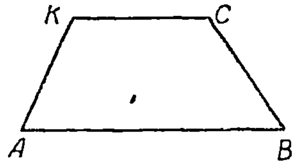
3. Площадь трапеции равна 960 *кв. м*; одно основание её равно 60 *м*, другое — 36 *м*. Чему равна высота этой трапеции?

4. Площадь трапеции равна 1200 *кв. см*, высота её равна 24 *см*. Одно основание больше другого в 3 раза. Вычислить основания этой трапеции.

5. Сечение канавы имеет форму трапеции (черт. 279). Одно основание её равно 90 *см*, другое — 56 *см*; высота трапеции — 65 *см*. Вычислить площадь сечения этой канавы.



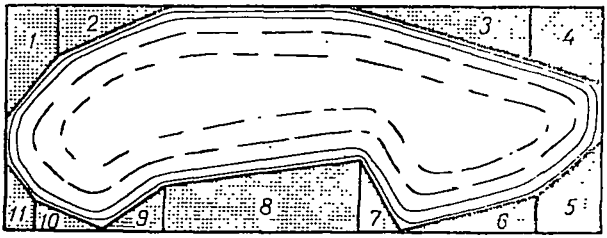
Черт. 279



Черт. 280

6. Сделать необходимые построения и измерения и вычислить площадь трапеции $ABCK$ (черт. 280).

7. По данному плану и масштабу (черт. 281) вычислить площадь пруда.



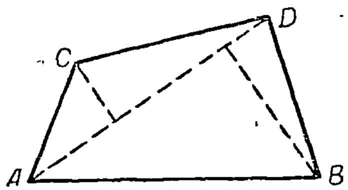
Масштаб 0,001

Черт. 281

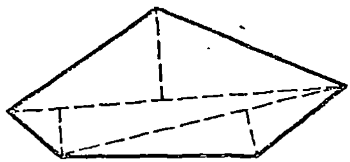
Указание. Сделать необходимые измерения и сначала вычислить площадь большого прямоугольника, а затем из его площади вычесть сумму площадей фигур 1—11, принимая их за треугольники и трапеции.

§ 62. ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА.

Пусть требуется вычислить площадь произвольного четырёхугольника $ACDB$ (черт. 282). Проведём в нём диагональ, например AD. Получим два треугольника ABD и ACD, площади которых вычислять умеем. Затем находим сумму площадей этих треугольников. Полученная сумма и будет выражать площадь данного четырёхугольника.



Черт. 282



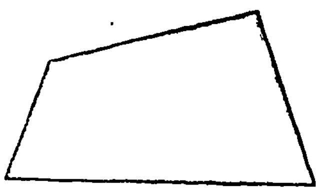
Черт. 283

Если нужно вычислить площадь пятиугольника, то поступаем таким же образом (черт. 283). Из одной какой-нибудь вершины проводим диагонали. Получим три треугольника, площади которых можем вычислить. Значит, можем найти и площадь данного пятиугольника. Так же поступаем при вычислении площади любого многоугольника.

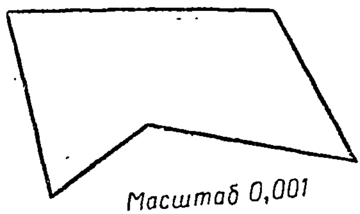
Упражнения.

1. Сделать необходимые построения и измерения и вычислить площадь четырёхугольника, изображённого на чертеже 284.

2. По данному плану земельного участка вычислить его площадь (черт. 285).



Черт. 284



Черт. 285

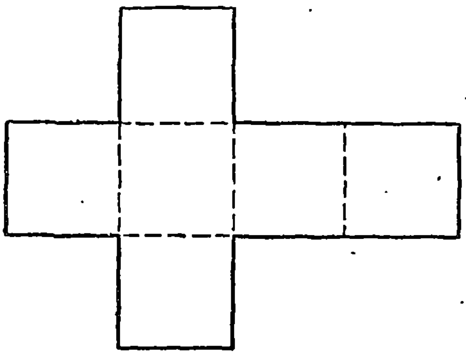
ГЛАВА VI.

ПРЯМАЯ ПРИЗМА. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЁМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ.

§ 63. КУБ.

1. Построение модели куба.

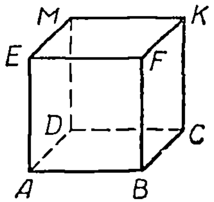
На чертеже 286 изображена выкройка, или, как её принято называть, р а з в ё р т к а, геометрического тела. Она состоит из шести равных квадратов. Если эту развёртку согнуть надлежащим образом по указанным на чертеже пунктирным линиям, то мы получим



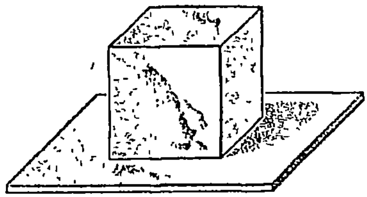
Черт. 286

геометрическое тело, называемое к у б о м. Под номером 287 дан чертёж куба, а под номером 288 дан рисунок куба. Куб ограничен шестью равными квадратами, которые называются его г р а н я м и. На рисунке видны только три его грани, а на чертеже можно видеть все шесть граней. Любые две противоположные грани куба называются его о с н о в а н и я м и, тогда остальные четыре его грани называются б о к о в ы м и гранями; отрезки, которые получаются при пересечении граней куба, называются его р ё б р а м и. У куба 12 рёбер. Все они равны между собой.

При пересечении трёх граней куба образуются точки, которые называются его **вершинами**. У куба 8 вершин.



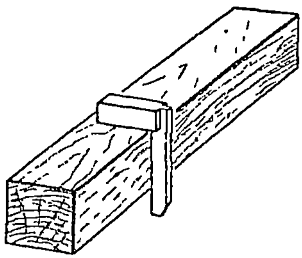
Черт. 287

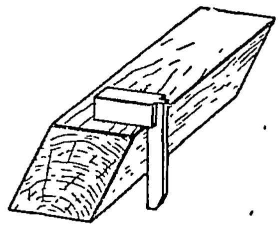

Черт. 288

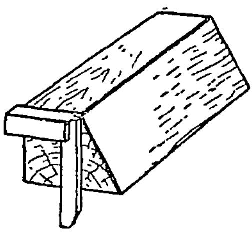
2. Взаимное положение рёбер и граней куба.

Противоположные грани куба параллельны. Плоскости, в которых лежат эти грани, не пересекаются, т. е. не имеют общих точек. Параллельные плоскости мы наблюдаем на многих окружающих нас предметах; например, плоскости пола и потолка в комнате параллельны. В кубе можно наблюдать и пересекающиеся плоскости. Пересекаясь, плоскости образуют **двугранные** углы. Модель двугранных углов можно получить, сгибая лист картона или бумаги по прямой линии.

Двугранные углы можно получить острые, прямые и тупые. Грани куба пересекаются под прямым углом. Под прямым углом


Черт. 289


Черт. 290

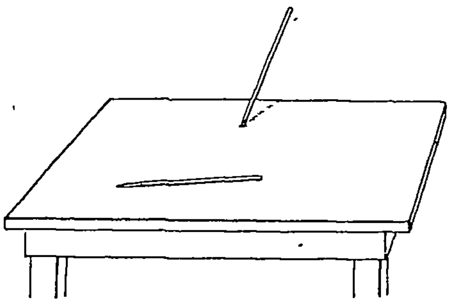

Черт. 291

пересекаются также стены в комнате, стены и потолок, стены и пол. Плоскости, пересекающиеся под прямым углом, называются перпендикулярными. Перпендикулярность плоскостей проверяется с помощью угольника. На чертеже 289 плоскости при пересечении образуют прямой угол. На чертеже 290 и на чертеже 291 показаны плоскости, которые при пересечении не образуют прямого угла; в первом случае они пересекаются под острым углом, во втором случае — под тупым.

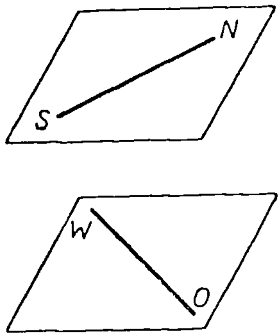
Рёбра куба, находящиеся на одной грани (черт. 287), или пересекаются под прямым углом ($EA \perp AB$, $KC \perp BC$ и т. д.), или параллельны ($EF \parallel AB$, $BC \parallel KF$ и т. д.).

3. Скрещивающиеся прямые.

Рёбра куба, например KC и AB (черт. 287), не параллельны, но и не пересекутся, сколько бы их ни продолжать. Прямые, которые не параллельны и не пересекаются, называются **скрещивающимися**. Легко получить модели скрещивающихся прямых. Например, две иглы, из которых одна положена на стол, а другая воткнута в стол так, что не пересекает первую, представляют собой модель двух скрещивающихся прямых (черт. 292). Эти две прямые не пересекаются и не параллельны; легко убедиться, что через них нельзя провести плоскость.



Черт. 292



Черт. 293

Точно так же, если взять две дощечки, поместить их параллельно друг другу и затем на одну из них положить палочку в направлении, например, с юга на север, а на другую — в направлении с запада на восток, то эти две палочки образуют модель скрещивающихся прямых (черт. 293).

Эти две прямые тоже не пересекаются, не параллельны, и через них также нельзя провести плоскость.

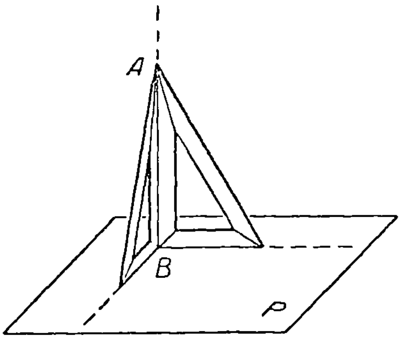
Найдите модели скрещивающихся прямых на окружающих предметах, например, в классной комнате.

4. Прямая, перпендикулярная к плоскости.

Рассматривая куб (черт. 287), заметим, что ребро FB образует прямые углы с рёбрами BC и AB, лежащими на нижнем основании куба. Это же ребро FB образует прямые углы с любой прямой, проведённой в плоскости основания куба через точку B. Ребро FB является перпендикуляром к плоскости основания куба.

Перпендикуляром к плоскости называется прямая, которая пересекает плоскость в какой-нибудь точке и перпендикулярна к любой прямой, проведённой в этой плоскости через ту же точку.

Чтобы провести перпендикуляр к плоскости, берут два чертёжных треугольника и ставят их так, чтобы два катета лежали на плоскости, как показано на чертеже 294, а другую пару катетов совмещают. Эти два катета и образуют перпендикуляр к данной плоскости. На чертеже 294 прямая AB перпендикулярна к плоскости P.



Черт. 294

Перпендикулярность прямой AB к плоскости P легко проверить: для этого надо взять ещё один чертёжный треугольник и несколько раз в различных положениях приложить его к двум первым треугольникам так, чтобы его катет всякий раз совмещался с катетом AB. Тогда другой катет третьего треугольника всё время будет находиться в плоскости P. Значит, можно считать проверенным, что прямая AB образует прямые углы с любой прямой, проведённой на плоскости через её основание, т. е. является перпендикуляром к плоскости.

Таким образом, мы приходим к выводу: ***если прямая, пересекающая плоскость в какой-нибудь точке О, перпендикулярна к двум прямым, проведённым на плоскости через точку О, то эта прямая перпендикулярна к плоскости.***

Этот вывод является признаком перпендикулярности прямой к плоскости.

Через любую произвольно взятую точку можно провести перпендикуляр к данной плоскости, но только один.

Длина перпендикуляра, опущенного из какой-нибудь точки на плоскость, называется р а с с т о я н и е м от этой точки до плоскости.

5. Площадь поверхности куба.

Чтобы вычислить площадь поверхности куба, достаточно вычислить площадь одной его грани и полученное число помножить на 6. Если ребро куба обозначить через a, то площадь поверхности одной его грани будет равна a^2, а площадь всей поверхности куба (полная поверхность) составит $6a^2$.

$S = 6a^2$, где S — площадь полной поверхности куба.

Площадь поверхности его оснований составит $2a^2$. Площадь поверхности боковых его граней составит $4a^2$.

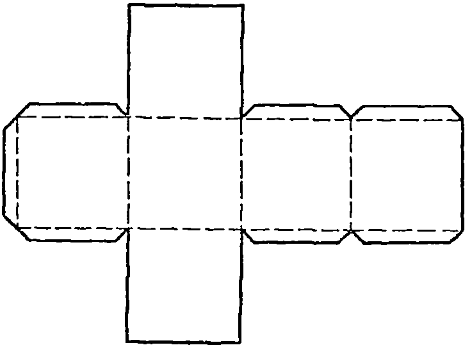
Упражнения.

1. Ребро куба равно 8 *см* (10 *см*, 12 *см*, 20 *см*). Вычислить площадь всей его поверхности; площадь оснований, площадь его боковой поверхности.

2. Площадь полной поверхности куба равна 150 *кв. см* (600 *кв. см*, 216 *кв. см*, 864 *кв. см*). Вычислить длину его ребра.

3. Площадь боковой поверхности куба равна 100 *кв. см* (64 *кв. см*, 324 *кв. см*, 576 *кв. см*). Вычислить площадь его полной поверхности

4. Сделать из плотной бумаги модель куба, ребро которого равно 8 *см*.



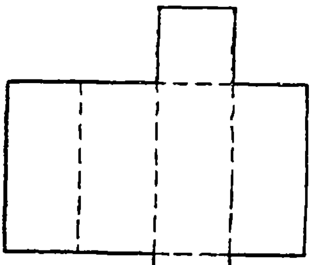
Черт 295

Указание. Для того чтобы полученное геометрическое тело сохраняло свою форму, у развёртки куба необходимо сделать небольшие закраины (черт. 295). Если их подклеить, они составят каркас, который придаст необходимую жёсткость модели.

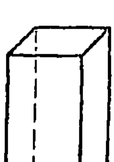
5. Сколько потребуется белил для окраски с обеих сторон бака (без крышки), имеющего форму куба с ребром в 80 *см*, если на окраску 1 *кв. м* требуется белил 0,25 *кг*?

§ 64. ПРЯМАЯ ПРИЗМА.

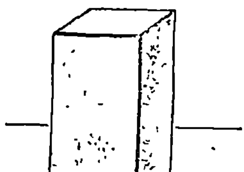
1. На чертеже 296 изображена развёртка геометрического тела. Она состоит из двух квадратов и четырёх равных прямоугольников.



Черт. 296



Черт. 297

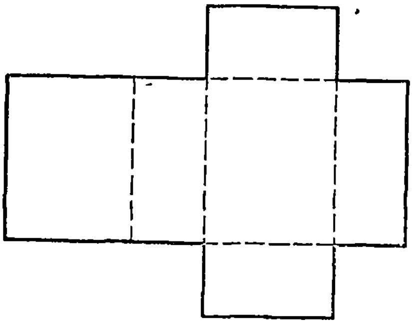


Черт. 298

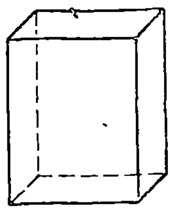
Если эту развёртку согнуть надлежащим образом по пунктирным линиям, то получим геометрическое тело, называемое **прямой четырёхугольной призмой**. У этой призмы все боковые рёбра перпендикулярны к плоскости основания.

Под номером 297 дан чертеж такой призмы, а на чертеже 298 — её рисунок.

Развёртка прямой четырехугольной призмы может состоять и из шести прямоугольников (черт. 299). Под номером 300 дан чертеж такой призмы, а на чертеже 301 дан её рисунок.



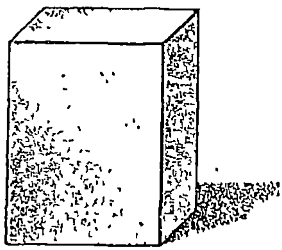
Черт 299



Черт. 300

Прямая четырехугольная призма имеет, как и куб, 6 граней, 12 ребер и 8 вершин.

Призма, все грани которой прямоугольники, называется **прямоугольным параллелепипедом**.



Черт. 301

Длина и ширина основания прямоугольного параллелепипеда считаются длиной и шириной **самого параллелепипеда**, а любое из его боковых ребер принимается за **высоту прямоугольного параллелепипеда**. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда называются его **измерениями**.

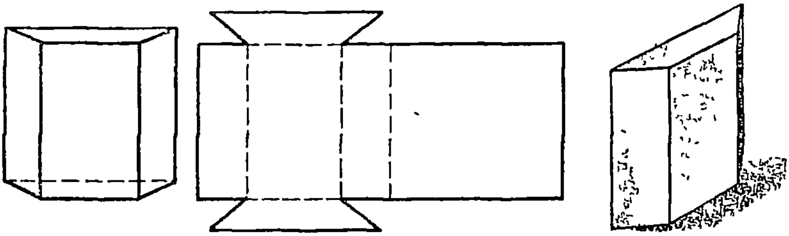
Прямоугольный параллелепипед является весьма распространенной фигурой в окружающей действительности. Форму прямоугольного параллелепипеда имеют дома, комнаты, шкафы, кузова грузовых машин, железобетонные плиты для постройки домов, кирпичи и т. д.

Упражнения.

1. Начертить прямоугольный параллелепипед. Указать:
   а) параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся прямые,
   б) параллельные плоскости, перпендикулярные плоскости,
   в) прямые, перпендикулярные к плоскости.

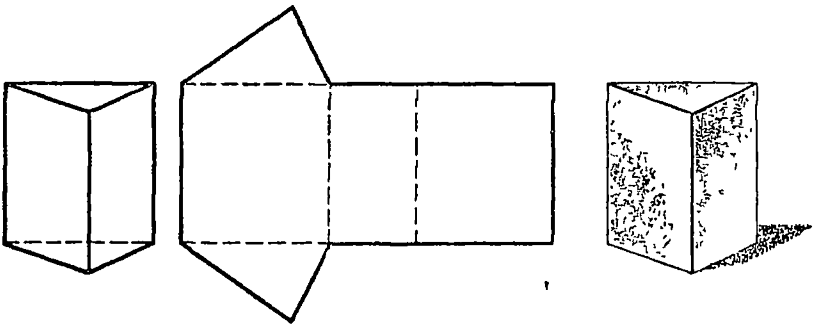
2. Сформулировать определение:
   а) параллельных прямых,
   б) скрещивающихся прямых;
   в) прямых, перпендикулярных к плоскости.
3. Построить модели·
   а) скрещивающихся прямых;
   б) двугранных углов.
4 Сформулировать признак перпендикулярности прямой к плоскости.
5. Объяснить, как построить плоскость, перпендикулярную к данной прямой.

2. Прямая призма может иметь в основании не только квадрат или прямоугольник, но и любую другую прямолинейную фигуру·



Черт. 302

параллелограмм, трапецию (черт. 302), треугольник (черт 303) и вообще многоугольник. В прямой призме за высоту принимается любое из её боковых рёбер.



Черт 303

В прямой призме, у которой основаниями служат трапеции, параллельными гранями являются только основания и одна пара боковых граней (черт. 302) В прямой призме, у которой основаниями служат трапеции, параллелограммы или треугольники, могут быть как прямые, так острые и тупые двугранные углы. В этом можно убедиться с помощью угольника.

3. Вычисление площади поверхности прямой призмы.

Площадью боковой поверхности или, короче, боковой поверхностью прямой призмы называется сумма площадей её боковых граней. Площадью полной поверхности или, короче, полной поверхностью прямой призмы называется сумма площадей обоих оснований и площади боковой поверхности.

Площади боковых граней и оснований вычисляются по соответствующим формулам.

Упражнения.

1. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 12 *см*, 8 *см* и 20 *см*. Вычислить площадь его полной поверхности, сумму площадей оснований и площадь боковой поверхности.

2. Обозначив длину, ширину и высоту прямоугольного параллелепипеда через a, b и c, выразить в виде формулы: 1) сумму площадей оснований, 2) площадь боковой поверхности, 3) площадь полной поверхности.

3. Вычислить площадь полной поверхности прямой призмы, имеющей в основании параллелограмм, по следующим данным:

	Основание параллелограмма	Высота параллелограмма	Вторая сторона параллелограмма	Высота призмы	S
а)	10 *см*	6 *см*	8 *см*	25 *см*	
б)	8,5 *см*	7,2 *см*	7,8 *см*	1,2 *см*	
в)	12 *см*	0,5 *м*	0,7 *м*	35 *см*	

4. Чисто обрезанная доска имеет в длину 6,5 *м*, ширина её 32 *см*, толщина 4 *см*. Вычислить площадь ее полной поверхности.

5. Вычислить площадь полной поверхности вашей классной комнаты и её боковую поверхность.

6. Вычислить площадь полной поверхности прямой призмы, основание которой имеет форму равностороннего треугольника со стороной в 8 *см*, а высота призмы равна 20 *см*.

7 Вычислить площадь полной поверхности прямой призмы, основание которой имеет форму равнобедренной трапеции с параллельными сторонами в 12 *см* и 9 *см*, высота трапеции равна 6 *см*, а высота самой призмы равна 1 *м* 15 *см*.

8. Вычислить площадь полной поверхности прямой призмы, основание которой имеет форму прямоугольного треугольника с катетами в 25 *см* и 18,4 *см*, а высота призмы равна 38 *см*.

9. Вычислить площадь полной поверхности моделей призм, имеющихся в математическом кабинете школы, сделав предварительно необходимые измерения.

10. На плотной бумаге начертить развертку двух прямоугольных параллелепипедов: с квадратным основанием и с основанием, имеющим форму прямоугольника, — и сделать из этих разверток два прямоугольных параллелепипеда.

11. На плотной бумаге начертить развертки прямых призм с основаниями в виде параллелограмма, трапеции, равностороннего треугольника, прямоугольного треугольника, разностороннего треугольника и сделать из этих разверток модели прямых призм.

§ 65. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ОБЪЁМОВ.

Для измерения объёмов тел пользуются особыми мерами.

Такими мерами являются кубы, рёбра которых равны какой-нибудь линейной мере. метру, дециметру, сантиметру, миллиметру. Куб, ребро которого равно какой-нибудь линейной единице, называется кубической единицей: кубическим метром, кубическим дециметром и т. д., *в зависимости от того, какой линейной мере* равняется ребро куба, принятого за единицу измерения.

Мы можем представить себе куб, ребро которого равно километру, тогда получается кубический километр.

Чтобы измерить объём какого-нибудь тела, надо узнать, сколько тех или иных кубических единиц содержится в этом теле.

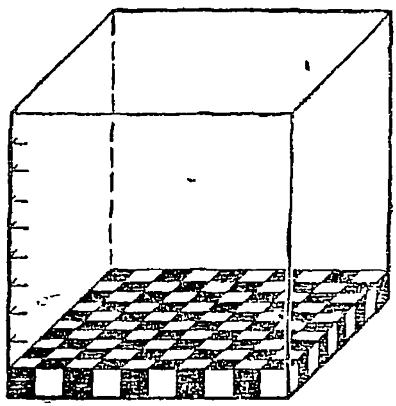
В некоторых случаях объём можно определить непосредственно опытным путём. Например, если нужно узнать, сколько кубических дециметров воды или какой-нибудь другой жидкости помещается в некотором сосуде, достаточно взять полый кубический дециметр и путём переливания узнать, скольким кубическим дециметрам равняется объём (или, иначе, вместимость) измеряемого сосуда.

Однако измерить объём путём непосредственного опыта далеко не всегда возможно. Чаще всего объём геометрического тела приходится устанавливать лишь путём вычислений на основании особых правил, выведенных для различных геометрических тел, имеющих ту или иную форму.

§ 66. КУБИЧЕСКИЕ МЕРЫ.

1. Зависимость между метрическими мерами объёма.

Посмотрим, какая зависимость существует между кубическим метром и кубическим дециметром. Если на основании кубического метра мы будем устанавливать кубические дециметры, то их в один слой уложится столько, сколько квадратных дециметров содержится в основании куба, т. е. $10 \cdot 10 = 100$ кубических дециметров (черт. 304). Высота этого слоя будет равна одному дециметру; чтобы заполнить кубическими дециметрами весь куб, нужно будет заполнить 10 таких слоев по 100 кубических дециметров в каждом, т. е. всего в кубическом метре уложится $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ кубических дециметров. Таким образом, 1 куб. метр = 1000 куб. дециметров.



Черт. 304

Так же мы можем вычислить, сколько содержится в кубическом метре кубических сантиметров.

1 куб. метр $= 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$ куб. сантиметров.

Рассуждая таким же образом, мы найдём, что:

1 куб. метр $= 1000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 1\,000\,000\,000$ куб. миллиметров.

1 куб. дециметр $= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ куб. сантиметров.

1 куб. дециметр $= 100 \cdot 100 \cdot 100 = 1\,000\,000$ куб. миллиметров.

1 куб. сантиметр $= 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ куб. миллиметров.

2. Объём куба.

Вообще, если длину ребра куба мы обозначим через a, то, для того чтобы вычислить его объём, нужно длину ребра возвести в куб, т. е. $a \cdot a \cdot a$. Получаем формулу:

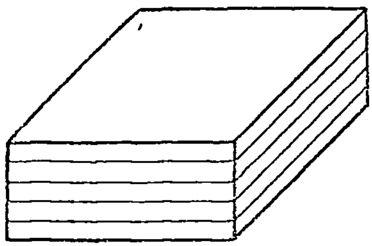
$V = a^3$, где V — объём куба, a — его ребро.

§ 67. ОБЪЁМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА.

1. Вывод формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, измерения которого выражены целыми числами.

Пусть нам нужно вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, длина основания которого равна 20 *см*, ширина — 12 *см* и высота — 5 *см* (черт. 305)

Площадь основания этого параллелепипеда будет равна $20 \cdot 12 = 240$ (*кв. см*). Значит, на его основании в один слой можно уложить 240 кубических сантиметров. Всего таких слоёв будет пять. Объём данного параллелепипеда будет равен $240 \cdot 5 = 1200$ (*куб. см*).



Черт. 305

Если длину основания прямоугольного параллелепипеда обозначим через a, ширину его — через b и высоту параллелепипеда — через c, то получим формулу:

$V = abc$, где V — объём прямоугольного параллелепипеда.

Произведение ab выражает площадь основания прямоугольного параллелепипеда, а c — его высоту. Следовательно, в этом случае объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.

Примечание. Длина, ширина и высота параллелепипеда должны быть измерены одной и той же мерой.

2. Вывод формулы объёма прямоугольного параллелепипеда, измерения которого выражены дробными числами.

Пусть нужно вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, у которого все или некоторые измерения выражены дробными числами. Например, длина равна 18,5 *м*, ширина — 12,4 *м*, высота — 10,4 *м*. Выразим эти измерения прямоугольного параллелепипеда в дециметрах; тогда длина данного параллелепипеда будет равна 185 *дм*, ширина — 124 *дм*, высота — 104 *дм*, т. е. измерения его выразятся целыми числами. В таком случае объём V прямоугольного параллелепипеда, как доказано, вычисляется по формуле $V = (185 \cdot 124 \cdot 104)$ *куб. дм*.

Чтобы объём выразить в кубических метрах, надо число, выражающее объём в кубических дециметрах, разделить на число, показывающее, сколько кубических дециметров составляют 1 кубический метр, т. е. на 10^3.

Получим:

$$V = \left(\frac{185 \cdot 124 \cdot 104}{10^3}\right) \textit{куб. м} = \left(\frac{185}{10} \cdot \frac{124}{10} \cdot \frac{104}{10}\right) \textit{куб. м} =$$

$$= (18{,}5 \cdot 12{,}4 \cdot 10{,}4) \textit{ куб. м}.$$

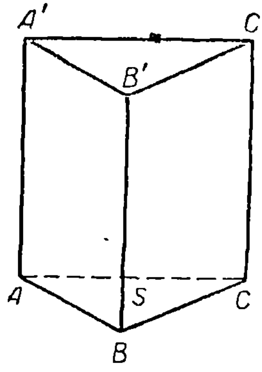
Таким образом, объём прямоугольного параллелепипеда выражается формулой $V = abc$ и в том случае, когда длина a, ширина b и высота c выражаются дробными числами в единицах одного и того же наименования.

Полученную формулу можно также записать в виде $V = (ab)\,c$; ab выражает площадь основания параллелепипеда, поэтому полученная формула показывает, что ***объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту.***

§ 68. ОБЪЁМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ.

1. Объём прямой треугольной призмы.

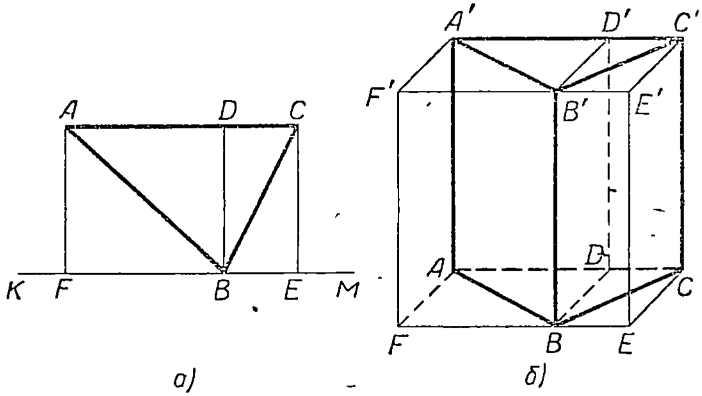
Пусть требуется найти объём прямой треугольной призмы, площадь основания которой равна S, а высота равна $h = AA' = BB' = CC'$ (черт. 306)



Черт. 306

Начертим отдельно основание призмы, т. е. треугольник ABC (черт. 307, *а*), и достроим его до прямоугольника, для чего через вершину B проведём прямую $KM \parallel AC$ и из точек A и C опустим на эту прямую перпендикуляры AF и CE. Получим прямоугольник $ACEF$. Проведя высоту BD треугольника ABC, увидим, что прямоугольник $ACEF$ разбился на 4 прямоугольных треугольника. Причём $\triangle BCE =$

$= \triangle BCD$ и $\triangle BAF = \triangle BAD$. Значит, площадь прямоугольника $ACEF$ вдвое больше площади треугольника ABC, т. е. равна $2S$.



Черт. 307

К данной призме с основанием ABC пристроим призмы с основаниями BCE и BAF и высотой h (черт. 307, *б*). Получим прямоугольный параллелепипед с основанием $ACEF$.

Если этот параллелепипед рассечём плоскостью, проходящей через прямые BD и BB', то увидим, что прямоугольный параллелепипед состоит из 4 призм с основаниями BCD, BCE, BAD и BAF.

Призмы с основаниями BCD и BCE могут быть совмещены, так как основания их равны ($\triangle BCD = \triangle BCE$) и также равны их боковые рёбра, являющиеся перпендикулярами к одной плоскости. Значит, объёмы этих призм равны. Также равны объёмы призм с основаниями BAD и BAF.

Таким образом, оказывается, что объём данной треугольной призмы с основанием ABC вдвое меньше объёма прямоугольного параллелепипеда с основанием $ACEF$.

Нам известно, что объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, т. е. в данном случае равен $2Sh$. Отсюда объём данной прямой треугольной призмы равен Sh.

Объём прямой треугольной призмы равен произведению площади её основания на высоту.

2. Объём прямой многоугольной призмы.

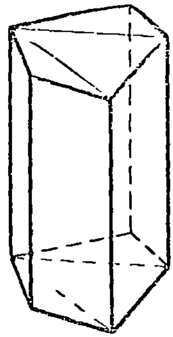
Чтобы найти объём прямой многоугольной призмы, например пятиугольной, с площадью основания S и высотой h, разобьём её на треугольные призмы (черт. 308). Обозначив площади основания треугольных призм через S_1, S_2 и S_3, а объём данной многоугольной призмы через V, получим:

$$V = S_1 h + S_2 h + S_3 h,$$

или

$$V = (S_1 + S_2 + S_3) h.$$

И окончательно: $V = Sh$.



Черт. 308

Таким же путём выводится формула объёма прямой призмы, имеющей в основании любой многоугольник.

Значит, ***объём любой прямой призмы равен произведению площади её основания на высоту.***

Упражнения.

1. Вычислить объём прямой призмы, имеющей в основании параллелограмм, по следующим данным:

	Основание параллелограмма	Высота параллелограмма	Высота призмы	Объем призмы
а)	30 *см*	8 *см*	45 *см*	
б)	17,5 *см*	6,4 *см*	35 *см*	
в)	6,5 *м*	4,8 *м*	10 *м*	
г)	4,8 *дм*	35 *см*	0,4 *м*	

2. Вычислить объём прямой призмы, имеющей в основании треугольник, по следующим данным:

	Основание треугольника	Высота треугольника	Высота призмы	Объем призмы
а)	18 *см*	9 *см*	20 *см*	
б)	0,7 *м*	0,65 *м*	1,2 *м*	
в)	0,65 *м*	48 *см*	1,5 *м*	

3. Вычислить объём прямой призмы, имеющей в основании равносторонний треугольник со стороной в 12 *см* (32 *см*, 40 *см*). Высота призмы 60 *см*.

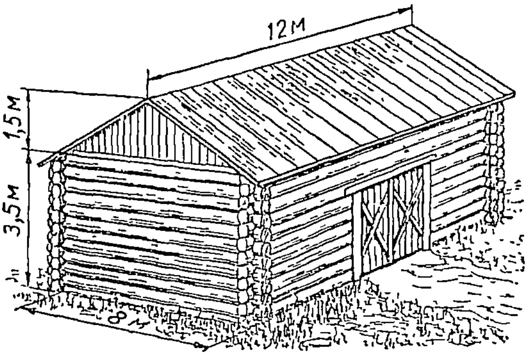
4. Вычислить объём прямой призмы, имеющей в основании прямоугольный треугольник с катетами в 12 *см* и 8 *см* (16 *см* и 7 *см*; 9 *м* и 6 *м*). Высота призмы 0,3 *м*.

5. Вычислить объём прямой призмы, имеющей в основании трапецию с параллельными сторонами в 18 *см* и 14 *см* и высотой в 7,5 *см*. Высота призмы 40 *см*.

6. Вычислить объём вашей классной комнаты (физкультурного зала, своей комнаты).

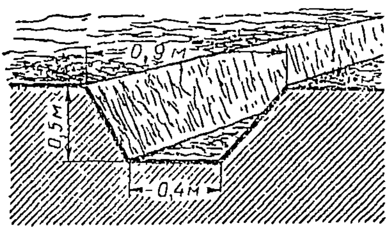
7. Полная поверхность куба равна 150 $см^2$ (294 $см^2$, 864 $см^2$). Вычислить объём этого куба.

8. Длина строительного кирпича — 25,0 *см*, ширина его — 12,0 *см*, толщина — 6,5 *см*. а) Вычислить его объём. б) Определить его вес, если 1 кубический сантиметр кирпича весит 1,6 *г*.



Черт. 309

9. Сколько штук строительного кирпича потребуется для постройки сплошной кирпичной стены, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, длиной 12 *м*, шириной 0,6 *м* и высотой 10 *м*? (Размеры кирпича взять из упражнения 8.)



Черт. 310

10. Длина чисто обрезанной доски равна 4,5 *м*, ширина — 35 *см* и толщина — 6 *см*. а) Вычислить ее объём. б) Определить её вес, если 1 кубический дециметр доски весит 0,6 *кг*.

11. Сколько тонн сена можно уложить в сеновал, покрытый двускатной крышей (черт. 309), если длина сеновала равна 12 *м*, ширина — 8 *м*, высота — 3,5 *м* и высота конька крыши равна 1,5 *м*? (Удельный вес сена принять за 0,2).

12 Требуется выкопать канаву длиной 0,8 *км*; в разрезе канава должна иметь форму трапеции с основаниями в 0,9 *м* и 0,4 *м*, и глубина канавы должна равняться 0,5 *м* (черт. 310). Сколько кубометров земли придется при этом вынуть?

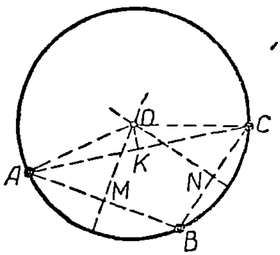
Г Л А В А VII.

ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ЦИЛИНДР.

§ 69. ПОСТРОЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ ПО ТРЕМ ДАННЫМ ТОЧКАМ.

З а д а ч а. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, провести окружность.*

Пусть нам даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой (черт. 311). Соединим эти точки отрезками AB и BC. Чтобы найти точки, равноудалённые от точек A и B, разделим отрезок AB пополам и через его середину (точку M) проведём прямую, перпендикулярную к AB. Каждая точка этого перпендикуляра одинаково удалена от точек A и B (§ 27, п. 4).



Черт. 311

Чтобы найти точки, равноудалённые от точек B и C, разделим отрезок BC пополам и через его середину (точку N) проведём прямую, перпендикулярную к BC. Каждая точка этого перпендикуляра одинаково удалена от точек B и C.

Точка O пересечения этих перпендикуляров будет находиться на одинаковом расстоянии от данных точек A, B и C ($AO = BO = CO$). Если мы, приняв точку O за центр круга, радиусом, равным AO, проведём окружность, то она пройдёт через все данные точки A, B и C.

Точка O является единственной точкой, которая может служить центром окружности, проходящей через три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, так как два перпендикуляра к отрезкам AB и BC могут пересечься только в одной точке. Значит, задача имеет единственное решение.

П р и м е ч а н и е. Если три точки A, B и C будут лежать на одной прямой, то задача не будет иметь решения, так как перпендикуляры к отрезкам AB и BC будут параллельны и не будет существовать точки, одинаково удалённой от точек A, B, C, т. е. точки, которая могла бы служить центром искомой окружности.

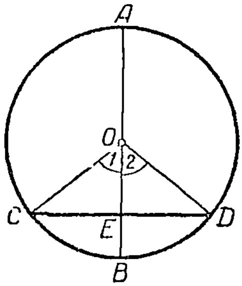
Если соединить отрезком точки A и C и середину этого отрезка (точку K) соединить с центром окружности O, то OK будет перпендикулярна к AC (черт 311), так как в равнобедренном треугольнике AOC OK является медианой, поэтому $OK \perp AC$.

Следствие. ***Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведённые через их середины, пересекаются в одной точке.***

§ 70. ДИАМЕТР, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЙ К ХОРДЕ.

Теорема 1. ***Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам.***

Пусть диаметр AB перпендикулярен к хорде CD (черт. 312). Требуется доказать, что $CE = ED$, $\smile CB = \smile BD$, $\smile CA = \smile DA$.



Черт 312

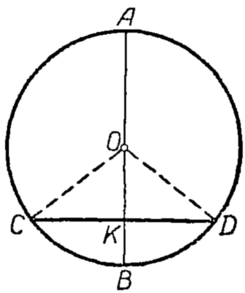
Соединим точки C и D с центром окружности O. В равнобедренном треугольнике COD отрезок EO является высотой, проведенной из вершины O на основание CD; следовательно, OE является и медианой и биссектрисой, т. е. $CE = ED$ и $\angle 1 = \angle 2$.

Но $\angle 1$ и $\angle 2$ суть центральные углы. Отсюда равны и соответствующие им дуги, а именно $\smile CB = \smile BD$. Дуги CA и DA также равны между собой, как дополняющие равные дуги до полуокружности.

Теорема 2 (обратная). ***Диаметр, проведённый через середину хорды, не проходящей через центр, перпендикулярен к ней и делит дуги, стягиваемые хордой, пополам.***

Пусть диаметр AB делит хорду CD пополам. Требуется доказать, что $AB \perp CD$, $\smile CB = \smile BD$ и $\smile CA = \smile AD$ (черт. 313).

Соединим точки C и D с центром круга. Получим равнобедренный треугольник COD, в котором OK является медианой, а значит, и высотой. Следовательно, $AB \perp CD$, а отсюда (по теореме 1) следует, что $\smile CA = \smile AD$; $\smile CB = \smile BD$.



Черт 313

Теорема 3 (обратная). ***Диаметр, проведённый через середину дуги, делит пополам хорду, стягивающую эту дугу, и перпендикулярен к этой хорде.***

Пусть диаметр AB делит дугу CBD пополам (черт. 313). Требуется доказать, что $CK = KD$ и $AB \perp CD$.

Соединим центр круга O с точками C и D. В равнобедренном треугольнике COD отрезок OK является биссектрисой угла COD, так как по условию теоремы $\smile CB = \smile BD$, поэтому OK будет и медианой и высотой этого треугольника. Следовательно, диаметр AB проходит через середину хорды и перпендикулярен к ней.

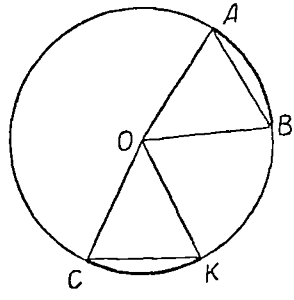
§ 71. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ХОРДАМИ И ДУГАМИ.

Докажем ряд теорем, устанавливающих зависимость между хордами и их дугами в одной и той же окружности или в равных окружностях.

При этом будем иметь в виду дуги, меньшие полуокружности.

Теорема 1. ***Равные дуги стягиваются равными хордами.***

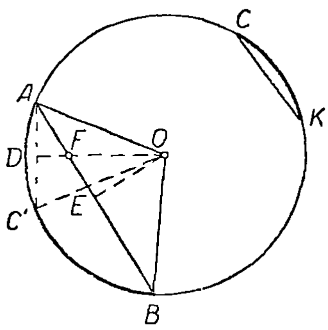
Пусть дуга AB равна дуге CK. Требуется доказать, что и хорда AB равна хорде CK (черт. 314).



Черт 314

Доказательство. Соединим концы хорд с центром окружности —точкой O. Полученные треугольники AOB и KOC равны, так как имеют по две соответственно равные стороны (радиусы одной окружности) и по равному углу, заключённому между этими сторонами (эти углы равны как центральные, соответствующие равным дугам). Следовательно, $AB=CK$.

Теорема 2 (обратная). ***Равные хорды стягивают равные дуги.***



Черт 315

Пусть хорда AB равна хорде CK. Требуется доказать, что дуга AB равна дуге CK (черт. 314).

Доказательство. Соединим концы хорд с центром окружности— точкой O. Полученные треугольники AOB и KOC равны по трём соответственно равным сторонам. Следовательно, равны углы AOB и COK; но углы эти центральные, соответствующие дугам AB и CK; из равенства этих углов следует равенство дуг: $\smile AB = \smile CK$.

Теорема 3. ***Бо́льшая дуга стягивается и большей хордой.***

Пусть дуга AB больше дуги CK (черт. 315).

Требуется доказать, что хорда AB больше хорды CK.

Доказательство. Передвинем по окружности дугу CK так, чтобы точка K совместилась с точкой A, тогда точка C займет положение C' на дуге AB между точками A и B, дуга CK примет положение дуги AC', а хорда CK примет положение хорды AC'. Проведём радиусы в точки A, B и C'. Опустим из центра O перпендикуляры OE и OD на хорды AB и AC'. В треугольнике OFE отрезок OE — катет, а отрезок OF — гипотенуза, поэтому $OF > OE$, а значит, и $OD > OE$

Рассмотрим теперь треугольники OAD и OAE. В этих треугольниках гипотенуза OA общая, а катет OE меньше катета OD, тогда по следствию из теоремы Пифагора (§ 58) катет AE больше катета AD. Но эти катеты составляют половины хорд AB и AC', значит, и хорда AB больше хорды AC'. Вследствие равенства хорд AC' и CK получаем $AB > CK$.

Теорема 4 (обратная). ***Большая хорда стягивает и большую дугу.***

Пусть хорда AB больше хорды CK.

Требуется доказать, что дуга AB больше дуги CK (черт. 315).

Между дугами AB и CK может существовать только одно из трёх следующих соотношений: $\smile AB < \smile CK$;

$$\smile AB = \smile CK;$$
$$\smile AB > \smile CK.$$

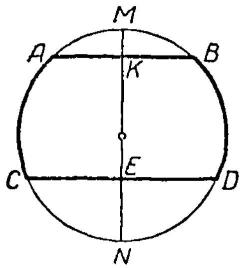
Но дуга AB не может быть меньше дуги CK, так как тогда по прямой теореме хорда AB была бы меньше хорды CK, а это противоречит условию теоремы.

Дуга AB не может быть равна дуге CK, так как тогда хорда AB равнялась бы хорде CK, а это тоже противоречит условию. Следовательно, $\smile AB > \smile CK$.

§ 72. СВОЙСТВО ДУГ, ЗАКЛЮЧЁННЫХ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ХОРДАМИ.

Теорема. ***Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.***

Пусть хорда AB параллельна хорде CD (черт. 316). Требуется доказать, что $\smile AC = \smile BD$. Проведём диаметр $MN \perp AB$. Так как $CD \parallel AB$, то $MN \perp CD$. Перегнём чертёж по диаметру MN так, чтобы правая часть совпала с левой.



Черт. 316

Тогда точка B совпадёт с точкой A, так как они симметричны относительно оси NM ($AB \perp MN$ по построению и $AK = KB$).

Аналогично точка D совпадёт с точкой C. Отсюда $\smile AC = \smile BD$.

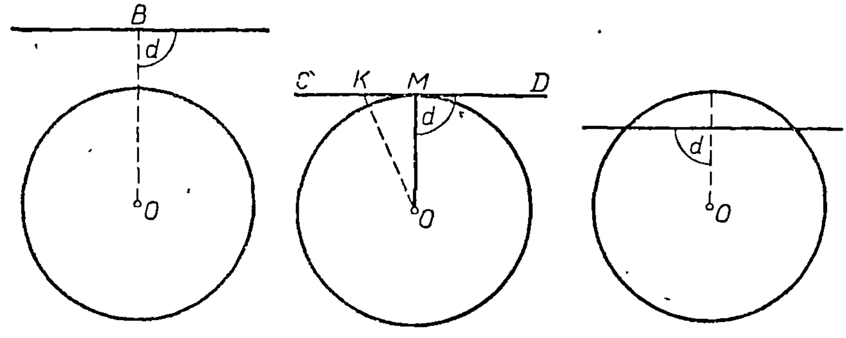
§ 73. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ.

1. Возможны следующие три случая взаимного положения прямой и окружности:

1) Прямая не имеет с окружностью ни одной общей точки (черт. 317).

2) Прямая с окружностью имеет только одну общую точку (черт. 318).

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности.



Черт. 317 Черт. 318 Черт. 319

3) Прямая имеет с окружностью две общие точки (черт. 319). Такая прямая называется **секущей**.

2. Теоремы о касательной к окружности.

Теорема 1. ***Прямая, перпендикулярная к радиусу в конечной его точке, лежащей на окружности, является касательной к окружности.***

Пусть OM — радиус окружности, $CD \perp OM$ (черт. 318).

Требуется доказать, что CD — касательная к окружности.

Доказательство. Если $OM \perp CD$, то расстояние от центра O до любой другой точки прямой CD больше радиуса OM, следовательно, всякая точка прямой CD, кроме точки M, лежит вне круга. Поэтому точка M — единственная общая точка прямой CD и окружности, а это означает, что CD — касательная к окружности.

Теорема 2 (обратная). ***Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу этой окружности, проведённому в точку касания.***

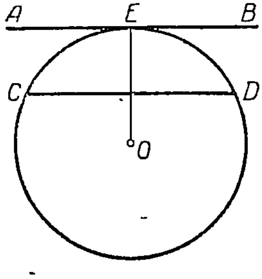
Пусть прямая CD — касательная к окружности и M — точка касания.

Требуется доказать, что $CD \perp OM$ (черт. 318).

Доказательство. Если прямая CD касается окружности в точке M, то всякая другая точка прямой CD будет находиться вне круга, ограниченного этой окружностью, следовательно, расстояние от каждой точки прямой CD до центра, кроме точки M, будет больше расстояния OM — радиуса окружности. Значит, этот радиус есть наименьший из отрезков, соединяющих точку O с точками прямой CD, поэтому $OM \perp CD$.

3. Свойство дуг, заключённых между касательной и параллельной ей хордой.

Теорема. ***Дуги, заключённые между касательной и параллельной ей хордой, равны.***



Черт. 320

Пусть касательная AB и хорда CD параллельны. Точка E — точка касания прямой AB с окружностью O (черт. 320). Требуется доказать, что $\smile CE = \smile ED$. Для доказательства соединим точку касания E с центром круга.

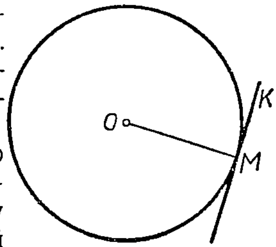
$OE \perp AB$, а так как $CD \parallel AB$, то $OE \perp CD$, а перпендикуляр к хорде, проведённый из центра той же окружности, делит стягиваемую ею дугу пополам. Следовательно, $\smile CE = \smile ED$.

4. Построение касательной к окружности.

Задача. *Построить прямую, касательную к окружности в данной её точке.*

Дана окружность O, требуется провести прямую, касательную к этой окружности в точке M (черт. 321).

Проведём радиус OM и через конечную его точку M проведём прямую KM, перпендикулярную к радиусу. По доказанному ранее прямая KM будет касательной к окружности.



Черт. 321

§ 74. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ.

Прямая, проходящая через центры двух окружностей, называется линией центров.

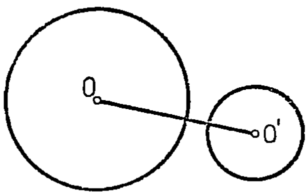
Рассмотрим взаимное расположение двух окружностей.

1. Окружности не имеют общей точки.

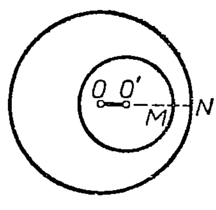
а) Окружности лежат одна вне другой.

В этом случае расстояние между центрами больше суммы радиусов: $OO' > R + r$ (черт. 322).

б) Одна окружность лежит внутри другой.



Черт. 322

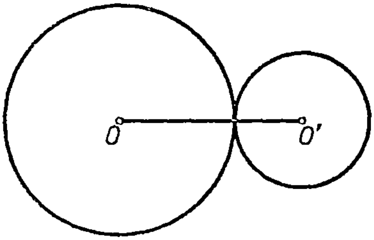


Черт. 323

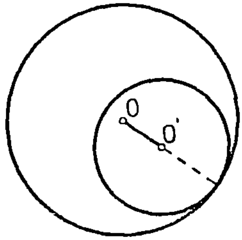
В этом случае расстояние между центрами меньше разности радиусов: $OO' < R - r$ (черт. 323), так как $R - r = OO' + MN$.

2. Окружности имеют только одну общую точку.

Такие окружности называются касающимися. В этом случае точка касания лежит на линии центров и расстояние между центрами равно:



Черт. 324



Черт. 325

а) сумме их радиусов: $OO' = R + r$ (внешнее касание, черт. 324);

б) разности их радиусов: $OO' = R - r$ (внутреннее касание, черт. 325).

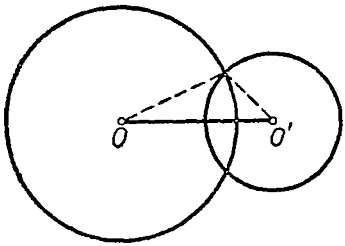
3. Окружности пересекаются (черт. 326).

В этом случае расстояние между центрами меньше суммы радиусов и больше их разности: $OO' < R + r$, $OO' > R - r$ (§ 16).

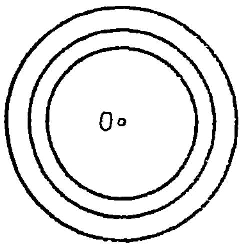
Справедливы и обратные предложения:

1) если $OO' > R + r$ или $OO' < R - r$, то окружности не имеют общей точки;

2) если $OO' = R + r$ или $OO' = R - r$, то окружности касаются;



Черт. 326



Черт. 327

3) если $OO' < R + r$ и $OO' > R - r$, то окружности пересекаются.

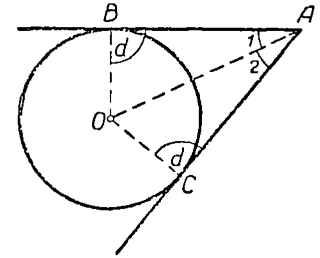
Все предложения, изложенные в § 74, даны без доказательства. Они могут быть строго доказаны, как и другие предложения.

Окружности, имеющие общий центр, называются концентрическими. При равных радиусах они совмещаются, при различных радиусах — не имеют ни одной общей точки (черт. 327).

§ 75. СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ, ПРОВЕДЕННЫХ К ОКРУЖНОСТИ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ.

Теорема. ***Если из какой-нибудь точки провести две касательные к окружности, то их отрезки от данной точки до точек касания равны между собой и центр окружности находится на биссектрисе угла, образованного этими касательными.***

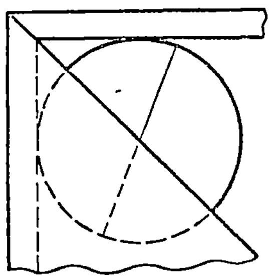
Пусть AB и AC — касательные к окружности O (черт. 328). Требуется доказать, что $AB=AC$ и OA является биссектрисой угла A, т.е. $\angle 1 = \angle 2$.



Черт. 328

Треугольники OBA и OCA прямоугольные, так как касательные AB и AC перпендикулярны к радиусам OB и OC в точках B и C. Сторона OA общая. Катеты OB и OC равны, как радиусы одного и того же круга. Прямоугольные треугольники OBA и OCA равны по гипотенузе и катету. Отсюда $AB = AC$ и $\angle 1 = \angle 2$, т. е. OA есть биссектриса угла A.

На этом свойстве касательных основано устройство прибора, называемого центроискателем, который нередко применяется в столярных и слесарных мастерских для отыскания центра круга на различных деталях. Центроискатель (черт. 329) представляет собой угол, составленный из двух деревянных или металлических пластинок, в котором приделана биссектриса этого угла.



Черт. 329

Центроискатель прикладывают к кругу так, чтобы пластинки стали касательными, и проводят прямую по биссектрисе угла. Затем центроискатель поворачивают и снова проводят прямую по биссектрисе угла. Точка пересечения этих двух прямых и определит центр круга.

§ 76. ВПИСАННЫЕ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ УГЛЫ.

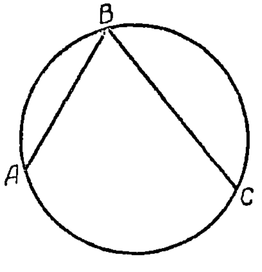
1. Вписанный угол.

Угол, вершина которого находится на окружности, а стороны являются хордами, называется вписанным.

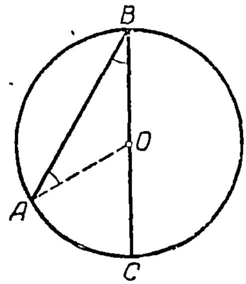
Угол ABC — вписанный угол. Он опирается на дугу AC, заключённую между его сторонами (черт. 330).

Теорема. ***Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.***

Это надо понимать так: вписанный угол содержит столько угловых градусов, минут и секунд, сколько дуговых градусов, минут и секунд содержится в половине дуги, на которую он опирается.



Черт 330



Черт. 331

При доказательстве этой теоремы надо рассмотреть три случая.

П е р в ы й с л у ч а й. Центр круга лежит на стороне вписанного угла (черт. 331).

Пусть $\angle ABC$ — вписанный угол и центр круга O лежит на стороне BC. Требуется доказать, что он измеряется половиной дуги AC.

Соединим точку A с центром круга. Получим равнобедренный $\triangle AOB$, в котором $AO = OB$, как радиусы одного и того же круга. Следовательно, $\angle A = \angle B$. $\angle AOC$ является внешним по отношению к треугольнику AOB, поэтому $\angle AOC = \angle A + \angle B$ (§ 39, п. 2), а так как углы A и B равны, то $\angle B$ составляет $\frac{1}{2} \angle AOC$.

Но $\angle AOC$ измеряется дугой AC, следовательно, $\angle B$ измеряется половиной дуги AC.

Например, если $\smile AC$ содержит $60°18'$, то $\angle B$ содержит $30°9'$.

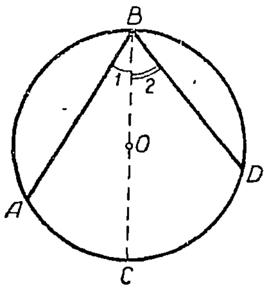
В т о р о й с л у ч а й. Центр круга лежит между сторонами вписанного угла (черт. 332).

Пусть $\angle ABD$ — вписанный угол. Центр круга O лежит между его сторонами. Требуется доказать, что $\angle ABD$ измеряется половиной дуги AD.

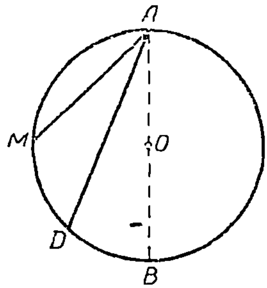
Для доказательства проведём диаметр BC. Угол ABD разбился на два угла: $\angle 1$ и $\angle 2$.

$\angle 1$ измеряется половиной дуги AC, а $\angle 2$ измеряется половиной дуги CD, следовательно, весь $\angle ABD$ измеряется $\frac{1}{2} \smile AC + \frac{1}{2} \smile CD$, т. е. половиной дуги AD. Например, если $\smile AD$ содержит $124°$, то $\angle B$ содержит $62°$.

Третий случай. Центр круга лежит вне вписанного угла (черт. 333). Пусть $\angle MAD$ — вписанный угол. Центр круга O находится вне угла. Требуется доказать, что $\angle MAD$ измеряется половиной дуги MD.

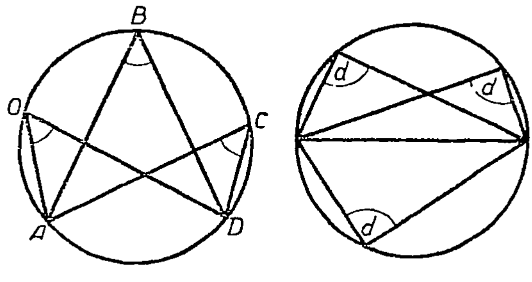


Черт. 332



Черт. 333

Для доказательства проведём диаметр AB. $\angle MAD = \angle MAB - \angle DAB$. Но $\angle MAB$ измеряется $\frac{1}{2} \smile MB$, а $\angle DAB$ измеряется $\frac{1}{2} \smile DB$. Следовательно, $\angle MAD$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile MB - \smile DB)$, т. е. $\frac{1}{2} \smile MD$. Например, если $\smile MD$ содержит $48°38'16''$, то $\angle MAD$ содержит $24°19'8''$.



а) б)

Черт. 334

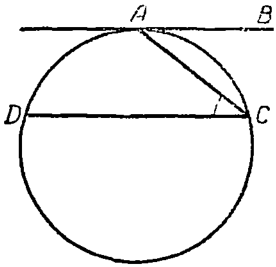
Следствия. 1. ***Все вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой,*** так как они измеряются половиной одной и той же дуги (черт. 334, *а*).

2. ***Вписанный угол, опирающийся на диаметр,—прямой,*** так как он опирается на половину окружности. Половина окружности содержит 180 дуговых градусов, значит, угол, опирающийся на диаметр, содержит 90 угловых градусов (черт. 334, *б*).

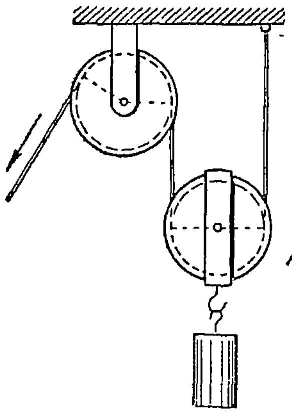
2. Угол, образованный касательной и хордой.

Теорема. ***Угол, образованный касательной и хордой, измеряется половиной дуги, заключённой между его сторонами.***

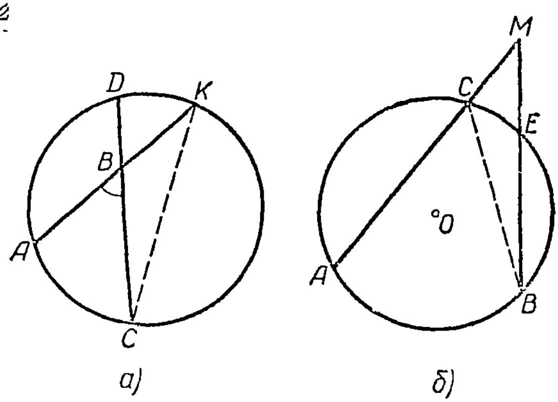
Пусть $\angle CAB$ составлен хордой CA и касательной AB (черт. 335). Требуется доказать, что он измеряется половиной $\smile CA$. Проведём через точку C прямую $CD \parallel AB$. Вписанный $\angle ACD$ измеряется половиной дуги AD, но $\smile AD = \smile CA$, так как они заключены между касательной и параллельной ей хордой. Следовательно, $\angle DCA$ измеряется половиной дуги CA. Так как данный $\angle CAB = \angle DCA$, то и он измеряется половиной дуги CA.



Черт. 335



Черт. 336



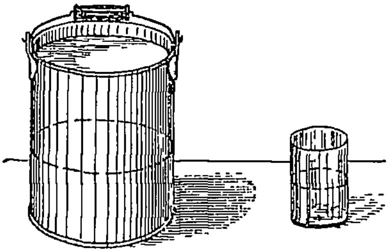
Черт. 337

Упражнения.

1. На чертеже 336 найти касательные к окружностям блоков.
2. По чертежу 337, *а* доказать, что угол ABC измеряется полусуммой дуг AC и DK.
3. По чертежу 337, *б* доказать, что угол AMB измеряется полуразностью дуг AB и CE.
4. Через точку A, лежащую внутри круга, с помощью чертежного треугольника провести хорду так, чтобы она в точке A разделилась пополам.
5. С помощью чертежного треугольника разделить дугу на 2, 4, 8,... равных частей.
6. Описать данным радиусом окружность, проходящую через две данные точки. Сколько решений имеет задача?
7. Сколько окружностей можно провести через данную точку?

§ 77. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ.

В ряде случаев длину окружности можно определить непосредственно измерением. Например, чтобы узнать, чему равна длина окружности ведра, стакана (черт. 338, где окружности обозначены пунктиром), нужно окружность обвести шнуром, затем выпрямить его и измерить полученный отрезок. Но таким образом измерить длину окружности не всегда возможно. Обыкновенно длину окружности определяют по длине диаметра (или радиуса).


Черт. 338

Проделайте такой опыт. Измерьте длину какой-нибудь окружности и её диаметр. Затем узнайте, во сколько раз длина окружности больше длины своего диаметра, т. е. найдите отношение окружности к своему диаметру. Проделайте это несколько раз, беря различные окружности. У вас всегда отношение окружности к своему диаметру будет больше 3 и меньше 4. Точные вычисления показали, что это отношение выражается бесконечной непериодической десятичной дробью 3,141592... .

Число, показывающее отношение окружности к своему диаметру, согласились обозначать греческой буквой π (пи).

Обыкновенно при вычислениях длины окружности ограничиваются сотыми долями и принимают $\pi \approx 3,14$.

Если длину окружности обозначить буквой C, диаметр — буквой D, радиус — буквой r, то получим для вычисления длины окружности такую формулу: $C = D\pi$, или $C = 2r\pi$. Обыкновенно принято писать: $C = \pi D$, или $C = 2\pi r$.

Упражнения.

1. Вычислить длину окружности, если $D = 10$ *см* (20 *см*, 4 *м*, 0,5 *м*).
2. Вычислить длину окружности, если $r = 15$ *см* (75 *мм*, 3 *м*, 0,2 *м*).
3. Длина окружности равна 628 *мм* (9,42 *м*). Вычислить её диаметр и радиус.
4. Диаметр колеса автомобиля равен 0,75 *м*. Какое расстояние прошел автомобиль, если его колесо сделало 2000 оборотов?
5. Деталь, имевшая в поперечнике 160 *мм*, при обработке на токарном станке делала 300 оборотов в минуту. Вычислить первоначальную скорость резания этой детали в секунду.
6. Сосна на высоте 0,5 *м* от поверхности земли имела в окружности 280 *см*. Вычислить её толщину (диаметр) на этой высоте.

§ 78. ДЛИНА ДУГИ В $n°$.

Чтобы найти длину дуги в $n°$, надо сначала определить длину дуги в 1°, для чего длину окружности разделить на 360, а затем полученный результат умножить на n.

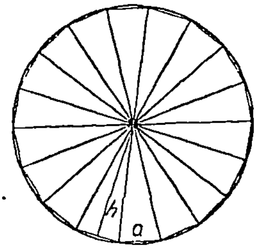
Получаем формулу: $l = \frac{2\pi rn}{360} = \frac{\pi rn}{180}$, где l — длина дуги.

§ 79. ПЛОЩАДЬ КРУГА.

Разделим окружность на возможно большее число равных частей, все полученные точки деления соединим с центром окружности, а соседние — друг с другом хордами.

Таким образом получим ряд равных равнобедренных треугольников (черт. 339).

Площадь каждого треугольника равна $\frac{ah}{2}$, где a — основание его, h — высота. Обозначив через S' сумму площадей всех полученных треугольников, получим формулу:



Черт. 339

$$S' = \frac{ah}{2} \cdot n, \text{ или } S' = \frac{an \cdot h}{2}, \text{ где } n \text{ —}$$

число треугольников.

Сумма площадей всех треугольников (S') весьма близка к площади круга (S), сумма оснований всех треугольников (an) весьма близка к длине окружности (C), а высота (h) каждого треугольника весьма близка к радиусу (r) круга.

Если пренебречь незначительными различиями в размерах, то получим формулу площади круга:

$$S_{кр} = \frac{Cr}{2}.$$

После преобразования получим: $S_{кр} = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$, или $S_{кр} = \pi r^2$, а обозначив через D диаметр круга, получим:

$$S_{кр} = \frac{\pi D^2}{4}.$$

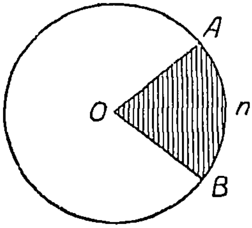
Примечание. В формуле $S_{кр} = \frac{Cr}{2}$ поставлен знак точного, а не приближённого равенства, хотя на основании проведённого рассуждения мы могли бы его считать приближённым, но в старших классах средней школы доказывается, что равенство $S_{кр} = \frac{Cr}{2}$ не приближённое, а точное.

Упражнения.

1. Вычислить площадь круга, если его радиус равен 5 *см* (35 *см*, 3 *м*, 0,5 *м*, 150 *мм*).
2. Вычислить площадь круга, если диаметр его равен 20 *см* (15 *см*, 200 *мм*, 2 *м*, 0,4 *м*).
3. Длина окружности круга 94,2 *см*. Вычислить площадь этого круга.
4. Длина окружности цилиндра в машине равна 628 *мм*. Вычислить площадь поршня для этого цилиндра.

§ 80. ПЛОЩАДЬ СЕКТОРА.

Сектором называется часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой. На чертеже 340 сектор AOB заштрихован.



Черт. 340

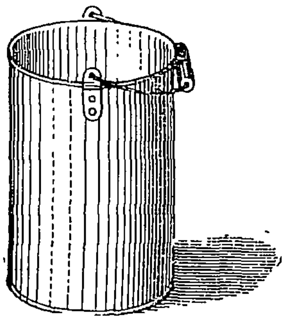
Чтобы найти площадь сектора, дуга которого содержит $n°$, надо площадь круга разделить на 360 и полученный результат умножить на n.

Получаем формулу: $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$, где S — площадь сектора.

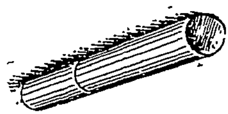
§ 81. ЦИЛИНДР.

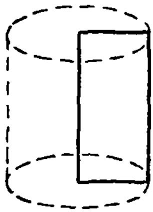
1. Образование цилиндра.

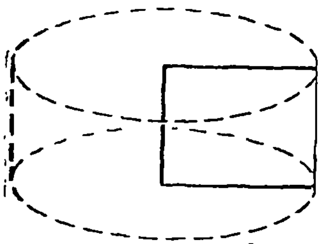
В окружающей нас действительности встречается много предметов, имеющих форму цилиндра, например: ведро (черт. 341),

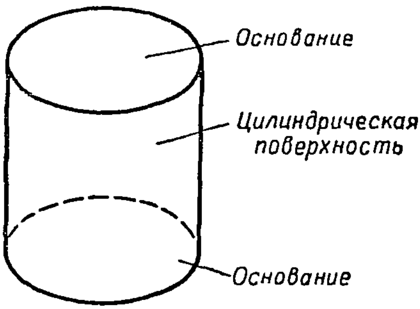

Черт. 341


Черт 342


Черт. 343


Черт. 344


Черт. 345



Черт. 346

консервная банка (черт. 342), пенал (черт. 343), кусок проволоки круглого сечения и т. д.

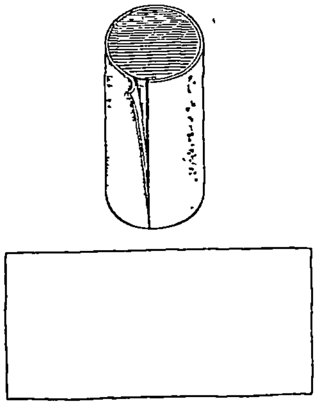
Цилиндр может быть образован вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (черт. 344, 345).

Цилиндр имеет два основания, которые являются кругами, и боковую поверхность, которая называется **цилиндрической** поверхностью (черт. 346).

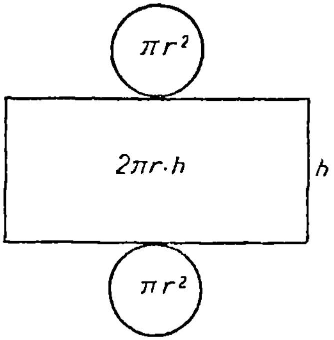
2. Развёртка цилиндра.

Если боковую поверхность цилиндра развернуть и положить на плоскость, то получим прямоугольник (черт. 347).

Развёртка полной поверхности цилиндра состоит из прямоугольника, длина которого равна длине окружности основания цилиндра, а высота — высоте цилиндра, и двух кругов (черт. 348).



Черт. 347



Черт. 348

3. Площадь поверхности цилиндра.

Площадь каждого основания цилиндра равна πr^2, площадь обоих оснований составит $2\pi r^2$ (черт. 348).

Площадь боковой поверхности цилиндра равна площади прямоугольника, основание которого равно $2\pi r$, а высота равна высоте цилиндра h, т. е. $2\pi rh$.

Полная поверхность цилиндра составит: $2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r + h)$.

Упражнения.

1. Радиус основания цилиндра равен 8 *см*, высота его—20 *см*. Вычислить:
а) сумму площадей его оснований,
б) площадь его боковой поверхности,
в) полную поверхность цилиндра.

2. Водосточная труба имеет в поперечнике 20 *см*, её длина — 12 *м*. Сколько листов оцинкованного железа нужно заготовить для такой трубы, если площадь каждого листа равна 2 *кв. м*, а отходы при работе составляют 10% заготовленного железа?

3. Сколько листов белой жести потребуется на устройство цилиндрического бака с крышкой, если радиус основания бака должен быть 0,40 *м*, а высота бака — 0,75 *м*? На отходы при работе требуется добавить к площади поверхности бака 5%.

Площадь одного листа белой жести равна 1,8 *кв. м*.

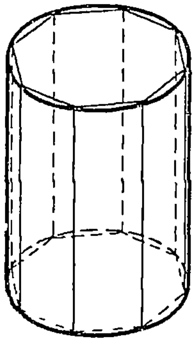
4. Выполнив необходимые измерения, вычислить боковую и полную поверхности модели цилиндра, имеющегося в математическом кабинете школы.

4. Объём цилиндра.

Объём цилиндра вычисляют по той же формуле, что и объём прямой призмы, т. е. для вычисления объёма цилиндра площадь его основания (πr^2) умножают на высоту h.

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 \cdot h.$$

Получение формулы объёма цилиндра можно пояснить таким рассуждением. Пусть дан цилиндр, впишем в него прямую призму, т. е. построим внутри цилиндра такую прямую призму, основаниями которой служат многоугольники, вписанные в основание цилиндра (черт. 349). Вершины таких многоугольников лежат на окружностях оснований цилиндра. Объём (V') этой призмы выразится формулой: $V' = S'h$, где S' — площадь основания призмы, h — высота призмы. Если при этом за основание призмы взять многоугольник с очень большим числом очень малых сторон, то площадь основания призмы будет весьма мало отличаться от площади круга, служащего основанием цилиндра, а объём призмы будет весьма мало отличаться от объёма цилиндра. Если пренебречь этими различиями в размерах, то объём цилиндра (V) выразится следующей формулой: $V = Sh$, где S — площадь основания цилиндра, h — его высота.



Черт. 349

Заменив S через πr^2, где r — радиус основания цилиндра, получим формулу объёма цилиндра: $V = \pi r^2 h$.

Примечание. В формуле $V = Sh$ поставлен знак точного, а не приближённого равенства, хотя на основании проведенного рассуждения мы могли бы его считать приближенным, но в старших классах средней школы доказывается, что равенство $V = Sh$ точное, а не приближенное.

Упражнения.

1. Вычислить объём цилиндра, если диаметр его основания равен 16 *см*, а высота цилиндра равна 25 *см*.
2. Сколько кубических дециметров (литров) воды помещается в баке, имеющем форму цилиндра, если радиус основания его равен 30 *см*, высота равна 0,6 *м*?
3. Бревно имеет цилиндрическую форму. Диаметр его основания равен 30 *см*. Длина бревна — 7,2 *м*. Сколько кубометров древесины содержит это бревно?
4. Цистерна для молока имеет цилиндрическую форму. Диаметр основания её равен 1,2 *м*. Длина цистерны — 2 *м*. Сколько литров молока может вместить эта цистерна?
5. Сколько весит стальной вал цилиндрической формы, если радиус его основания равен 75 *мм*, а длина — 1,6 *м* и если кубический дециметр его 7,8 *кг*?
6. Вычислить объём модели цилиндра, имеющегося в школьном математическом кабинете.
7. Вычислить объём ведра, употребляемого в домашнем хозяйстве и имеющего форму цилиндра.

ГЛАВА VIII.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ. ПОДОБИЕ ФИГУР.

§ 82. ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ.

1. Определение.

Отношением двух отрезков называется отношение тех чисел, которые выражают длины этих отрезков, при условии, что отрезки измерены единицами одного наименования.

В арифметике отношением одного числа к другому называется частное от деления первого числа на второе, поэтому можно сказать, что отношением одного отрезка к другому является частное от деления длины первого отрезка на длину второго, если длины отрезков выражены в единицах одного наименования.

Отношение одного отрезка к другому обычно изображается в виде частного (дроби): $\frac{AB}{CD}$.

Если даны два отрезка $AB = 6$ *см* и $CD = 4$ *см*, то отношение отрезка AB к отрезку CD равно $\frac{6}{4}$, т. е.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{4}, \quad \text{или} \quad \frac{AB}{CD} = 1{,}5.$$

В этом случае делимое (AB) называется предыдущим членом отношения, делитель (CD) — последующим членом отношения, а частное (1,5) — отношением.

Отношение отрезка CD к отрезку AB равно $\frac{4}{6}$, т. е.

$$\frac{CD}{AB} = \frac{4}{6}, \quad \text{или} \quad \frac{CD}{AB} = \frac{2}{3}.$$

Это отношение в десятичных дробях придётся выражать приближённо: $\frac{CD}{AB} \approx 0{,}67$ (с точностью до 0,01 с избытком), так как $\frac{CD}{AB} = 0{,}6666...$.

Если длины отрезков выражены приближённо, то отношение тоже получится приближённым.

Пусть $AB \approx 6{,}5$ *см*, $CD \approx 2{,}7$ *см*, тогда $\frac{AB}{CD} \approx \frac{6{,}5}{2{,}7}$, $\frac{AB}{CD} \approx 2{,}4$ (с точностью до 0,1 с недостатком).

2. Независимость отношения от принятой единицы измерения.

Пусть мы имеем два отрезка, длины которых выражены в метрах. Например: $AB = 6$ *м*, $OC = 2$ *м*. Найдём их отношение:

$$\frac{AB}{OC} = \frac{6}{2} = 3, \quad \frac{OC}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Изменится ли величина отношения, если мы длины этих отрезков выразим в других мерах, например в сантиметрах?

Тогда $AB = 600$ *см*, $OC = 200$ *см*. Найдём их отношение:

$$\frac{AB}{OC} = \frac{600}{200} = 3, \quad \frac{OC}{AB} = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}.$$

Отношение отрезков в том и другом случае не изменилось, так как для выражения длин отрезков в сантиметрах мы оба члена отношения AB и OC умножили на одно и то же число (на 100). Значит, отношение отрезков не зависит от выбора единиц измерения.

Необходимо лишь, чтобы длины обоих отрезков были выражены мерами одного и того же наименования.

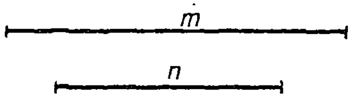
Упражнения.

1. Найти отношение отрезков AB и CD при условии, если: а) $AB = 12$ *см*, $CD = 3$ *см*; б) $AB = 2$ *м*, $CD = 80$ *см*.

2. Найти отношение отрезков AB и CD с точностью до 0,1 и 0,01 при условии, если: а) $AB = 7$ *см*, $CD = 3$ *см*; б) $AB = 13$ *см*, $CD = 7$ *см*.

3. Измерить отрезки m и n (черт. 350) и найти отношения:

$$\frac{m}{n} \text{ и } \frac{n}{m}.$$



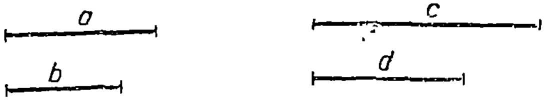
Черт. 350

§ 83. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ.

Из арифметики известно, что равенство двух отношений называется пропорцией. Например: $\frac{16}{4} = \frac{20}{5}$; $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$. То же самое имеем и в геометрии: если даны две пары отрезков, отношения которых равны, то можно составить пропорцию. Если $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$ и $\frac{c}{d} =$

$= \frac{4}{3}$ (черт. 351), то получим пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; отрезки a, b, c и d называются пропорциональными.

Отношение $\frac{a}{b}$ называется, как и в арифметике, первым отношением, $\frac{c}{d}$ — вторым отношением; a и d называются крайними членами пропорции, b и c — средними членами.



Черт 351

В пропорции можно поменять местами отношения; можно переставить крайние члены, средние члены; можно переставить те и другие одновременно.

Поскольку в пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ под буквами подразумевают числа, выражающие длины отрезков, то произведение крайних членов её равно произведению средних членов. Отсюда, зная три члена пропорции, можно найти неизвестный четвёртый её член. Так, в пропорции $\frac{a}{x} = \frac{c}{d}$ $x = \frac{a \cdot d}{c}$.

Отметим ещё некоторые свойства пропорций, которыми придётся в дальнейшем пользоваться при доказательстве некоторых теорем и при решении задач.

а) Если три члена одной пропорции соответственно равны трём членам другой пропорции, то равны и четвёртые члены этих пропорций.

Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ и $\frac{a}{b} = \frac{c}{y}$, то $x = y$. В самом деле $x = \frac{b \cdot c}{a}$, $y = \frac{b \cdot c}{a}$, т. е. и x и y равны одному и тому же числу $\frac{b \cdot c}{a}$.

б) Если в пропорции равны предыдущие члены, то равны и последующие, т. е. если $\frac{a}{x} = \frac{a}{y}$, то $x = y$.

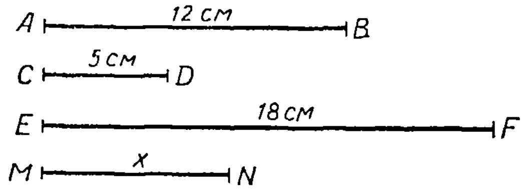
Чтобы убедиться в этом, переставим средние члены в этой пропорции. Получим: $\frac{a}{a} = \frac{x}{y}$. Но $\frac{a}{a} = 1$. Следовательно, и $\frac{x}{y} = 1$. А это возможно лишь в том случае, когда числитель и знаменатель дроби равны, т. е. $x = y$.

в) Если в пропорции равны последующие члены, то равны и предыдущие, т. е. если $\frac{x}{a} = \frac{y}{a}$, то $x = y$.

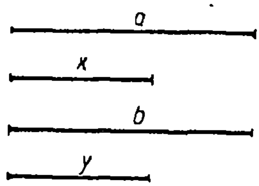
В справедливости этого свойства предлагается вам убедиться самостоятельно. Для этого проведите рассуждение, аналогичное предыдущему.

Упражнения.

1) На чертеже 352 изображены четыре пропорциональных отрезка, причём $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{MN}$. Определить длину отрезка MN.



Черт. 352



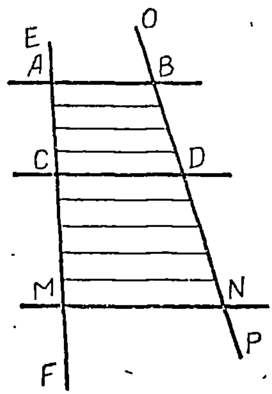
Черт. 353

2) На чертеже 353 изображены четыре пропорциональных отрезка, причём $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ и $a = b$.

Чему равен y, если $x = 28$ *мм*?

§ 84. ПОСТРОЕНИЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКОВ.

Теорема. ***Если две прямые пересечь тремя параллельными прямыми, то отношение двух отрезков, получившихся на одной прямой, равно отношению двух соответствующих отрезков другой прямой.***



Черт. 354

Пусть две прямые EF и OP пересечены тремя параллельными прямыми AB, CD и MN (черт. 354).

Требуется доказать, что отрезки AC, CM, BD и DN, заключённые между параллельными секущими, пропорциональны, т. е.

$$\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{DN}.$$

Пусть длина отрезка AC равна p, а длина отрезка CM равна q. Например, $p = 4$ *см* и $q = 5$ *см*.

Разделим AC и CM на отрезки, равные 1 *см*, и из точек деления проведём прямые, параллельные прямым AB, CD и MN, как это показано на чертеже 354. Тогда на прямой OP отложатся разные между собой отрезки (§ 47), при этом на отрезке BD их будет 4, а на отрезке DN — 5.

Отношение AC к CM равно $\frac{4}{5}$, точно так же и отношение BD к DN равно $\frac{4}{5}$.

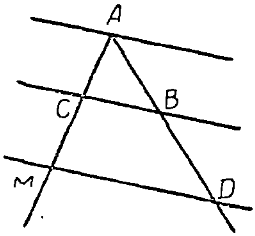
Отсюда $\frac{AC}{CM} = \frac{BD}{DN}$.

Значит, отрезки AC, CM, BD и DN пропорциональны.

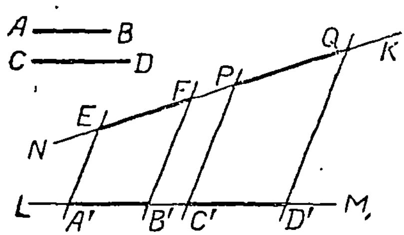
Пропорциональны также и отрезки AC, AM, BD и BN (налегающие друг на друга), т. е. $\frac{AC}{AM} = \frac{BD}{BN}$, так как $\frac{AC}{AM} = \frac{4}{9}$ и $\frac{BD}{BN} = \frac{4}{9}$.

Теорема будет справедлива и при любых других целых значениях p и q.

Если длины отрезков AC и CM не выразятся в целых числах при данной единице измерения (например, сантиметре), то надо взять такую более мелкую единицу (например, миллиметр или микрон), при которой длины отрезков AC и CM практически выразятся в целых числах.



Черт. 355



Черт. 356

Доказанная теорема справедлива и в том случае, когда одна из параллельных секущих проходит через точку пересечения данных прямых (черт. 355). Она справедлива также и в том случае, когда отрезки откладываются не непосредственно один за другим, а через некоторый промежуток (черт. 356). Справедливость этих предложений доказать самостоятельно.

§ 85. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ.

З а д а ч а 1. *Построить отрезки, пропорциональные двум данным отрезкам AB и CD* (черт. 356).

Р е ш е н и е. 1. Проводим две произвольные прямые LM и NK.

2. На одной из них, например на LM, откладываем отрезки $A'B'$ и $C'D'$, соответственно равные отрезкам AB и CD.

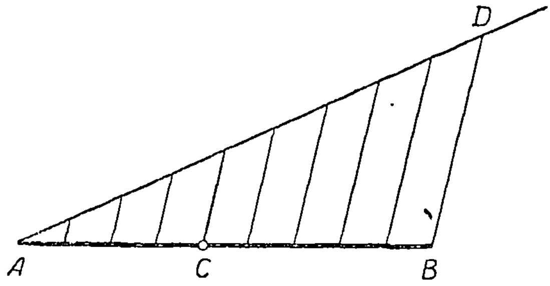
3. Через точки A', B', C' и D' проводим ряд параллельных прямых в любом направлении, но так, чтобы эти прямые пересекли вторую прямую — NK.

Отрезки EF и PQ, получившиеся на второй прямой, пропорциональны данным отрезкам AB и CD, т. е. $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{PQ}$.

Задача имеет сколько угодно решений, так как параллельные секущие можно проводить в других направлениях и отрезки EF и PQ будут иметь другую длину, оставаясь пропорциональными отрезкам AB и CD.

З а д а ч а 2. *Разделить отрезок в данном отношении.*

Пусть требуется разделить отрезок AB (черт. 357) на две части так, чтобы они относились, как 4 и 5. Для этого нужно данный от-



Черт. 357

резок разделить на $4 + 5 = 9$ равных частей. Подобные задачи решались ранее (§ 47). На данном отрезке AB выделим отрезок AC, равный 4 частям, тогда CB будет равен 5 таким частям:

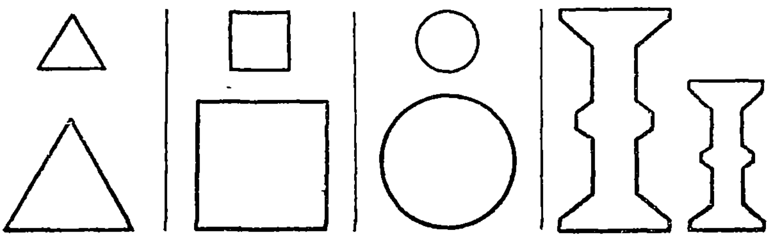
$$\frac{AC}{CB} = \frac{4}{5}.$$

Упражнения.

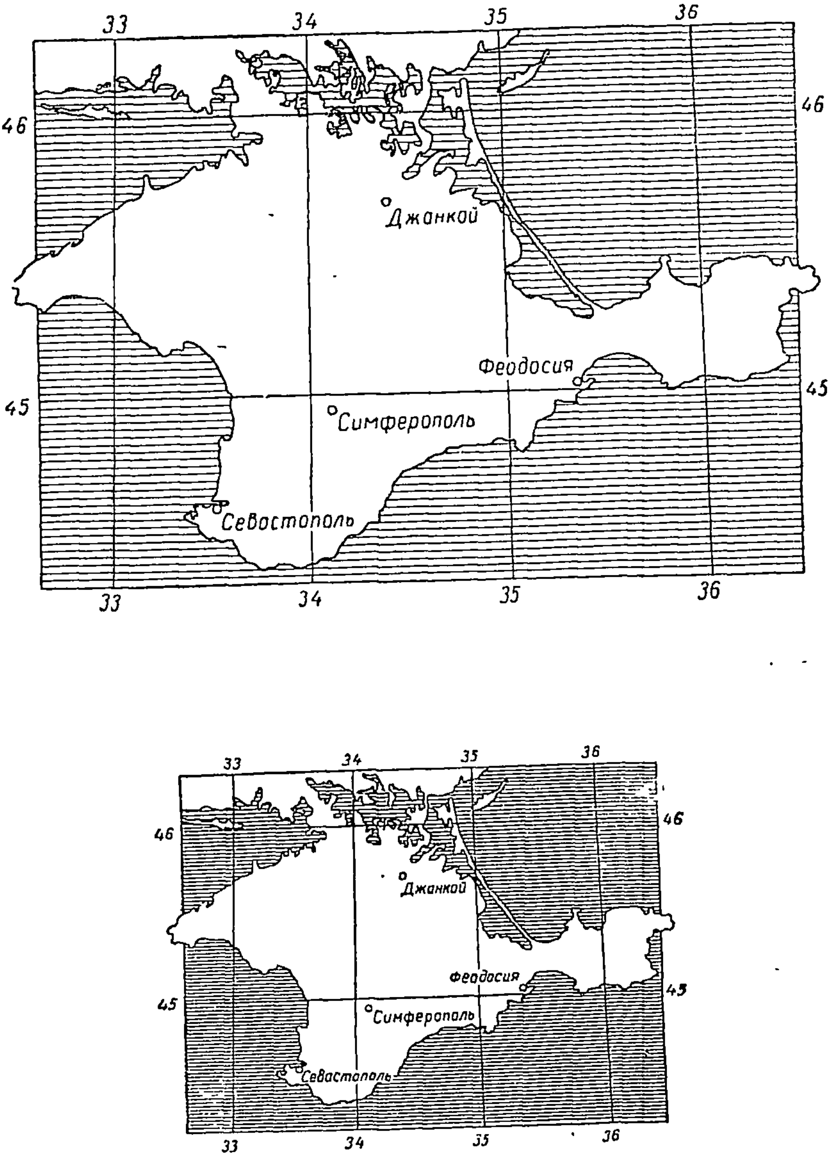
1. Три отрезка имеют длину 10 *см*, 8 *см* и 5 *см*. Какую длину должен иметь четвертый отрезок, чтобы эти четыре отрезка были пропорциональны?
2. Начертить отрезок и разделить его в отношении 2 к 3.

§ 86. ПОНЯТИЕ О ПОДОБИИ ФИГУР.

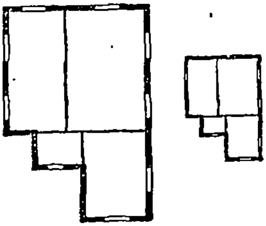
На чертежах 358—361 изображены попарно фигуры, которые отличаются своими размерами, но имеют одинаковую форму: на чертеже 358 — равносторонние треугольники, на чертеже 359 — квадраты, на чертеже 360 — два круга, на чертеже 361 — одна и та же деталь, но изображённая в разных масштабах.



Черт. 358 Черт. 359 Черт. 360 Черт. 361


33
34
35
36
46
45
Джанкой
Феодосия
Симферополь
Севастополь
33
34
35
36
46
45
Джанкой
Феодосия
Симферополь
Севастополь

Черт. 362



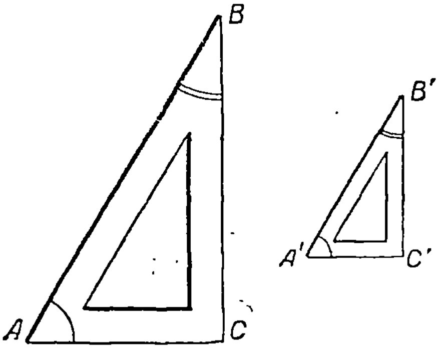
Черт. 363

В окружающей нас действительности часто встречаются такие предметы или их изображения, которые бывают сходны по своей форме, но отличаются своими размерами, например отличающиеся размерами фотографии одного и того же лица, карты земной поверхности (черт. 362), планы зданий (черт. 363) и т. д. Такие фигуры называют подобными. Для обозначения подобия фигур употребляется знак $\sim$.

§ 87. ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

1. Определение подобных треугольников.

Рассмотрим два чертёжных прямоугольных треугольника с острыми углами в 60° и 30° (черт. 364).



Черт. 364

Стороны второго треугольника по сравнению с первым уменьшены в два раза.

$$\frac{AB}{A'B'} = 2; \quad \frac{AC}{A'C'} = 2; \quad \frac{BC}{B'C'} = 2.$$

У этих треугольников углы попарно равны. Стороны, лежащие против равных углов, пропорциональны: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = 2.$

Такие треугольники называют **подобными**. Стороны, лежащие против равных углов, называются **сходственными**. Таким образом, **подобными называются треугольники, у которых углы попарно равны, а сходственные стороны пропорциональны.** Подобие треугольников записывается так: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

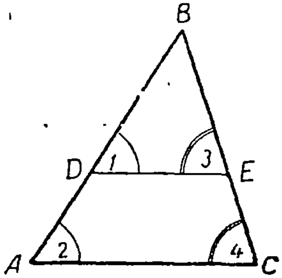
Отношение сходственных сторон подобных фигур называется **коэффициентом подобия**. В данном случае коэффициентом подобия треугольников ABC и $A'B'C'$ будет число 2.

Если же взять отношения $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{A'C'}{AC}$, то коэффициент подобия будет равен $\frac{1}{2}$.

2. Свойство прямой, параллельной какой-либо стороне треугольника.

Проведём в треугольнике ABC прямую DE параллельно стороне AC (черт. 365).

Получим треугольник DBE. Докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. Вследствие параллельности сторон DE и AC $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$. Угол B является общим для этих треугольников. Следовательно, углы этих треугольников попарно равны.



Черт. 365

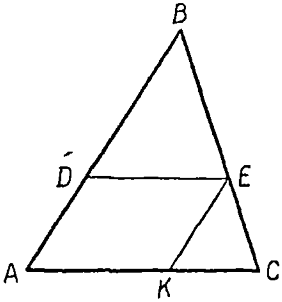
Так как $DE \parallel AC$, то $\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}$.

Проведём через точку E прямую, параллельную стороне AB (черт. 366). Получим: $\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{AK}$, но $AK=DE$.

Поэтому

$$\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}.$$

Сопоставляя полученную пропорцию с пропорцией



Черт. 366

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE},$$

получим:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{BC}{BE}=\frac{AC}{DE}, \text{ т. е.}$$

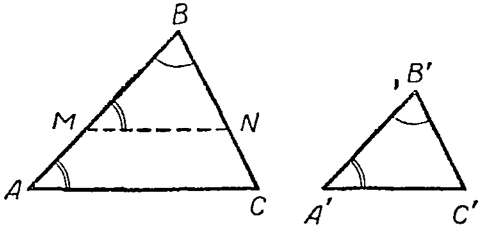
сходственные стороны треугольников ABC и DBE пропорциональны. Раньше было доказано, что углы этих треугольников попарно равны. Значит, $\triangle ABC \sim \triangle DBE$.

Следовательно, ***прямая, проведённая параллельно какой-либо стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.***

§ 88. ТРИ ПРИЗНАКА ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Теорема 1. ***Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого.***

Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$[1]. Доказать, что $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (черт. 367). Прежде всего отметим, что из равенства двух углов данных треугольников следует, что и третьи углы их равны, т. е. $\angle C = \angle C'$.



Черт. 367

Отложим от вершины B, например, на стороне AB треугольника ABC отрезок BM, равный отрезку $A'B'$. Из точки M проведём прямую $MN \parallel AC$. Мы получили $\triangle MBN$, который подобен $\triangle ABC$ (§ 87). Но $\triangle MBN = \triangle A'B'C'$, так как $\angle B = \angle B'$ по условию теоремы; сторона $MB = A'B'$ по построению; $\angle BMN = \angle A'$ ($\angle BMN$ и $\angle A'$ порознь равны одному и тому же $\angle A$).

Если $\triangle MBN \backsim \triangle ABC$, то $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$. Эта теорема выражает 1-й признак подобия треугольников.

Следствия. *1.* ***Равносторонние треугольники подобны.***

2. Равнобедренные треугольники подобны, если они имеют по равному углу при вершине или при основании.

3. Два прямоугольных треугольника подобны, если они имеют по равному острому углу.

4. Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.

Теорема 2. ***Два треугольника подобны, если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, лежащие между ними, равны.***

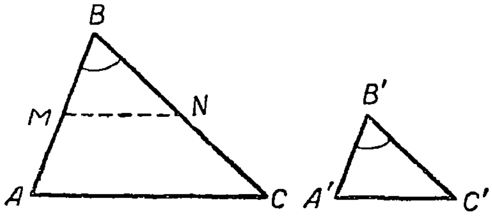
Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$ и $\angle B = \angle B'$.

Требуется доказать, что $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (черт. 368).

Для доказательства отложим, например, на стороне AB треугольника ABC от вершины B отрезок BM, равный отрезку $A'B'$. Через точку M проведём прямую $MN \parallel AC$. Полученный треуголь-

[1] В подобных треугольниках вершины соответственно равных углов часто обозначают одинаковыми буквами.

ник MBN подобен треугольнику ABC (§ 87). Докажем, что $\triangle MBN = \triangle A'B'C'$. В этих треугольниках $\angle B = \angle B'$ по условию теоремы, $MB = A'B'$ по построению. Чтобы убедиться в равенстве сторон BN и $B'C'$, составим пропорцию $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN}$ (она вытекает из параллельности AC и MN) и сравним её с пропорцией, которая дана



Черт. 368

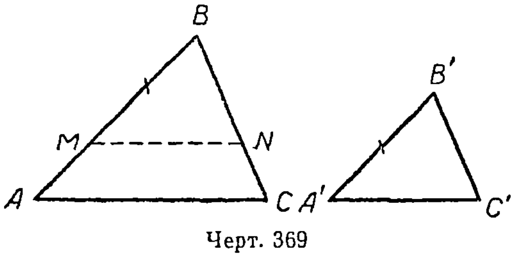
в условии теоремы: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. В этих двух пропорциях имеется по три одинаково расположенных равных члена, следовательно, равны и четвёртые их члены, т. е. $B'C' = BN$. Отсюда следует равенство треугольников MBN и $A'B'C'$. Так как $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, то, следовательно, и $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Эта теорема выражает 2-й признак подобия треугольников.

Следствие. ***Прямоугольные треугольники подобны, если катеты одного из них пропорциональны катетам другого.***

Теорема 3. ***Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника.***

Пусть в треугольниках ABC и $A'B'C'$ $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ (черт. 369).



Черт. 369

Требуется доказать, что $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Для доказательства отложим на стороне AB треугольника ABC от вершины B отрезок $BM = A'B'$. Из точки M проведём прямую $MN \parallel AC$. Полученный треугольник MBN подобен треугольнику ABC. Следовательно, $\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$. Докажем, что $\triangle MBN = \triangle A'B'C'$. Для доказательства сравним две пропорции:

$\frac{AB}{MB} = \frac{BC}{NB}$ и $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. В этих пропорциях имеется по три одинаково расположенных равных члена, следовательно, равны и четвёртые члены их, т. е. $BN = B'C'$. Сравним ещё две пропорции: $\frac{AB}{MB} = \frac{AC}{MN}$ и $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. В этих пропорциях также имеется по три одинаково расположенных равных члена, следовательно, равны и четвёртые члены их, т. е. $MN = A'C'$. Оказалось, что три стороны $\triangle BMN$ равны трём сторонам $\triangle A'B'C'$, а именно: $MB = A'B'$; $BN = B'C'$ и $MN = A'C'$. Следовательно, $\triangle MBN = \triangle A'B'C'$, а $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Эта теорема выражает 3-й признак подобия треугольников.

Упражнения.

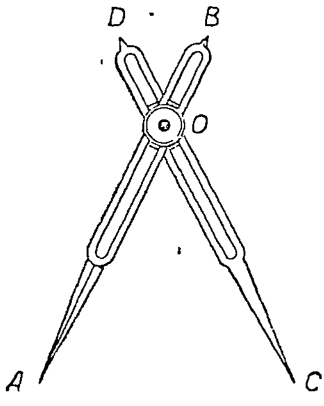
1. В двух подобных треугольниках ABC и $A'B'C'$ стороны AB, BC и AC соответственно равны 20 *см*, 18 *см* и 15 *см*. Сторона $A'C'$ треугольника $A'B'C'$ равна 10 *см*. Чему равны стороны $A'B'$ и $B'C'$?

2. Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC соответственно равны 20 *см*, 15 *см* и 12 *см*. Коэффициент подобия треугольника равен 2,5. Вычислить периметр треугольника $A'B'C'$. (Два решения.)

§ 89. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Свойства подобных треугольников очень широко применяются на практике. Они находят своё применение при изготовлении различных приборов, механизмов, при проведении измерительных работ, при решении различных задач на вычисление и построение. Ниже приводится описание некоторых таких работ.

1. Деление отрезка на равные части с помощью пропорционального циркуля.

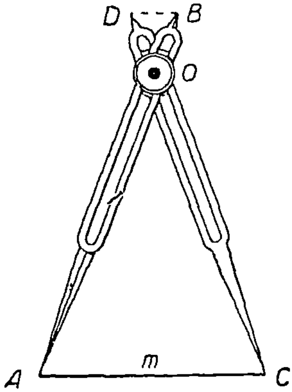


Черт. 370

Пропорциональный циркуль применяется в тех случаях, когда нужно небольшой отрезок разделить на несколько равных частей (черт. 370). Состоит пропорциональный циркуль из двух ножек одинаковой длины, скреплённых таким образом, что они могут вращаться вокруг винта O. Кроме того, благодаря прорезям этот винт может перемещаться, вследствие чего размеры плеч ножек могут изменяться по нашему желанию; таким образом, отношения $\frac{AO}{OB}$ и $\frac{CO}{OD}$ могут быть выбраны произвольно.

Предположим, нам нужно разделить отрезок на пять равных частей (черт. 371). Для этого винт O должен быть укреплён таким образом, чтобы отношение плеч $\frac{AO}{OB}$ и $\frac{CO}{OD}$ равнялось 5.

Это легко сделать по тем делениям и цифрам, которые проставляются по краям прорезей. Затем ножки циркуля раздвигаются и устанавливаются так, чтобы концы ножек A и C совпадали с концами данного отрезка m. Тогда расстояние между ножками D и B будет составлять $\frac{1}{5}$ отрезка m. Это следует из подобия треугольников AOC и DOB. Затем циркуль поворачивается и на отрезке m откладывается отрезок DB; он отложится ровно 5 раз.

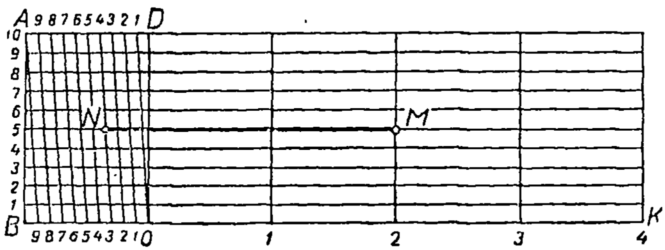


Черт. 371

2. Построение и измерение отрезков с помощью поперечного масштаба.

Для построения и измерения отрезков с возможно большей степенью точности применяется прибор, называемый **поперечным масштабом**. Устройство его видно из чертежа 372.

На произвольной прямой OK от точки O откладываются вправо отрезки, принятые за единицу. Влево от точки O откладывается



Черт. 372

такой же единичный отрезок OB. В точке B к прямой BK восставляется перпендикуляр, на котором от точки B откладываются 10 равных произвольных отрезков, и через полученные точки деления 1, 2, 3, ..., 10 проводятся прямые, параллельные прямой BK. Из точек 0, 1, 2, 3 прямой OK проводятся к ней перпендикуляры, пересекающие проведённые параллельные прямые. Отрезок OB делится на 10 равных частей, как и отрезок AD. Затем точки деления нижнего отрезка OB соединяются с точками деления верхнего отрезка AD, но так, чтобы нулевое деление нижнего отрезка было соединено с первым делением верхнего отрезка, а деление 1 нижнего отрезка — с делением 2 верхнего отрезка и т. д.

«Цена» (значение) делений на поперечном масштабе такова: каждое деление между наклонными параллелями равно 0,1; деления внутри треугольника с вершиной O соответственно равны 0,01; 0,02 и т. д.

Используют поперечный масштаб следующим образом: если нужно на данной прямой построить отрезок, равный, например, 1,4 единицы, то помещают одну ножку циркуля в точку с цифрой 1 на луче OK, а другую ножку циркуля — в точку, помеченную на отрезке BO цифрой 4. Получается отрезок, равный 1,4 единицы, который и переносится на указанную прямую.

Если нужно построить отрезок, равный 2,35 единицы, то помещают одну ножку циркуля в точку пересечения перпендикуляра, помеченного цифрой 2 (на луче OK), и горизонтальной параллели, помеченной цифрой 5. Затем вторую ножку циркуля устанавливают на пересечении параллели 5 с прямой, идущей от деления 3 нижнего отрезка BO (черт. 372). Получаем отрезок MN, равный 2,35 единицы, который переносится на указанную прямую.

Если требуется измерить какой-нибудь отрезок CP, данный вне поперечного масштаба, то поступаем так:

1. Ставим ножки циркуля в точки C и P, затем переносим циркуль на поперечный масштаб, помещая одну ножку на такую отметку луча OK, чтобы другая ножка оказалась внутри отрезка BO.

2. Передвигаем циркуль параллельно BK до того момента, когда вторая ножка окажется на одной из наклонных параллелей.

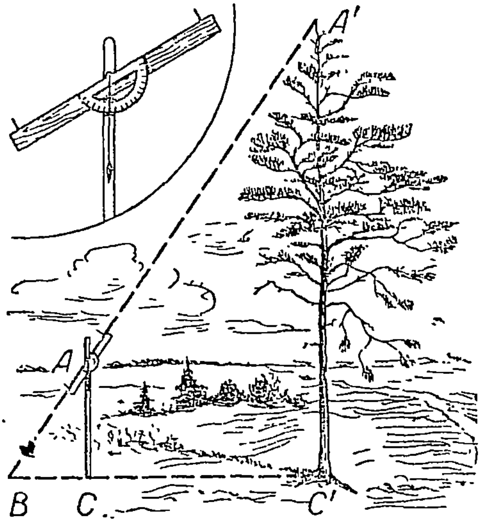
3. По местоположению ножек циркуля определяем длину отрезка CP.

3. Определение высоты предмета.

Пусть нужно определить высоту какого-нибудь предмета, например высоту дерева (черт. 373). Поставим по отвесу на горизонтальной площадке на некотором расстоянии от основания дерева шест с вращающейся планкой (изображённый на чертеже отдельно), планку установим по направлению на вершину дерева, как это показано на чертеже 373. Отметим на поверхности земли точку B, являющуюся точкой пересечения прямой $A'A$ с горизонтальной площадкой.

Прямоугольные треугольники $A'C'B$ и ACB подобны, так как они имеют по равному острому углу B. Измерив расстояния $C'B$ и CB и найдя отношение их, мы найдём коэффициент подобия этих треугольников. Например, если расстояние $C'B = 18$ *м*, а $CB =$

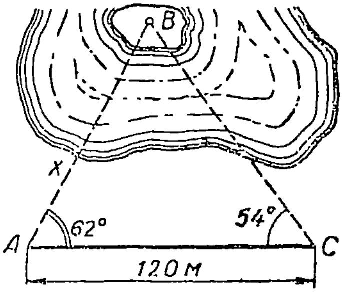
$= 1{,}5$ *м*, то коэффициент подобия будет равен $\frac{18}{1{,}5} = 12$. Если длина катета AC составит, например, $1{,}8$ *м*, то высота дерева составит $1{,}8 \cdot 12 = 21{,}6$ (*м*).



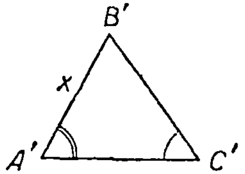
Черт. 373

4. Определение расстояния до недоступной точки.

Пусть надо определить расстояние от пункта A до B, находящегося где-нибудь в недоступном месте, например на островке, окружённом водой (черт. 374). Примем пункты A и B за геометрические точки. Провешим по возможности на ровном месте отрезок AC и измерим его. Пусть длина отрезка составит, например, 120 *м*. Измерим с помощью астролябии углы A и C. Пусть они составят 62°, 54°. На листе бумаги в масштабе 0,001 построим треугольник $A'B'C'$ с углами в 62° и 54° (черт. 375). Этот треугольник будет подобен



Черт. 374



Черт. 375

треугольнику ABC. Коэффициент подобия их будет равен 1000. На чертеже измерим отрезок $A'B'$. Пусть длина его будет равна 142 *мм*. Помножим длину $A'B'$ на коэффициент подобия этих треугольников, получим: $142 \cdot 1000 = 142\,000$ (*мм*), что составит 142 *м*. Это и будет искомое расстояние от пункта A до пункта B. В целях достижения наибольшей точности необходимо особенно тщательно измерить углы треугольника ABC и, кроме того, отрезок AC взять таким образом, чтобы $\angle B$ не был слишком мал, так как тогда значительно уменьшится точность результата.

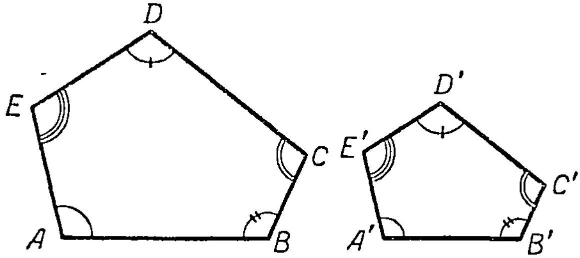
Практические работы.

1. Сделать в мастерской металлический пропорциональный циркуль.
2. Начертить поперечный масштаб, приняв за единицу 1 *дм*.
3. Определить расстояние до какого-нибудь недоступного пункта.
4. Определить высоту какого-нибудь предмета: здания, мачты, дерева.

§ 90. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

Два одноимённых многоугольника называются подобными, если углы одного из них соответственно равны углам другого, а сходственные стороны многоугольников пропорциональны.

Одноимёнными называются многоугольники, имеющие одинаковое число сторон (углов).



Черт. 376

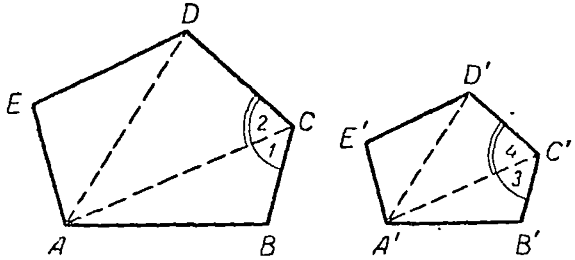
Сходственными называются стороны подобных многоугольников, соединяющие вершины соответственно равных углов (черт. 376). Так, например, чтобы многоугольник $ABCDE$ был подобен многоугольнику $A'B'C'D'E'$, необходимо, чтобы $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$; $\angle D = \angle D'$; $\angle E = \angle E'$ и, кроме того, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$.

Упражнения.

1. Будут ли подобны два любых квадрата?
2. Будут ли подобны два любых прямоугольника?
3. Будут ли подобны два любых ромба?

Теорема. ***Два подобных многоугольника диагоналями, проведёнными из вершин любой пары соответственно равных углов, разбиваются на одинаковое число подобных треугольников.***

Пусть многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ подобны (черт. 377), т. е. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$ и $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$, $\angle E = \angle E'$.



Черт. 377

В обоих многоугольниках из вершин каких-нибудь соответственно равных углов, например из вершин A и A', проведём диагонали. Мы видим, что многоугольники разбились на одинаковое число треугольников. Докажем, что эти треугольники подобны, а именно: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ и $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$.

Подобие треугольников ABC и $A'B'C'$ вытекает из равенства углов B и B' и пропорциональности сторон $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Рассмотрим треугольники ACD и $A'C'D'$. Из подобия треугольников ABC и $A'B'C'$ следует, что $\angle 1 = \angle 3$. В данных многоугольниках $\angle C = \angle C'$, поэтому и $\angle C - \angle 1 = \angle C' - \angle 3$, т. е. $\angle 2 = \angle 4$;

из подобия тех же треугольников следует, что $\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$. В то же время из условия теоремы имеем: $\frac{BC}{B'C'} = \frac{DC}{D'C'}$; так как первые отношения этих пропорций равны, то должны быть равны и вторые отношения их, т. е. $\frac{AC}{A'C'} = \frac{DC}{D'C'}$.

В треугольниках ACD и $A'C'D'$ имеем по равному углу, заключённому между пропорциональными сторонами, следовательно,

$$\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'.$$

Подобие треугольников ADE и $A'D'E'$ следует из того, что $\angle E = \angle E'$ (по условию) и $\frac{AE}{A'E'} = \frac{ED}{E'D'}$ (по определению подобных многоугольников). Таким образом, эти треугольники имеют по равному углу, заключённому между пропорциональными сторонами. Следовательно, $\triangle AED \sim \triangle A'E'D'$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Подобные треугольники расположены в подобных многоугольниках в одном и том же порядке.

Мы рассмотрели два подобных пятиугольника. Таким же путём может быть построено доказательство для любых подобных многоугольников.

Упражнение.

Дано (черт. 377): $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$; $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$ и $\triangle AED \sim \triangle A'E'D'$.

Доказать, что многоугольники $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ подобны.

§ 91. ОТНОШЕНИЕ ПЕРИМЕТРОВ ПОДОБНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

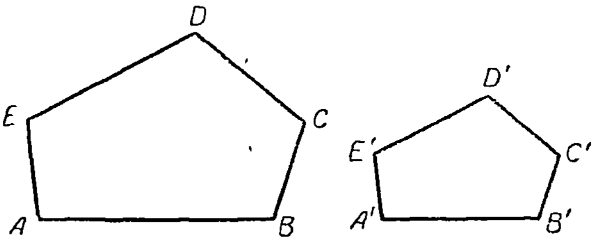
Сначала рассмотрим свойство ряда равных отношений. Пусть имеем, например, отношения: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = 2$. Найдём сумму предыдущих членов этих отношений, затем сумму их последующих членов и найдём отношение этих сумм, получим: $\frac{2+4+6+8}{1+2+3+4} = \frac{20}{10} = 2$. То же самое мы получим, если возьмём ряд каких-нибудь других отношений, например: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$. Найдём сумму предыдущих членов этих отношений и сумму последующих, а затем найдём отношение этих сумм, получим:

$$\frac{2+4+6+8+10}{3+6+9+12+15} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}.$$

В том и другом случае сумма предыдущих членов ряда равных отношений относится к сумме последующих членов этого же ряда, как предыдущий член любого из этих отношений относится к своему последующему.

Мы вывели это свойство, рассмотрев ряд числовых примеров. Оно может быть выведено строго и в общем виде.

Теперь рассмотрим отношение периметров подобных многоугольников.



Черт. 378

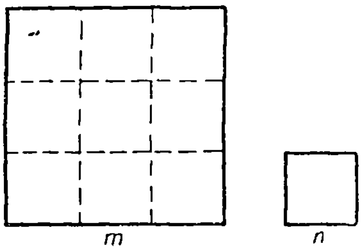
Пусть многоугольник $ABCDE$ подобен многоугольнику $A'B'C'D'E'$ (черт. 378). Из подобия этих многоугольников следует, что $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$. На основании выведенного нами свойства ряда равных отношений можем написать: $\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'} = \frac{AB}{A'B'}$. Сумма предыдущих членов взятых нами отношений представляет собой периметр первого многоугольника (P), а сумма последующих членов этих отношений представляет собой периметр второго многоугольника (P'), значит, $\frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$.

Следовательно, ***периметры подобных многоугольников относятся как их сходственные стороны.***

§ 92. ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ФИГУР.

1. Отношение площадей квадратов.

Рассмотрим отношение площадей двух квадратов. Если сторону одного квадрата обозначим через m, а сторону другого — через n, то площади будут соответственно равны m^2 и n^2 (черт. 379). Обозначив площадь первого квадрата через S, а площадь второго — через S', получим: $\frac{S}{S'} = \frac{m^2}{n^2}$, т. е. ***площади квадратов относятся как квадраты их сторон.***



Черт. 379

Полученную формулу можно преобразовать так: $\frac{S}{S'} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$.

Значит, можно сказать, что отношение площадей двух квадратов равно квадрату отношения их сторон.

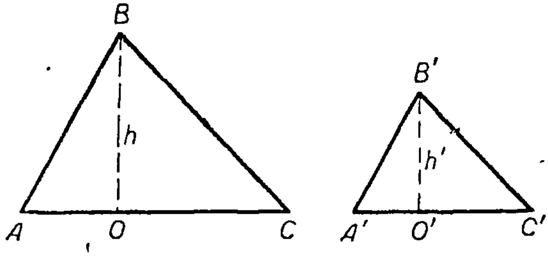
На чертеже 379 отношение сторон квадратов равно 3, отношение их площадей равно $3^2 = 9$.

2. Отношение площадей двух подобных треугольников.

Пусть $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ (черт. 380). Из подобия треугольников следует, что $\angle A = \angle A'$; $\angle B = \angle B'$ и $\angle C = \angle C'$. Кроме того, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$. В этих треугольниках из вершин B и B' проведём высоты и обозначим их через h и h'. Площадь первого треугольника будет равна $\frac{AC \cdot h}{2}$, а площадь второго треугольника $\frac{A'C' \cdot h'}{2}$.

Обозначив площадь первого треугольника через S, а площадь второго — через S', получим: $\frac{S}{S'} = \frac{AC \cdot h}{A'C' \cdot h'}$, или $\frac{S}{S'} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{h}{h'}$.

Из подобия треугольников ABO и $A'B'O'$ (они подобны, потому что прямоугольные и, кроме того, имеют по равному острому углу,



Черт. 380

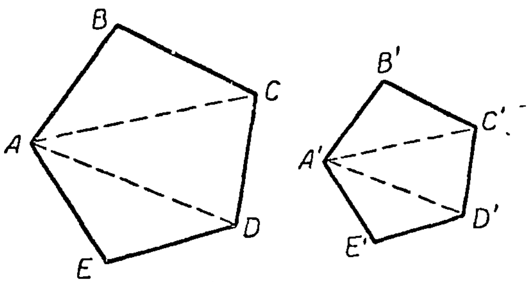
а именно $\angle A = \angle A'$) следует: $\frac{h}{h'} = \frac{AB}{A'B'}$. Но $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$. Следовательно, $\frac{h}{h'} = \frac{AC}{A'C'}$. Заменив в формуле $\frac{S}{S'} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{h}{h'}$ отношение $\frac{h}{h'}$ равным ему отношением $\frac{AC}{A'C'}$, получим: $\frac{S}{S'} = \frac{AC}{A'C'} \cdot \frac{AC}{A'C'}$, или $\frac{S}{S'} = \frac{(AC)^2}{(A'C')^2}$. Итак, ***площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон.***

Полученную формулу можно преобразовать так: $\frac{S}{S'} = \left(\frac{AC}{A'C'}\right)^2$.

Значит, можно сказать, что отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату отношения их сходственных сторон.

3. Отношение площадей подобных многоугольников.

Пусть $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ — подобные многоугольники (черт. 381). Известно, что $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, $\triangle ACD \sim \triangle A'C'D'$, $\triangle ADE \sim \triangle A'D'E'$ (§ 90). Кроме того, $\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle A'B'C'} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$;



Черт. 381

$\frac{\text{пл. } \triangle ACD}{\text{пл. } \triangle A'C'D'} = \frac{(CD)^2}{(C'D')^2}$; $\frac{\text{пл. } \triangle ADE}{\text{пл. } \triangle A'D'E'} = \frac{(DE)^2}{(D'E')^2}$. Так как вторые отношения этих пропорций равны, что вытекает из подобия многоугольников, то $\frac{\text{пл. } \triangle ABC}{\text{пл. } \triangle A'B'C'} = \frac{\text{пл. } \triangle ACD}{\text{пл. } \triangle A'C'D'} = \frac{\text{пл. } \triangle ADE}{\text{пл. } \triangle A'D'E'} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}$.

Используя свойство ряда равных отношений, получим:

$$\frac{\text{пл. } \triangle ABC + \text{пл. } \triangle ACD + \text{пл. } \triangle ADE}{\text{пл. } \triangle A'B'C' + \text{пл. } \triangle A'C'D' + \text{пл. } \triangle A'D'E'} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2}, \text{ или } \frac{S}{S'} = \frac{(AB)^2}{(A'B')^2},$$

где S и S' — площади данных подобных многоугольников.

Следовательно, ***площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон.*** Полученную формулу можно привести к такому виду: $\frac{S}{S'} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2$.

Упражнения.

1. Сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата в 2 раза (в 5 раз). Во сколько раз площадь первого квадрата больше площади второго квадрата?

2. Сторона первого квадрата составляет $\frac{1}{3}$ (0,1) стороны второго квадрата. Какую часть площадь первого квадрата составляет от площади второго квадрата?

3. Коэффициент подобия в подобных многоугольниках равен 4 $\left(\frac{1}{5}\right.$; 0,4, 2,5). Чему равно отношение их площадей?

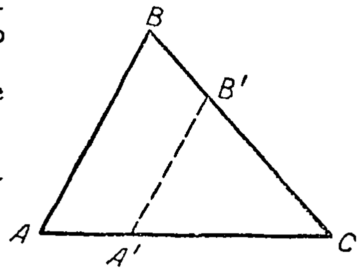
4. Отношение площадей подобных многоугольников равно 36 (100, 0,09). Чему равно отношение сходственных сторон этих многоугольников?

§ 93. ПОСТРОЕНИЕ ПОДОБНЫХ ФИГУР.

1. Построение подобных треугольников.

Мы уже знаем, что для построения треугольника, подобного данному, достаточно из какой-нибудь точки, взятой на стороне треугольника, провести прямую, параллельную стороне треугольника. Получим треугольник, подобный данному (черт. 382):

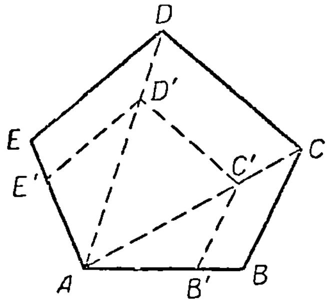
$$\triangle ACB \sim \triangle A'CB'.$$



Черт. 382

2. Построение подобных многоугольников.

Для построения многоугольника, подобного данному, мы можем поступить таким образом: разобьём данный многоугольник диагоналями, проведёнными из какой-либо его вершины, на треугольники (черт. 383). На какой-нибудь стороне данного многоугольника $ABCDE$, например на стороне AE, возьмём какую-нибудь точку E' и проведём прямую, параллельную стороне ED, до пересечения её с диагональю AD, например, в точке D'. Из точки D' проведём прямую, параллельную стороне DC, до пересечения её с диагональю AC в точке C'. Из точки C' проведём прямую, параллельную стороне CB, до пересечения со стороной AB в точке B'. Полученный многоугольник $AB'C'D'E'$ подобен данному многоугольнику $ABCDE$.



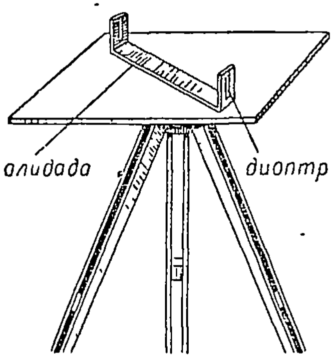
Черт. 383

Справедливость этого утверждения доказать самостоятельно.

Если требуется построить многоугольник, подобный данному, с указанным коэффициентом подобия, то исходная точка E' берётся на стороне AE или её продолжении соответственно данному коэффициенту подобия.

3. Съёмка плана земельного участка.

а) Съёмка плана производится с помощью особого прибора, называемого **м е н з у л о й** (черт. 384).

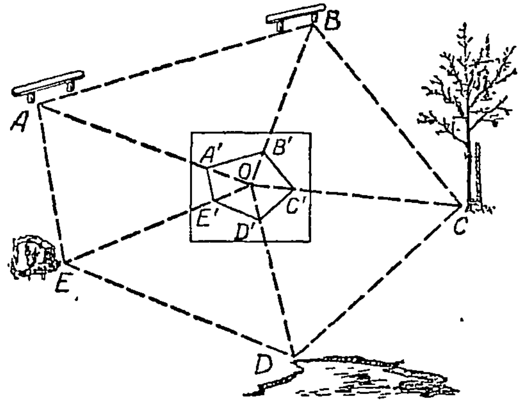


Черт. 384

Мензула представляет собой квадратную доску, помещённую на треножнике. При вычерчивании плана доска приводится в горизонтальное положение, что проверяется с помощью уровня. Для проведения прямых линий по нужному направлению употребляется алидада, снабжённая диоптрами. В каждом диоптре имеется прорезь, в которой натянут волосок, что позволяет достаточно точно наводить алидаду в нужном направлении. На мензулу кнопками укрепляют лист белой бумаги, на котором и вычерчивается план.

Для того чтобы снять план с земельного участка $ABCDE$, выбирают внутри участка какую-нибудь точку O так, чтобы из неё были видны все вершины земельного участка (черт. 385). С помощью вилки с отвесом (черт. 386) устанавливают мензулу так, чтобы точка O, отмеченная на листе бумаги, приходилась против избранной на участке точки O. Затем из точки O на листе бумаги, прикреплённом к мензуле, прочерчивают при помощи алидады лучи в направлениях точек A, B, C, D и E; измеряют расстояния OA, OB, OC, OD и OE и откладывают на этих лучах в принятом масштабе отрезки OA', OB', OC', OD' и OE'.

Точки A', B', C', D' и E' соединяют. Получается многоугольник $A'B'C'D'E'$, представляющий собой план данного земельного участка в принятом масштабе.



Черт. 385

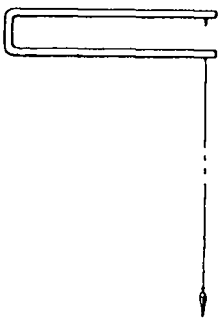
Описанный нами способ мензульной съёмки называется п о л я р н ы м.

Существуют и другие способы съёмки плана с помощью мензулы, о которых можно прочитать в специальных руководствах по мензульной съёмке.

На каждом плане обыкновенно даётся масштаб, по которому можно установить истинные размеры снятого участка, а также и его площадь.

На плане также указывается направление стран света.

П р а к т и ч е с к а я р а б о т а. Сделать в школьной мастерской простейшую модель мензулы и снять с её помощью план какого-нибудь небольшого земельного участка.



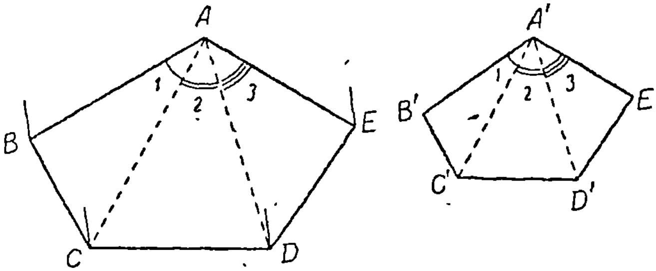
Черт. 386

б) Съёмку плана земельного участка можно произвести с помощью астролябии.

Пусть надо снять план земельного участка $ABCDE$. Возьмём одну из вершин участка, например A, за исходную и с помощью астролябии измерим углы при вершине A, т. е. $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (черт. 387).

Потом с помощью мерной цепи измерим расстояния AE, AD, AC и AB. В зависимости от размеров участка и размеров листа бумаги, на который наносится план, выбирается масштаб для вычерчивания плана.

При точке A, которую принимаем за вершину многоугольника, строим три угла, соответственно равные $\angle 1$, $\angle 2$ и $\angle 3$; затем в из-



Черт. 387

бранном масштабе на сторонах этих углов от точки A' откладываем отрезки $A'E'$, $A'D'$, $A'C'$ и $A'B'$. Соединив отрезками точки A' и E', E' и D', D' и C', C' и B', B' и A', получим многоугольник $A'B'C'D'E'$, подобный многоугольнику $ABCDE$. Это будет план данного земельного участка, начерченный в избранном масштабе.

ГЛАВА IX.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА.

На основании равенства и подобия треугольников мы имели возможность решить ряд задач, связанных с определением расстояний, измерить которые непосредственно не представлялось возможным. Например, мы находили расстояние до недоступной точки, высоту предметов, расстояние между пунктами, разделёнными каким-нибудь препятствием, и т. д.

Такие работы имеют большое практическое значение, однако при их выполнении мы получали недостаточно точные результаты. Если результаты, полученные нами, могли удовлетворять нас, когда мы имели дело с фигурами небольших размеров, то они совершенно не могли бы удовлетворить нас в силу своей неточности, если бы мы имели дело с фигурами, имеющими большие размеры. Кроме того, без угломерного инструмента мы не в состоянии были находить размеры углов, имея в своём распоряжении только лишь длину тех или иных отрезков; например, по длине сторон произвольного треугольника мы не могли определять величину его углов.

Однако в математической науке существуют такие приёмы, которые обеспечивают необходимую точность измерений, несмотря на значительные размеры избранных для измерения расстояний, а кроме того, дают возможность по длине тех или иных отрезков определять размеры нужных нам углов и длины неизвестных отрезков.

Овладение такими приёмами связано с изучением так называемых тригонометрических функций. К ознакомлению с некоторыми из них мы и переходим.

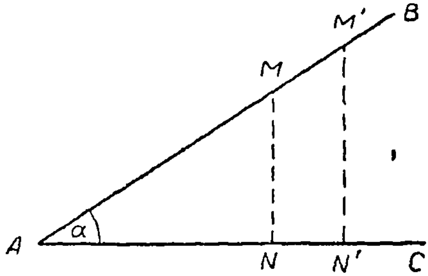
§ 94. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

1. Соответствие между отношением сторон и величиной острых углов в прямоугольном треугольнике.

Пусть имеется какой-нибудь произвольный острый угол, например $\angle BAC = \alpha$ (черт. 388). На стороне AB возьмём произвольную точку M и опустим из неё перпендикуляр MN на сторону AC. Получим прямоугольный треугольник MAN.

Возьмём отношения его сторон попарно:

$\frac{MN}{AM}$ (отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе);



Черт. 388

$\frac{AN}{AM}$ (отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе);

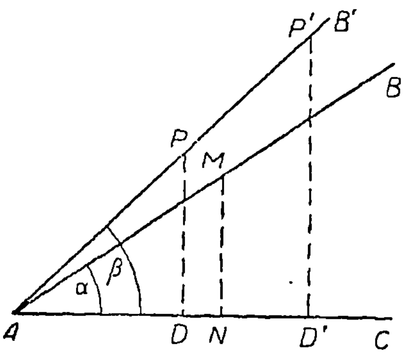
$\frac{MN}{AN}$ (отношение катета, противолежащего углу α, к катету прилежащему);

$\frac{AM}{MN}$ (отношение гипотенузы к катету, противолежащему углу α);

$\frac{AM}{AN}$ (отношение гипотенузы к катету, прилежащему к углу α);

$\frac{AN}{MN}$ (отношение катета, прилежащего к углу α, к катету противолежащему).

Мы получили 6 отношений. Величина этих отношений не зависит от того, где на стороне AB мы возьмём точку M. Так, если вместо точки M мы возьмём на стороне AB какую-нибудь точку M' (черт. 388), то новый треугольник $AM'N'$ будет подобен треугольнику MAN и потому ни одно из отношений не изменится.



Черт. 389

Значит, взятому углу α соответствуют одни и те же определённые значения каждого из отношений. Возьмём теперь другой острый угол, $\angle B'AC = \beta$ (например, больший угла α), и на стороне AB' отметим точку P так, чтобы $AP = AM$ (черт. 389). Как увидим ниже, подобный выбор точки P не повлияет на общность рассуждений. Опустив из точки P перпендикуляр PD на сторону AC, получим прямоугольный треугольник APD.

Составим отношения сторон этого треугольника в том же порядке, как и для треугольника MAN:

$$\frac{PD}{AP};\ \frac{AD}{AP};\ \frac{PD}{AD};\ \frac{AP}{PD};\ \frac{AP}{AD};\ \frac{AD}{PD}.$$

Эти отношения не изменятся, если точку P переместим в любую точку P' луча AB'. Значит, взятому значению угла β соответствует определённое значение каждого из отношений.

Однако если мы сравним значения соответствующих отношений для угла α и для угла β, то увидим, что они различны:

$\frac{PD}{AP} \neq \frac{MN}{AM}$, так как $AP = AM$, а $PD > MN$;

$\frac{AD}{AP} \neq \frac{AN}{AM}$, так как $AP = AM$, а $AD < AN$;

$\frac{PD}{AD} \neq \frac{MN}{AN}$, так как $PD > MN$ и $AD < AN$ и, следовательно, первое отношение больше второго и т. д.

Таким образом, выходит, что каждому размеру острого угла соответствует определённое значение каждого отношения сторон. Справедливо и обратное утверждение: каждому значению отношения сторон соответствует определённый размер угла.

На этом основании можно считать, что отношения сторон прямоугольного треугольника являются ф у н к ц и я м и е г о о с т р о г о у г л а. Эти функции называются т р и г о н о м е т р и ч е с к и м и ф у н к ц и я м и у г л а.

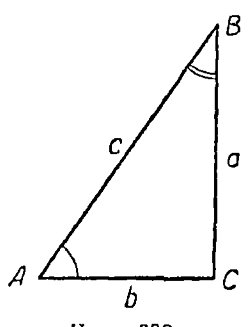
Перейдём к более подробному их рассмотрению.

2. Определение тригонометрических функций.

Возьмём прямоугольный треугольник ABC и обозначим его стороны буквами a, b и c (черт. 390). Рассмотрим сначала функции угла A.

Отношение $\frac{a}{c}$ называется с и н у с о м угла A, т. е. **синусом угла A называется отношение катета, противолежащего этому углу, к гипотенузе.**

Отношение $\frac{b}{c}$ называется к о с и н у с о м угла A, т. е. **косинусом угла A называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе.**



Черт. 390

Отношение $\frac{a}{b}$ называется т а н г е н с о м угла A, т. е. **тангенсом угла A называется отношение катета, противолежащего этому углу, к катету прилежащему.**

Отношение $\frac{b}{a}$ называется **котангенсом** угла A, т. е. **котангенсом угла A называется отношение катета, прилежащего к этому углу, к катету противолежащему.**

Отношение $\frac{c}{b}$ называется **секансом** угла A.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется **косекансом** угла A.

Наиболее употребительными являются первые четыре функции: синус, косинус, тангенс и котангенс.

Эти функции угла A обозначаются так: $\sin \angle A$, $\cos \angle A$, $\operatorname{tg} \angle A$ и $\operatorname{ctg} \angle A$;

$\frac{a}{c} = \sin \angle A$; $\frac{b}{c} = \cos \angle A$; $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \angle A$; $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \angle A$.

Установим теперь функции для $\angle B$.

$\frac{b}{c}$ — синус угла B, $\frac{b}{c} = \sin \angle B$;

$\frac{a}{c}$ — косинус угла B, $\frac{a}{c} = \cos \angle B$;

$\frac{b}{a}$ — тангенс угла B, $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \angle B$;

$\frac{a}{b}$ — котангенс угла B, $\frac{a}{b} = \operatorname{ctg} \angle B$.

Упражнения.

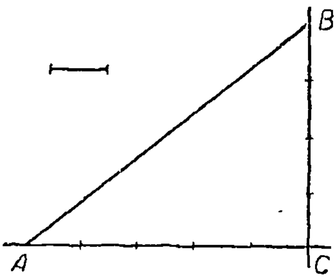
1. (Устно.) Начертить прямоугольный треугольник с катетами 3 *см* и 4 *см*. Вычислить с помощью теоремы Пифагора длину гипотенузы, а затем синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов треугольника.

2. Начертить прямоугольный треугольник ABC с катетами: $AC = 18$ *мм*, $BC = 24$ *мм*, вычислить с помощью теоремы Пифагора длину гипотенузы AB и найти синус, косинус, тангенс и котангенс угла A, а затем синус, косинус, тангенс и котангенс угла B.

3. Начертить произвольный прямоугольный треугольник, измерить его стороны в миллиметрах и найти синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов треугольника с точностью до 0,01.

§ 95. ПОСТРОЕНИЕ УГЛА ПО ЗАДАННОМУ ЗНАЧЕНИЮ ОДНОЙ ИЗ ЕГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

1. *Построить угол, тангенс которого равен* $\frac{4}{5}$.



Черт. 391

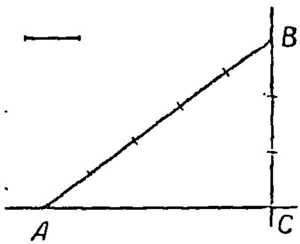
Построим с помощью чертёжного треугольника прямой угол и на одной его стороне отложим от вершины 5 произвольных масштабных единиц, а на другой — 4 (черт. 391). Соединив точки A и B, получим прямоугольный треугольник ABC.

$\angle A$ будет искомым, так как

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{4}{5}.$$

2. *Построить угол, синус которого равен* $\frac{3}{5}$.

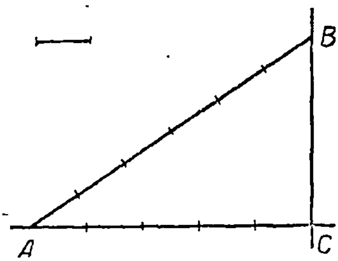
Построим прямой угол и на одной его стороне отложим от вершины отрезок CB, равный трём произвольным масштабным единицам (черт. 392). Из точки B как из центра радиусом, равным 5 тем же масштабным единицам, опишем дугу, пересекающую другую сторону прямого угла. Точку пересечения обозначим буквой A. Соединив точки A и B, получим прямоугольный треугольник ABC. $\angle A$ — искомый, так как $\sin \angle A = \frac{3}{5}$.



Черт. 392

3. *Построить угол, косинус которого равен* $\frac{5}{6}$.

Построим прямой угол и на одной его стороне отложим от вершины угла отрезок AC, равный 5 произвольным масштабным единицам (черт. 393). Из точки A как из центра радиусом, равным 6 тем же масштабным единицам, опишем дугу, пересекающую другую сторону прямого угла. Точку пересечения обозначим буквой B. Соединив точки A и B, получим прямоугольный треугольник ABC.



Черт. 393

$\angle A$—искомый, так как $\cos \angle A = \frac{5}{6}$.

Так как каждый из катетов прямоугольного треугольника всегда меньше гипотенузы, то синус и косинус любого острого угла всегда меньше 1.

Что касается сравнительной величины катетов, то каждый из них может быть и больше и меньше другого. Поэтому $\operatorname{tg} \angle A$ и $\operatorname{ctg} \angle A$ могут быть выражены любым положительным числом. Каждый из них может быть меньше единицы, больше единицы и равен единице.

§ 96. ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ.

Найдём значения тригонометрических функций для углов в 30°, 45° и 60°.

1) Для угла в 30°.

Возьмём прямоугольный треугольник с острым углом в 30° (черт. 394). Обозначим длину гипотенузы AB через c и выразим длины катетов.

$BC = \frac{c}{2}$, как катет, лежащий против угла в 30°.

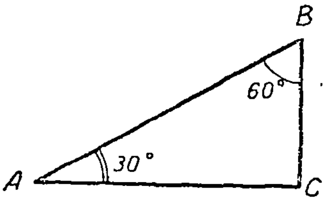
Катет AC найдём по теореме Пифагора.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

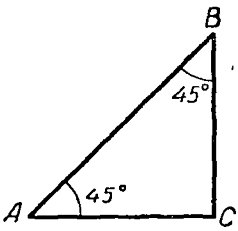
Тогда $\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\quad \operatorname{tg} 30° = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$;

$\cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{3}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660.$



Черт. 394



Черт. 395

2) Для угла в 45°.

Возьмём прямоугольный треугольник с острыми углами по 45° (черт. 395). Обозначим длину гипотенузы AB через c и выразим длины катетов. $AC = BC$, следовательно, по теореме Пифагора

$AB^2 = 2BC^2$, откуда $BC^2 = \frac{AB^2}{2} = \frac{2AB^2}{4} = \frac{2c^2}{4}$.

Значит, $BC = \sqrt{\frac{2c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, одновременно и $AC = \frac{c\sqrt{2}}{2}$.

Тогда $\sin 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{\frac{c\sqrt{2}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$;

$\operatorname{tg} 45° = \frac{BC}{AC} = 1$;

$\cos 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071.$

3) Для угла в 60°.

Значения тригонометрических функций для угла в 60° можно найти из того же треугольника, из которого нашли значения тригонометрических функций для угла в 30° (черт. 394), так как если $\angle A = 30°$, то $\angle B = 60°$.

Тогда

$$\sin 60^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660; \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{AC}{BC} = \sqrt{3} \approx 1{,}7321;$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Составим теперь таблицу значений тригонометрических функций для углов в 30°, 45° и 60°.

Угол	Синус	Косинус	Тангенс
30°	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5774$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	$\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}8660$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\sqrt{3} \approx 1{,}7321$

Рассматривая эту таблицу, можно заметить, что синус и тангенс острого угла в о з р а с т а ю т при увеличении угла, а косинус при увеличении угла у б ы в а е т.

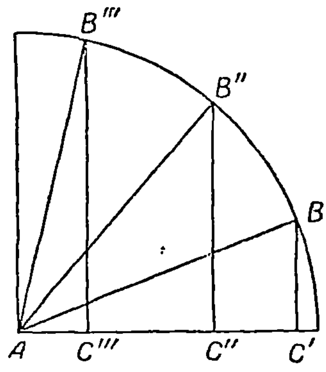
При уменьшении угла синус и тангенс убывают, а косинус возрастает.

Упражнения.

1. Пользуясь чертежом, рассмотреть изменение тригонометрических функций в связи с изменением угла (черт. 396).

2. Значения тригонометрических функций острых углов помещены в математических таблицах В. М. Брадиса. Подробное описание таблиц и указания к их использованию даны в самих таблицах.

Пользуясь таблицами Брадиса, рассмотреть изменение тригонометрических функций в связи с изменением угла.



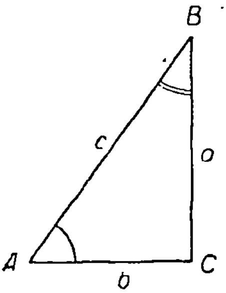
Черт. 396

§ 97. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УГЛОВ.

Дополнительными углами называются два угла, которые в сумме составляют 90°. Такими углами, в частности, являются острые углы прямоугольного треугольника.

Углы A и B в прямоугольном треугольнике ACB (черт. 397) являются дополнительными углами, так как $\angle A + \angle B = 90^\circ$; $\angle A = 90^\circ - \angle B$; $\angle B = 90^\circ - \angle A$.

Рассмотрим соотношения между тригонометрическими функциями дополнительных углов.



Черт. 397

1) $\sin \angle A = \frac{a}{c}$; $\cos \angle B = \frac{a}{c}$, т. е. ***синус данного угла равен косинусу дополнительного угла.***

2) $\cos \angle A = \frac{b}{c}$; $\sin \angle B = \frac{b}{c}$; т. е. ***косинус данного угла равен синусу дополнительного угла.***

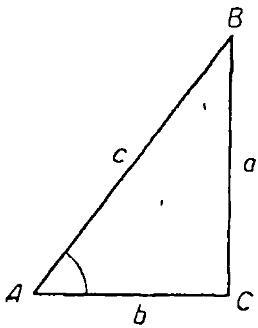
3) $\operatorname{tg} \angle A = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg} \angle B = \frac{a}{b}$, т. е. ***тангенс данного угла равен котангенсу дополнительного угла.***

4) $\operatorname{ctg} \angle A = \frac{b}{a}$; $\operatorname{tg} \angle B = \frac{b}{a}$, т. е. ***котангенс данного угла равен тангенсу дополнительного угла.***

Знание соотношений между тригонометрическими функциями дополнительных углов важно для понимания устройства тригонометрических таблиц.

§ 98. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ.

Пусть дан прямоугольный треугольник ABC (черт. 398). Обозначим его стороны через a, b и c. По определению тригонометрических функций: $\frac{a}{c} = \sin \angle A$; $\frac{a}{c} = \cos \angle B$; $\frac{b}{c} = \sin \angle B$; $\frac{b}{c} = \cos \angle A$. Отсюда $a = c \sin \angle A = c \cos \angle B$; $b = c \sin \angle B = c \cos \angle A$, т. е. ***катет прямоугольного треугольника равен гипотенузе, умноженной на синус угла, противолежащего этому катету, или на косинус угла, прилежащего к нему.***



Черт. 398

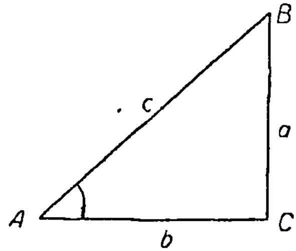
Из того же прямоугольного треугольника имеем, что $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \angle A$, отсюда $a = b \operatorname{tg} \angle A$; $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \angle A$, откуда $b = a \operatorname{ctg} \angle A$, т. е. ***катет прямоугольного треугольника равен другому катету, умноженному на тангенс угла, противолежащего первому катету, или на котангенс угла, прилежащего к первому катету.***

§ 99. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Выведенные нами соотношения дают возможность решать прямоугольные треугольники, т. е. по некоторым данным элементам треугольника находить все остальные.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Даны гипотенуза прямоугольного треугольника и один из его острых углов. Найти катеты этого треугольника и второй острый угол.*

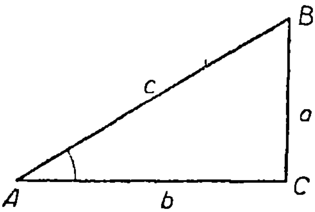


Черт. 399

Пусть гипотенуза $c = 82{,}0$ *см*; $\angle A = 42°$ (черт. 399). Вычислить длину катетов a и b и величину угла B. Прежде всего определим величину $\angle B$. $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 42° = 48°$.

Чтобы вычислить длину катета a, найдём по таблицам значение синуса угла в 42°, $\sin 42° = 0{,}6691$. Так как $a = c \sin \angle A$, получим: $a = 82{,}0 \times 0{,}6691 \approx 54{,}9$ (*см*).

Второй катет треугольника можно вычислить различными способами. Используя значение угла A, находим: $b = c \cos 42°$, или $b = 82{,}0 \cdot 0{,}7431 \approx 60{,}9$ (*см*).



Черт. 400

Все неизвестные элементы треугольника ABC вычислены.

Длину катета b можно найти из равенства $b = c \sin \angle B$, т. е. $b = c \sin 48°$.

Пользуясь таблицами квадратов чисел, можно также вычислить катет b и на основании теоремы Пифагора

$$b \approx \sqrt{82^2 - 55^2}.$$

2. *Даны катет прямоугольного треугольника и один из его острых углов. Найти гипотенузу, второй катет этого треугольника и второй острый угол.*

Пусть катет a равен 25 *см*, угол A равен 32° (черт. 400). Вычислить длину гипотенузы c, длину катета b и величину угла B. $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 32° = 58°$;

$$a = c \sin \angle A; \text{ откуда } c = \frac{a}{\sin \angle A}; \quad c = \frac{25}{\sin 32°}; \quad c = \frac{25}{0{,}5299} \approx 47 \quad (\text{см});$$

$$a = b \operatorname{tg} \angle A; \quad b = \frac{a}{\operatorname{tg} \angle A}; \quad b = \frac{25}{0{,}6249} \approx 40 \ (\text{см}).$$

Все неизвестные элементы треугольника ABC вычислены.

Можно было и в данной задаче применить иные способы решения. Например: $b = \sqrt{c^2 - a^2} \approx \sqrt{47^2 - 25^2} \approx 40$ (*см*).

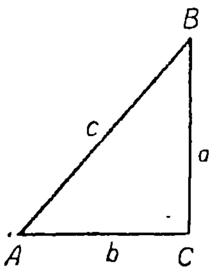
3. *Даны два катета прямоугольного треугольника, найти его гипотенузу и величину острых углов.*

Пусть катет a равен 21 *см*, а катет b равен 18 *см* (черт. 401). Вычислить длину гипотенузы c и величину углов A и B.

Найдём сначала (пользуясь теоремой Пифагора и таблицами квадратов чисел) длину гипотенузы c:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2};\ c = \sqrt{21^2 + 18^2} \approx 28 \text{ (см)}.$$

Найдём величину одного из острых углов, используя равенство $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \angle A$. $\operatorname{tg} \angle A = \frac{21}{18} \approx 1{,}1667$. Откуда $\angle A \approx 49°$ (с точностью до 1°), тогда $\angle B \approx 41°$.



Черт. 401

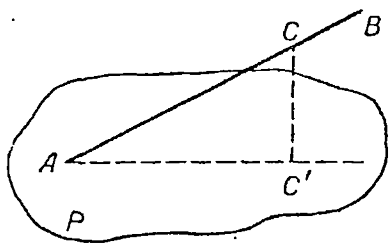
4. *Даны катет и гипотенуза прямоугольного треугольника. Катет $a = 52$ см, гипотенуза $c = 67$ см. Решить треугольник* (самостоятельно).

З а м е ч а н и е. Для решения прямоугольных треугольников рекомендуется широко пользоваться логарифмической линейкой и различными таблицами.

§ 100. УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ.

При выполнении различных практических измерительных работ на местности часто приходится использовать углы, образуемые прямой с плоскостью.

Угол прямой с плоскостью определяется следующим образом. Пусть имеется плоскость и какая-нибудь прямая, пересекающая эту плоскость (черт. 402), например прямая AB пересекает плоскость P в точке A. Чтобы определить угол этой прямой с данной плоскостью, из какой-нибудь точки C прямой AB опустим перпендикуляр CC' на данную плоскость P.



Черт. 402

Через точки A и C' проведём на плоскости P прямую AC'. $\angle BAC'$ и будет углом, образованным прямой AB с данной плоскостью P.

§ 101. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ТРИГОНОМЕТРИИ.

Мы уже имели дело с различными практическими задачами, которые решали или на основании равенства треугольников, или на основании их подобия.

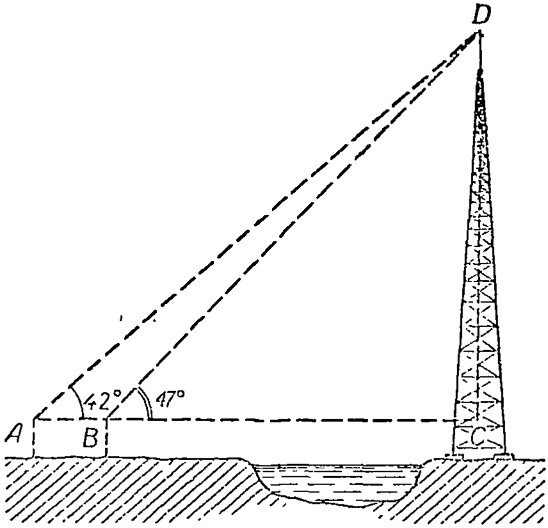
Знание тригонометрических функций позволяет нам решать такие задачи более совершенными методами и с большей точностью.

Рассмотрим несколько таких задач.

I. *Определить высоту предмета, к основанию которого подойти нельзя.*

Например, нужно определить высоту телевизионной антенны, которая отделена от нас рекой (черт. 403).

Рассмотрим прямоугольный треугольник ACD. В этом треугольнике мы можем с помощью астролябии измерить угол A. Положим, он равен $42°$.



Черт. 403

В треугольнике BCD измеряем $\angle DBC$, пусть он равен $47°$.

Решение. $\frac{CD}{AC} = \operatorname{tg} 42°$; $\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg} 47°$; $AC = \frac{CD}{\operatorname{tg} 42°}$;

$BC = \frac{CD}{\operatorname{tg} 47°}$ (точки A, B, C находятся на одной прямой).

$$AC - BC = \frac{CD}{\operatorname{tg} 42°} - \frac{CD}{\operatorname{tg} 47°}; \quad AC - BC = CD\left(\frac{1}{\operatorname{tg} 42°} - \frac{1}{\operatorname{tg} 47°}\right);$$

$$AC - BC = CD\left(\frac{1}{0,9004} - \frac{1}{1,0724}\right).$$

Расстояние $AC - BC$, т. е. AB, может быть непосредственно измерено, пусть оно равно $12,0$ *м*, тогда

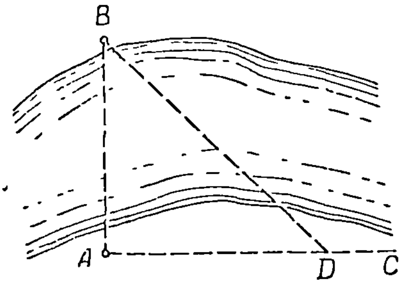
$$12,0 = CD\ (1,1106 - 0,9325) = CD \cdot 0,1781.$$

$$\text{Откуда } CD = \frac{12}{0.1781} \approx 67,4 \text{ (м)}.$$

Для окончательного определения высоты антенны к $67,4$ *м* следует прибавить высоту прибора, с помощью которого определяли углы A и B. Если высота прибора, например, составляла $1,40$ *м*, то окончательно высота антенны будет равна $67,4 + 1,40 = 68,8$ (*м*).

2. *Определить расстояние между пунктами A и B, разделёнными препятствием.*

а) Пусть требуется найти расстояние от пункта A до пункта B, находящегося за рекой (черт. 404).



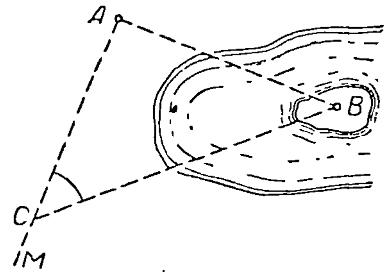
Черт. 404

Строим при помощи астролябии или эккера при точке A прямой угол BAC. Взяв на прямой AC произвольную точку D, с помощью астролябии измеряем угол ADB; пусть он равен 44°. Измеряем расстояние AD; пусть оно составит 120 *м*.

Тогда $\frac{AB}{120} = \operatorname{tg} 44°$, или $AB = 120 \cdot \operatorname{tg} 44° \approx 120 \cdot 0{,}9657 \approx 116$ (*м*).

б) Пусть нужно определить расстояние от пункта A до пункта B, между которыми находится водное пространство (черт. 405).

Принимая точку A за вершину угла, строим прямой угол BAM. На прямой AM фиксируем какую-нибудь точку C, находящуюся от точки A на расстоянии, например, 200 *м*. С помощью астролябии определяем угол ACB. Пусть он будет равен 48°. Тогда $\frac{AB}{AC} = \operatorname{tg} 48°$, или $\frac{AB}{200} = 1{,}1106$.



Черт. 405

Откуда $AB = 1{,}1106 \cdot 200 \approx 222$ (*м*).

Практические работы:

1. Определить в окружающей обстановке высоту какого-нибудь предмета, к основанию которого подойти нельзя.
2. Определить расстояние до какой-нибудь недоступной точки.

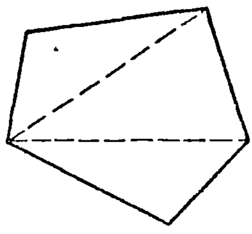
§ 102. СУММА ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ УГЛОВ ВЫПУКЛОГО МНОГОУГОЛЬНИКА.

При съёмке плана земельного участка, имеющего форму многоугольника, необходимо производить проверку правильности измерения его углов.

Для этого нужно знать, как находить сумму внутренних и внешних углов любого многоугольника. К рассмотрению этого вопроса мы и перейдём.

Возьмём многоугольник, имеющий n сторон (черт. 406).

Диагонали, выходящие из одной какой-либо вершины многоугольника, разделяют его на $(n-2)$ треугольника, так как каждый из этих треугольников содержит по одной стороне многоугольника, за исключением двух крайних треугольников, содержащих по две стороны многоугольника.

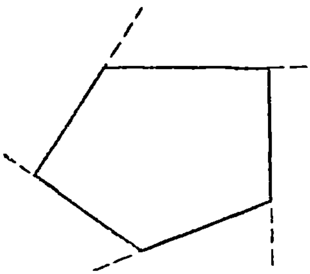


Черт. 406

Следовательно, ***сумма внутренних углов многоугольника равна*** $2d \cdot (n-2)$.

Возьмём многоугольник, имеющий n сторон, и построим при каждой его вершине по одному внешнему углу (черт. 407).

Мы получим n пар смежных углов. Сумма их равна $2d \cdot n$. Сюда входят все внутренние и внешние углы многоугольника. Но так как сумма внутренних углов многоугольника равна $2d(n-2)$, то сумма внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $2dn - 2d(n-2) = 2dn - (2dn - 4d) = 2dn - 2dn + 4d = 4d$.

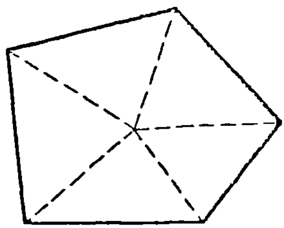


Черт. 407

Следовательно, ***сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой его вершине, равна*** $4d$.

Упражнения.

1. Пользуясь чертежом 408, вывести другим способом формулу для вычисления суммы внутренних углов любого выпуклого многоугольника.
2. Вычислить сумму внутренних углов пятиугольника, шестиугольника, восьмиугольника, двенадцатиугольника.
3. Применить выведенную формулу для вычисления суммы внутренних углов выпуклого многоугольника для четырехугольника и треугольника.
4. Сколько сторон (углов) имеет многоугольник, если сумма внутренних углов его равна $12\ d$?
5. Может ли сумма внутренних углов многоугольника быть выражена нечётным числом d?



Черт. 408

§ 103. СЪЁМКА ПЛАНА ЗЕМЕЛЬНОГО УЧАСТКА С ПОМОЩЬЮ АСТРОЛЯБИИ ПУТЁМ ОБХОДА ПО КОНТУРУ.

Съёмка плана в этом случае производится так: измеряются последовательно все углы многоугольника и все его стороны. Затем в принятом масштабе (в зависимости от размеров участка и листа бумаги, на который наносится план) строится многоугольник с сохранением величины углов. Стороны многоугольника уменьшаются соответственно принятому масштабу.

Полученный многоугольник на плане будет подобен многоугольнику в натуре, так как углы этих многоугольников будут соответственно равны, а сходственные стороны пропорциональны.

Умение точно вычислять сумму внутренних углов любого выпуклого многоугольника даёт нам возможность делать проверку правильности измерения углов при съёмке плана.

Пусть мы имеем план земельного участка, имеющего форму выпуклого многоугольника, например шестиугольника.

По выведенной нами формуле сумма внутренних углов шестиугольника равна $2d \cdot (6 - 2)$, т. е. $8d$, или 720°. У нас же в результате измерений получилось не 720°, а, например, 718°. Таким образом, мы допустили ошибку в 2°. Такая ошибка вполне допустима. Она может быть объяснена недостаточным совершенством измерительных приборов, неточной их установкой, нашей неопытностью, неточностью измерений и т. д.

Если эту ошибку разложить поровну на все 6 углов, то она составит менее $0,5^\circ$ на каждый угол. В таких случаях так и поступают: допущенную ошибку распределяют поровну между всеми углами многоугольника.

Если же расхождение будет более значительным, например в 10—20°, то необходимо вторично и возможно тщательнее выполнить необходимые измерения.

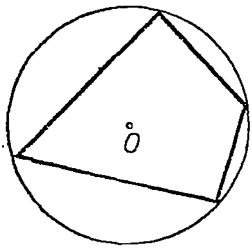
Ошибки при съёмке плана могут быть и при измерении и нанесении на план длин отрезков, поэтому они также должны подвергаться тщательной проверке.

ГЛАВА X.

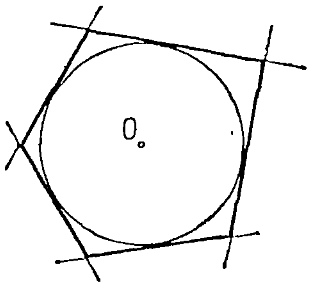
ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 104. ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то многоугольник называется в п и с а н н ы м в окружность, а окружность — о п и с а н н о й около многоугольника (черт. 409)



Черт. 409



Черт. 410

Если все стороны многоугольника являются касательными к окружности, то многоугольник называется о п и с а н н ы м около окружности, а окружность называется в п и с а н н о й в многоугольник (черт. 410).

§ 105. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ.

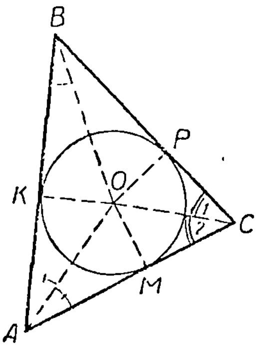
Т е о р е м а 1. ***Около всякого треугольника можно описать окружность.***

Описать окружность около треугольника — это значит построить такую окружность, которая проходила бы через его вершины, т. е. через три точки, не лежащие на одной прямой.

В § 69 была решена задача: «Через три точки, не лежащие на одной прямой, провести окружность». При этом было установлено, что задача всегда имеет решение, и только одно.

На этом основании можем утверждать, что около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Как видно из решения той же задачи, центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника из их середин.



Черт. 411

Теорема 2. ***Во всякий треугольник можно вписать окружность.***

Пусть дан $\triangle ABC$ (черт. 411). Проведём биссектрисы двух углов треугольника, например угла A и угла B. Опустим из точки их пересечения O перпендикуляры на стороны треугольника ABC: $OM \perp AC$, $OK \perp AB$ и $OP \perp BC$.

Все эти перпендикуляры равны между собой: $OP = OK = OM$ (так как $OP = OK$ и $OM = OK$, то и $OP = OM$, § 32).

Следовательно, если из точки O как из центра радиусом, равным OK, описать окружность, то прямые AB, BC и AC будут касательными к окружности O, так как они перпендикулярны к радиусам в конечной их точке на окружности.

Таким образом, окружность O будет вписанной в треугольник ABC.

Следствие. ***Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.***

В $\triangle ABC$ (черт. 411) соединим центр окружности O с вершиной C треугольника и докажем, что OC является биссектрисой $\angle C$.

Для этого сравним два прямоугольных треугольника: $\triangle MOC$ и $\triangle POC$. Они равны по гипотенузе (OC) и катету ($OM = OP$).

Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, т. е. OC является биссектрисой угла C.

Таким образом, все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Примечание. Пересечение биссектрис треугольника в одной точке отмечалось еще в начале настоящего курса, но там это свойство было дано без доказательства.

§ 106. СВОЙСТВА ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКОВ.

Теорема 1. ***Сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°.***

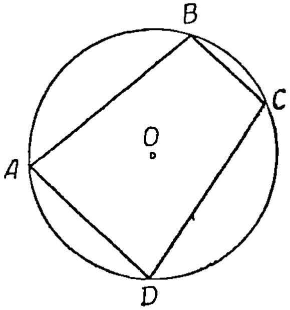
Пусть в окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$ (черт. 412). Требуется доказать, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$.

$\angle A$, как вписанный в окружность O, измеряется $\frac{1}{2} \smile BCD$.

$\angle C$, как вписанный в ту же окружность, измеряется $\frac{1}{2} \smile BAD$.

Следовательно, сумма углов A и C измеряется полусуммой дуг BCD и BAD, в сумме же эти дуги составляют окружность, т. е. имеют 360°. Отсюда $\angle A + \angle C = 360° : 2 = 180°$.

Аналогично доказывается, что и $\angle B + \angle D = 180°$. Однако это можно вывести и иным путём. Мы знаем, что сумма внутренних углов выпуклого четырёхугольника равна 360°. Сумма углов A и C равна 180°, значит, на сумму других двух углов четырёхугольника остаётся тоже 180°.



Черт. 412

Теорема 2 (обратная). ***Если в четырёхугольнике сумма двух противоположных углов равна 180°, то около такого четырёхугольника можно описать окружность.***

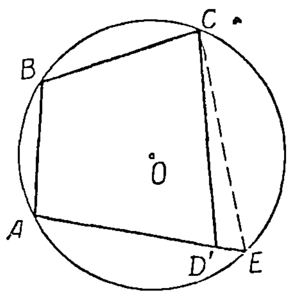
Пусть сумма противоположных углов четырёхугольника $ABCD$ равна 180°, а именно $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$ (черт. 412). Докажем, что около такого четырёхугольника можно описать окружность.

Доказательство. Через любые 3 вершины этого четырёхугольника можно провести окружность, например через точки A, B и C. Где будет находиться точка D?

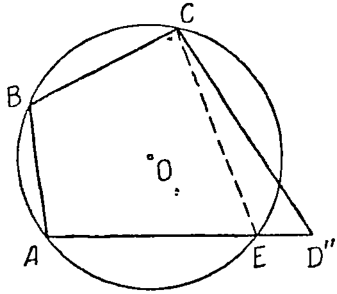
Точка D может занять только одно из следующих трёх положений: оказаться внутри круга, оказаться вне круга, оказаться на окружности круга.

Допустим, что вершина окажется внутри круга и займёт положение D' (черт. 413). Тогда в четырёхугольнике $ABCD'$ будем иметь:

$$\angle B + \angle D' = 2d.$$



Черт. 413



Черт. 414

Продолжив сторону AD' до пересечения с окружностью в точке E и соединив точки E и C, получим вписанный четырёхугольник $ABCE$, в котором по прямой теореме

$$\angle B + \angle E = 2d.$$

Из этих двух равенств следует:

$$\angle D' = 2d - \angle B;$$
$$\angle E = 2d - \angle B;$$

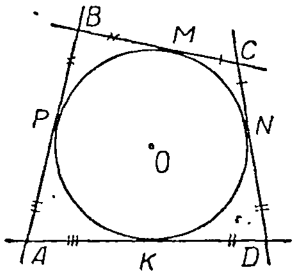
откуда

$$\angle D' = \angle E,$$

но этого быть не может, так как $\angle D'$, как внешний относительно треугольника $CD'E$, должен быть больше угла E. Поэтому точка D не может оказаться внутри круга.

Так же доказывается, что вершина D не может занять положение D'' вне круга (черт. 414).

Остаётся признать, что вершина D должна лежать на окружности круга, т. е. совпасть с точкой E, значит, около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.



Черт. 415

Следствия. 1. ***Вокруг всякого прямоугольника можно описать окружность.***

2. ***Вокруг равнобедренной трапеции можно описать окружность.***

В обоих случаях сумма противоположных углов равна 180°.

Теорема 3. ***В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.***

Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (черт. 415), т. е. стороны его AB, BC, CD и DA — касательные к этой окружности. Требуется доказать, что $AB + CD = AD + BC$.

Обозначим точки касания буквами M, N, K, P. На основании свойств касательных, проведённых к окружности из одной точки (§ 75), имеем:

$$AP = AK;$$
$$BP = BM;$$
$$DN = DK;$$
$$CN = CM.$$

Сложим почленно эти равенства. Получим: $AP + BP + DN + CN = AK + BM + DK + CM$, т. е. $AB + CD = AD + BC$, что и требовалось доказать.

Упражнения.

1. Во вписанном четырёхугольнике два противоположных угла относятся как 3 : 5, а другие два относятся как 4 : 5. Определить величину этих углов.

2. В описанном четырёхугольнике сумма двух противоположных сторон равна 45 *см*. Остальные две стороны относятся как 0,2 : 0,3. Найти длину этих сторон.

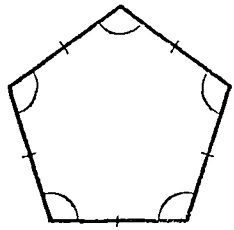
ГЛАВА XI.

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

§ 107. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Многоугольник называется правильным, если равны все его стороны и равны все углы (черт. 416).

Из правильных многоугольников мы пока изучали только правильный четырёхугольник (квадрат) и правильный треугольник (равносторонний треугольник).



Черт. 416

Упражнения.

1. Можно ли назвать правильным четырёхугольником любой прямоугольник? Ромб?
2. Будет ли правильным треугольник, имеющий равные углы?

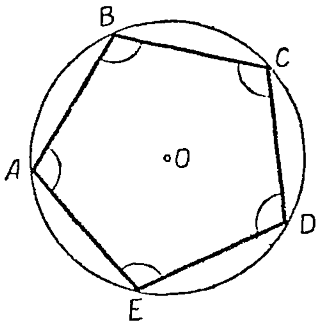
§ 108. ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

Теорема 1. ***Если окружность разделить на равные части и точки деления последовательно соединить хордами, то получим правильный многоугольник (вписанный).***

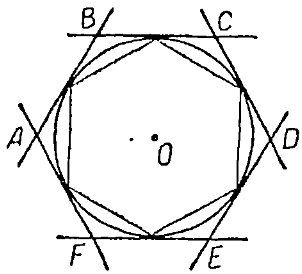
Пусть окружность O разделена, например, на 5 равных частей (это можно сделать с помощью транспортира) и точки деления последовательно соединены хордами (черт. 417). Полученный многоугольник правильный, так как:

во-первых, все стороны его равны, как хорды, стягивающие равные дуги;

во-вторых, все углы его равны, как вписанные, опирающиеся на равные дуги.



Черт. 417



Черт. 418

Будем иметь то же самое, если разделим окружность на любое число равных частей.

Теорема 2. ***Если окружность разделить на равные части и через точки деления провести касательные к ней, то получится правильный многоугольник (описанный), вершинами которого будут служить точки пересечения касательных, проведённых через соседние точки касания*** (черт. 418).

В справедливости этого можем убедиться следующим образом. Соединим хордами точки касания: получим ряд треугольников, каждый из которых составлен двумя касательными и хордой. Эти треугольники равнобедренные (на основании свойств касательных, проведённых к окружности из какой-нибудь точки вне её). Кроме того, все они равны между собой, так как имеют по равной стороне (хорды, стягивающие в круге равные дуги) и по два равных угла (все они составлены касательной и хордой и измеряются половинами равных дуг).

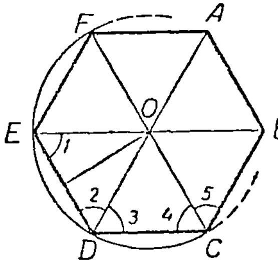
Отсюда следует, что построенный многоугольник правильный, так как имеет равные стороны и равные углы.

§ 109. СВОЙСТВА ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ.

Теорема 1. ***Около любого правильного многоугольника можно описать окружность.***

Пусть $ABCDEF$ (черт. 419) — правильный многоугольник; надо доказать, что около него можно описать окружность.

Мы знаем, что всегда можно провести окружность через три точки, не лежащие на одной прямой; значит, всегда можно провести окружность, которая пройдёт через три любые вершины правильного многоугольника, например через вершины E, D и C. Пусть точка O — центр этой окружности.



Черт. 419

Докажем, что эта окружность пройдёт и через четвёртую вершину многоугольника, например через вершину B.

Отрезки OE, OD и OC равны между собой, и каждый равен радиусу окружности. Проведём ещё отрезок OB; про этот отрезок сразу нельзя сказать, что он также равен радиусу окружности, это надо доказать.

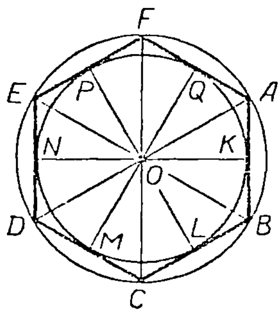
Рассмотрим треугольники OED и ODC, они равнобедренные и равные, следовательно, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$.

Если внутренний угол данного многоугольника равен α, то $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \frac{\alpha}{2}$; но если $\angle 4 = \frac{\alpha}{2}$,

то и $\angle 5 = \frac{\alpha}{2}$, т. е. $\angle 4 = \angle 5$.

Отсюда заключаем, что $\triangle OCD = \triangle OCB$ и, значит, $OB = OC$, т. е. отрезок OB равен радиусу проведенной окружности. Из этого следует, что окружность пройдет и через вершину B правильного многоугольника.

Таким же приемом докажем, что построенная окружность пройдёт и через все остальные вершины многоугольника. Значит, эта окружность будет описанной около данного правильного многоугольника. Теорема доказана.



Черт. 420

Теорема 2. ***В любой правильный многоугольник можно вписать окружность.***

Пусть $ABCDEF$—правильный многоугольник (черт. 420), надо доказать, что в него можно вписать окружность.

Из предыдущей теоремы известно, что около правильного многоугольника можно описать окружность. Пусть точка O — центр этой окружности.

Соединим точку O с вершинами многоугольника. Полученные треугольники OED, ODC и т. д. равны между собой, значит, равны и их высоты, проведённые из точки O, т. е. $OK = OL = OM = ON = OP = OQ$.

Поэтому окружность, описанная из точки O как из центра радиусом, равным отрезку OK, пройдёт через точки K, L, M, N, P и Q, и высоты треугольников будут радиусами окружности. Стороны многоугольника перпендикулярны к радиусам в этих точках, поэтому они являются касательными к этой окружности (§ 73). А это значит, что построенная окружность вписана в данный правильный многоугольник.

Такое же построение можно выполнить для любого правильного многоугольника, следовательно, вписать окружность можно в любой правильный многоугольник.

Следствие. ***Окружности, описанная около правильного многоугольника и вписанная в него, имеют общий центр.***

Определения. 1. Центром правильного многоугольника называется общий центр окружностей, описанной около этого многоугольника и вписанной в него.

2. Перпендикуляр, опущенный из центра правильного многоугольника на его сторону, называется апофемой правильного многоугольника.

§ 110. ВЫРАЖЕНИЕ СТОРОН ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ ЧЕРЕЗ РАДИУС ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ.

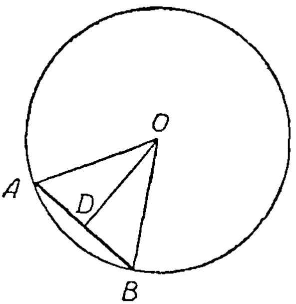
С помощью тригонометрических функций можно выразить сторону любого правильного многоугольника через радиус описанной около него окружности.

Пусть AB — сторона правильного n-угольника, вписанного в круг радиуса $OA = R$ (черт. 421). Проведём апофему OD правильного многоугольника и рассмотрим прямоугольный треугольник AOD. В этом треугольнике

$$\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n};$$

$$AD = AO\cdot\sin\angle AOD = R\sin\frac{180^\circ}{n};$$

но $AB = 2AD$ и потому $AB = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.



Черт. 421

Длина стороны правильного n-угольника, вписанного в круг, обозначается обычно a_n, поэтому полученную формулу можно записать так:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Следствия. 1. *Длина стороны правильного шестиугольника, вписанного в круг радиуса R, выражается формулой* $a_6 = R$, так как

$$a_6 = 2R \sin \frac{180^\circ}{6} = 2R \sin 30^\circ = 2R \frac{1}{2} = R.$$

2. *Длина стороны правильного четырёхугольника (квадрата), вписанного в круг радиуса R, выражается формулой* $a_4 = R\sqrt{2}$, так как

$$a_4 = 2R \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \sin 45^\circ = 2R \frac{\sqrt{2}}{2} = R\sqrt{2}.$$

3. *Длина стороны правильного треугольника, вписанного в круг радиуса R, выражается формулой* $a_3 = R\sqrt{3}$, так как

$$a_3 = 2R \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \sin 60^\circ = 2R \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

§ 111. ПОСТРОЕНИЕ ПРАВИЛЬНЫХ ШЕСТИУГОЛЬНИКА, ТРЕУГОЛЬНИКА И ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА С ПОМОЩЬЮ ЦИРКУЛЯ И ЛИНЕЙКИ.

1. Чтобы построить правильный шестиугольник, достаточно провести окружность и последовательно, одну за другой построить хорды, равные радиусу.

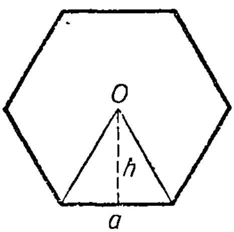
По доказанному эти хорды равны сторонам правильного шестиугольника, вписанного в круг. Получим правильный шестиугольник.

2. Чтобы построить правильный треугольник, построим сперва правильный шестиугольник, как указано в пункте 1, а затем соединим отрезками вершины этого шестиугольника через одну. Получим правильный треугольник.

3. Чтобы построить правильный четырёхугольник (квадрат), достаточно провести в круге два взаимно перпендикулярных диаметра и концы их соединить отрезками. Получим правильный четырёхугольник.

§ 112. ПЛОЩАДЬ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА.

Пусть дан правильный n-угольник (черт. 422). Требуется определить его площадь. Обозначим сторону многоугольника через a и центр через O. Соединим отрезками центр с концами какой-либо стороны многоугольника, получим треугольник, в котором проведём апофему многоугольника.



Черт. 422

Площадь этого треугольника равна $\frac{ah}{2}$.

Чтобы определить площадь всего многоугольника, нужно площадь одного треугольника умножить на число треугольников, т. е. на n. Получим: $S = \frac{ah}{2} \cdot n = \frac{anh}{2}$, но an равняется периметру многоугольника. Обозначим его через P. Окончательно получаем:

$S = \frac{Ph}{2}$, где S —площадь правильного многоугольника, P — его периметр, h — апофема.

Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на апофему.

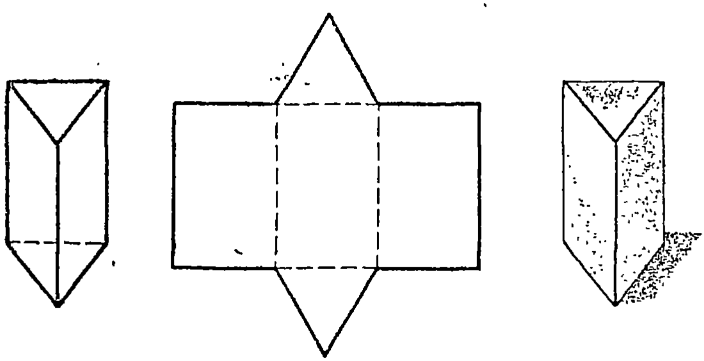
ГЛАВА XII.

ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЁМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.

§ 113. ПРАВИЛЬНАЯ ПРИЗМА.

1. Определения.

Призма называется правильной, если основаниями её служат правильные многоугольники и боковые рёбра перпендикулярны к основаниям.

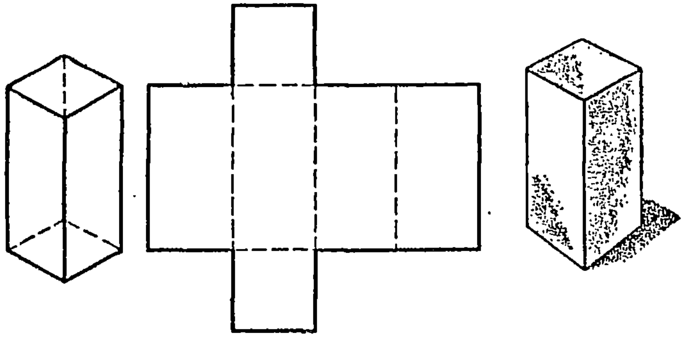


Черт. 423

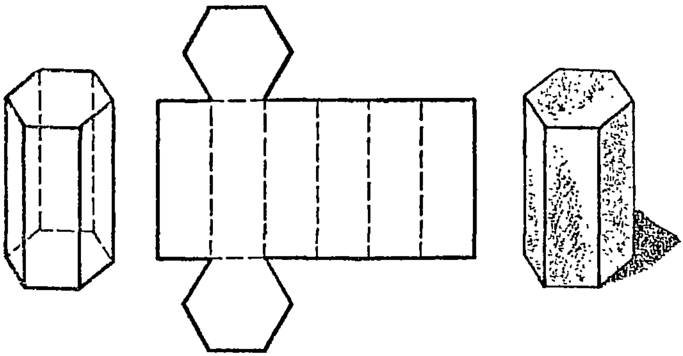
В зависимости от числа углов в основании призма называется треугольной, четырёхугольной, пятиугольной и т. д.

На чертежах 423, 424, 425 даны изображения и развёртки правильных призм: треугольной, четырёхугольной и шестиугольной.

Боковыми гранями любой правильной призмы служат прямоугольники.



Черт. 424



Черт. 425

2. Вычисление площади поверхности правильной призмы.

Основаниями правильной призмы являются правильные многоугольники, поэтому для вычисления площади основания такой призмы применяем формулу:

$$S = \frac{Ph}{2} \ (\S\ 112).$$

Боковые грани представляют собой равные прямоугольники, поэтому для вычисления площади боковой поверхности данной призмы достаточно вычислить площадь одной боковой грани и умножить на их число.

Для вычисления полной поверхности данной призмы надо найти сумму площадей двух оснований и боковой поверхности.

Упражнения.

1. Вычислить площади поверхностей указанных в таблице правильных призм, имеющих высоту, равную 25 *см*.

Название призмы	Радиус окружности, описанной около основания	Площадь основания	Площадь боковой поверхности	Площадь полной поверхности
а) Правильная треугольная призма	6 *см*			
б) Правильная четырёхугольная призма . .	8 *см*			
в) Правильная шестиугольная призма . .	5 *см*			

При вычислениях рекомендуется пользоваться таблицами и логарифмической линейкой.

2. Сделать необходимые измерения и вычислить площади поверхностей правильных призм, имеющихся в математическом кабинете школы.

3. Вычисление объёма правильной призмы.

Объём правильной призмы вычисляется так же, как и объём всякой прямой призмы (§ 68), по формуле: $V = QH$, где V выражает объём призмы; Q — площадь основания; H — высоту призмы (т. е. длину бокового ребра).

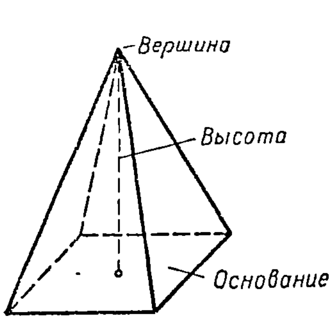
Упражнения.

1. По данным в предыдущей таблице вычислить объёмы указанных в ней правильных призм.
2. Вычислить объёмы правильных призм, имеющихся в математическом кабинете школы.

При вычислениях рекомендуется пользоваться таблицами и логарифмической линейкой.

§ 114. ПИРАМИДА.

1. Определения.



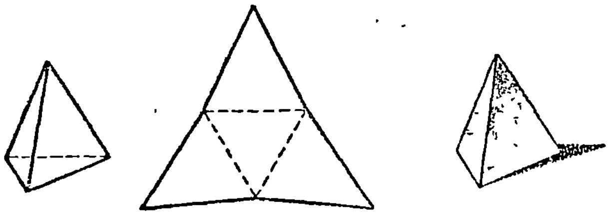
Черт. 426

Пирамидой называется геометрическое тело, ограниченное многоугольником, называемым основанием пирамиды, и треугольниками с общей вершиной, которые называются боковыми гранями.

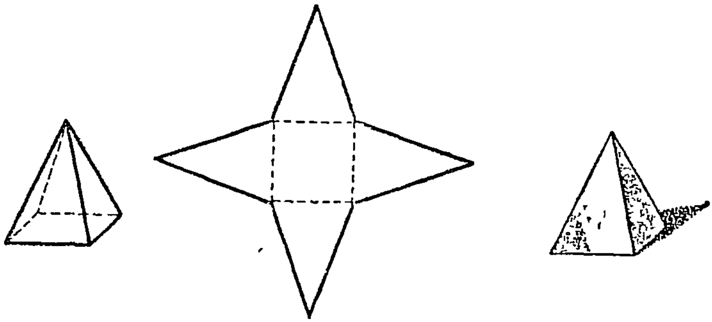
Общая вершина всех боковых граней называется в е р ш и н о й пирамиды.

В ы с о т о й пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на её основание (черт. 426).

Пирамида, у которой основанием служит правильный многоугольник, а высота проходит через центр основания, называется **правильной**. Боковые грани правильной пирамиды — равные между собой равнобедренные треугольники.

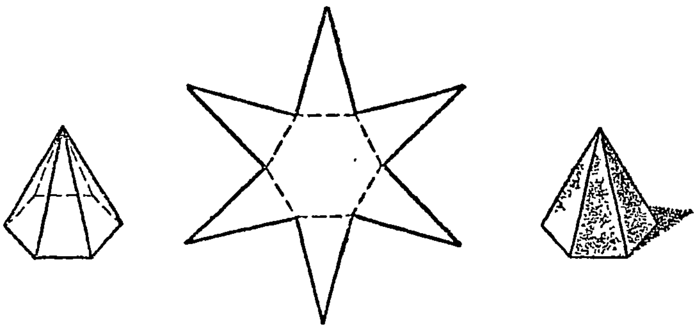


Черт. 427



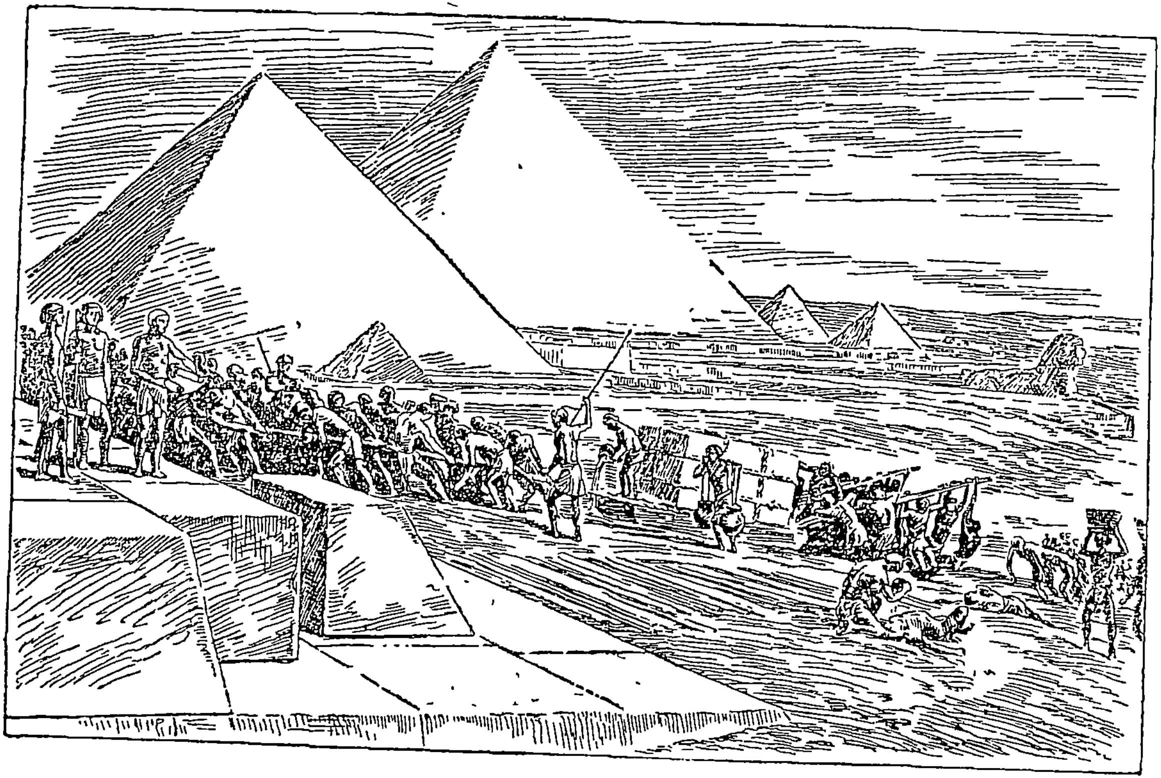
Черт. 428

Высота боковой грани правильной пирамиды, опущенная из вершины на сторону основания, называется **апофемой** пирамиды.



Черт. 429

На чертежах 427, 428, 429 даны изображения и развёртки правильных пирамид: треугольной, четырёхугольной и шестиугольной. На чертеже 430 изображены египетские пирамиды.



Черт 130

Упражнения.

Сделать развёртки правильных пирамид, изображённых на чертежах 427, 428, 429, и изготовить из них модели пирамид.

2. Площадь поверхности пирамиды.

Чтобы определить площадь боковой поверхности пирамиды, надо найти сумму площадей всех её боковых граней.

Если к площади боковой поверхности пирамиды прибавить площадь её основания, получится площадь полной поверхности пирамиды.

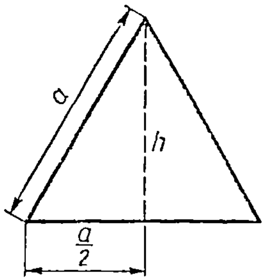
Для краткости говорят: боковая поверхность пирамиды и полная поверхность пирамиды, опуская слово «площадь».

Упражнения.

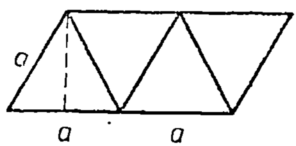
1. В основании правильной пирамиды — треугольник со стороной в 12 *см*. Апофема пирамиды — 20 *см*.

Вычислить: а) площадь основания,
б) боковую поверхность,
в) полную поверхность этой пирамиды.

2. Боковые грани правильной треугольной пирамиды — равносторонние треугольники. Сторона основания равна a *см*. Вычислить боковую и полную поверхность этой пирамиды (черт. 431).



Черт. 431



Черт. 432

3. Решить вторично эту задачу, расположив грани пирамиды в виде параллелограмма (черт. 432).

3. Объём пирамиды.

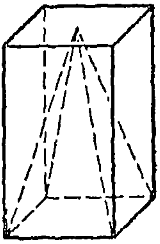
В старших классах средней школы доказывается, что объём пирамиды составляет $\frac{1}{3}$ объёма призмы, имеющей одинаковое основание с пирамидой и одну и ту же высоту (черт. 433).

Следовательно, объём пирамиды вычисляется по формуле:

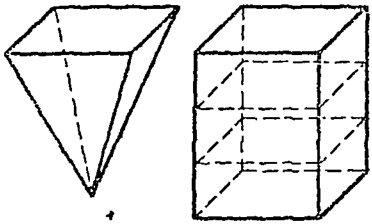
$$V = \frac{1}{3} S \cdot H,$$

где V — объём пирамиды, S — площадь основания, H — высота пирамиды.

Для иллюстрации этой формулы рекомендуется сделать из картона прямую четырёхугольную призму и четырёхугольную пирамиду, имеющие равные основания и равные высоты. Если эту



Черт. 433



Черт. 434

пирамиду заполнить, например, песком и затем пересыпать этот песок в сделанную призму, то песок заполнит только $\frac{1}{3}$ вместимости призмы. Чтобы заполнить призму песком, необходимо трижды пересыпать в неё песок из заполненной пирамиды (черт. 434).

Упражнения.

По указанной выше формуле решить ряд задач по данным, помещённым в нижеследующей таблице:

№	Название пирамиды	Сторона основания	Высота пирамиды	Длина бокового ребра	Объём
1.	Правильная четырёхугольная пирамида	а) 25 *см* б) 14 *см*	40 *см* . . .	— 20 *см*	. . . . . .
2.	Правильная шестиугольная пирамида	9 *см*	24 *см*	—	. . .
3.	Правильная треугольная пирамида	14 *см*	30 *см*	—	. . .

§ 115. КОНУС.

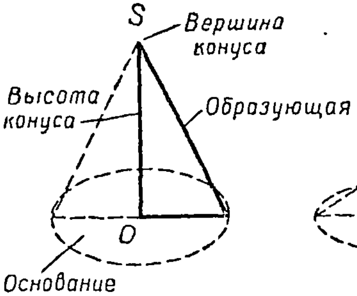
1. Получение конуса.

Если вращать прямоугольный треугольник около одного из его катетов, то получится геометрическое тело, называемое **прямым круговым конусом**[1] (черт. 435, 436, 437).

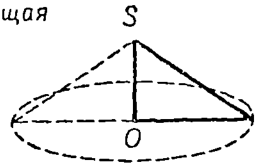
[1] Мы будем рассматривать только прямой круговой конус и будем называть его просто **конус**.

Основанием конуса является круг.

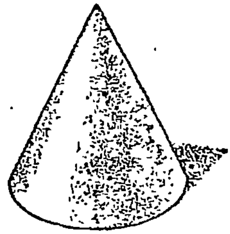
Гипотенуза прямоугольного треугольника, движение которой образует боковую поверхность конуса, называется образующей конуса. Боковая поверхность конуса называется конической поверхностью.



Черт. 435



Черт. 436



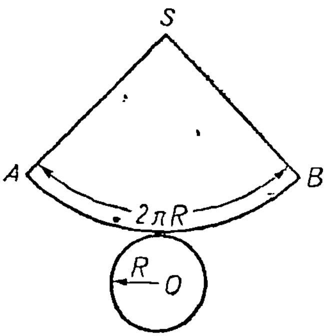
Черт. 437

Высота прямого кругового конуса, опущенная из его вершины на основание, проходит через центр основания.

2. Развёртка конуса.

На чертеже 438 дано изображение развёртки конуса. Сектор SAB — развёртка боковой поверхности конуса, а круг с центром O — основание конуса. Длина дуги AB, очевидно, равняется длине окружности основания конуса ($2\pi R$), а радиус AS этой дуги — образующая конуса.

Упражнение. Начертить развёртку конуса в произвольном масштабе и сделать модель прямого кругового конуса.



Черт. 438

3. Площадь поверхности конуса.

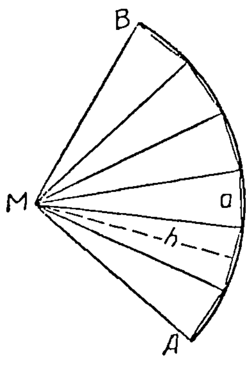
Площадь поверхности конуса (или просто поверхность конуса) равна сумме площадей основания и боковой поверхности.

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле: $S = \pi Rl$, где R — радиус основания конуса, а l — образующая конуса.

Так как площадь основания конуса равна πR^2 (как площадь круга), то площадь полной поверхности конуса будет равна:

$$\pi R^2 + \pi Rl = \pi R\,(R + l).$$

Получение формулы площади боковой поверхности конуса можно пояснить такими рассуждениями. Пусть на чертеже 439 изображена развёртка боковой поверхности конуса. Разделим дугу AB на возможно большее число равных частей и все точки деления соединим с центром дуги, а соседние — друг с другом хордами.



Черт. 439

Получим ряд равных треугольников. Площадь каждого треугольника равна $\frac{ah}{2}$, где a — длина основания треугольника, а h — его высота.

Сумма площадей всех треугольников составит: $\frac{ah}{2} \cdot n = \frac{anh}{2}$, где n — число треугольников.

При большом числе делений сумма площадей треугольников становится весьма близкой к площади развёртки, т. е. площади боковой поверхности конуса. Сумма оснований треугольников, т. е. an, становится весьма близкой к длине дуги AB, т. е. к длине окружности основания конуса. Высота каждого треугольника становится весьма близкой к радиусу дуги, т. е. к образующей конуса.

Пренебрегая незначительными различиями в размерах этих величин, получаем формулу площади боковой поверхности конуса (S):

$S = \frac{Cl}{2}$, где C — длина окружности основания конуса, l — образующая конуса.

Зная, что $C = 2\pi R$, где R — радиус окружности основания конуса, получаем: $S = \pi R l$.

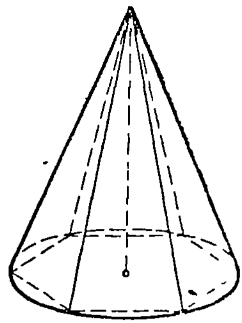
Примечание. В формуле $S = \frac{Cl}{2}$ поставлен знак точного, а не приближённого равенства, хотя на основании проведённого рассуждения мы могли бы это равенство считать приближённым. Но в старших классах средней школы доказывается, что равенство $S = \frac{Cl}{2}$ точное, а не приближённое.

4. Объём конуса.

Объём конуса выражается такой же формулой, что и объём пирамиды: $V = \frac{1}{3} Sh$, где V — объём конуса, S — площадь основания конуса, h — его высота. Окончательно $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, где R — радиус основания конуса.

Получение формулы объёма конуса можно пояснить таким рассуждением.

Пусть дан конус (черт. 440). Впишем в него правильную пирамиду, т. е. построим внутри конуса такую пирамиду, вершина которой совпадает с вершиной конуса, а основанием служит правильный многоугольник, вписанный в основание конуса. Объём этой пирамиды выразится формулой: $V' = \frac{1}{3} S'h$, где V' — объём пирамиды, S' — площадь её основания, h — высота пирамиды.



Черт. 440

Если при этом за основание пирамиды взять многоугольник с очень большим числом сторон, то площадь основания пирамиды будет весьма мало отличаться от площади круга, а объём пирамиды— весьма мало отличаться от объёма конуса. Если, пренебречь этими различиями в размерах, то объём конуса выразится следующей формулой:

$V = \frac{1}{3} Sh$, где V — объём конуса, S — площадь основания конуса, h — высота конуса. Заменив S через πR^2, где R — радиус круга, получим формулу: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, выражающую объём конуса.

Примечание. В формуле $V = \frac{1}{3} Sh$ поставлен знак точного, а не приближённого равенства, хотя на основании проведённого рассуждения мы могли бы его считать приближённым, но в старших классах средней школы доказывается, что равенство $V = \frac{1}{3} Sh$ точное, а не приближённое.

Упражнения.

1. Вычислить полную поверхность конуса и его объём по данным, помещённым в нижеследующей таблице:

	Радиус основания	Длина образующей	Полная поверхность	Объём
а)	3 *см*	10 *см*	. . .	. . .
б)	5 *см*	13 *см*	. . .	. . .
в)	10 *см*	20 *см*	. . .	. . .
г)	11 *см*	35 *см*	. . .	. . .

2. Определить вес кучи песка, имеющей форму конуса с окружностью основания 15,7 *м* и с образующей в 6,8 *м*. (Удельный вес песка принять равным 1,5).

3. Вычислить поверхность и объём конусов, имеющихся среди моделей геометрических тел в математическом кабинете школы.

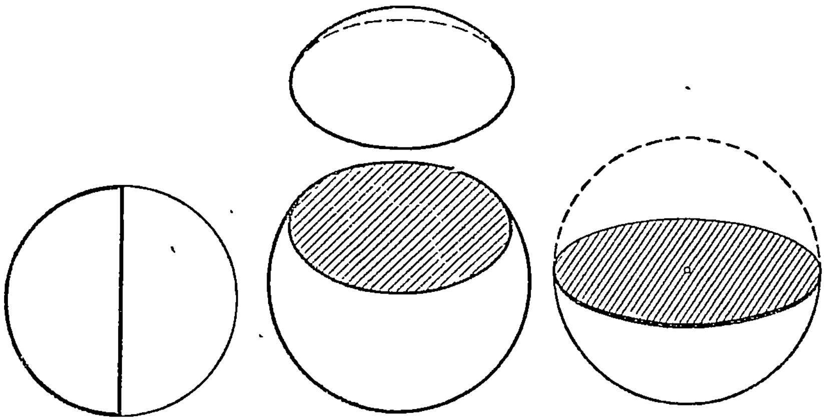
При всех вычислениях рекомендуется пользоваться таблицами и логарифмической линейкой.

§ 116. ШАР.

Если вращать половину круга вокруг его диаметра, то получим геометрическое тело, называемое **шаром** (черт. 441).

Центр круга будет служить и центром шара, а диаметр круга диаметром шара.

Поверхность шара называется **шаровой поверхностью**. Все точки шаровой поверхности одинаково удалены от центра шара.



Черт. 441 Черт. 442 Черт. 443

Сечение шара плоскостью всегда имеет форму круга (черт. 442). Сечение, проходящее через центр шара, называется большим кругом. Большой круг делит шар на две равные части (черт. 443).

Площадь поверхности шара (или просто поверхность шара) ***равна учетверённой площади большого круга***, т. е. $4\pi R^2$; $S = 4\pi R^2$, или $S = \pi D^2$. Эти формулы будут выведены в старших классах школы.

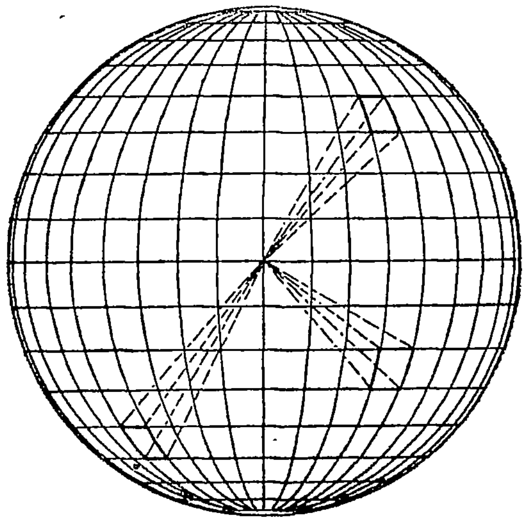
Объём шара равняется $\frac{4}{3}\pi R^3$, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Получение формулы объёма шара можно пояснить таким рассуждением. В шар можно поместить весьма большое число пирамид с весьма малыми площадями оснований, расположив пирамиды так, чтобы вершины их находились в центре шара, вершины оснований лежали на поверхности шара и своими боковыми гранями пирамиды непосредственно примыкали одна к другой (черт. 444). Высота каждой из построенных пирамид очень близка по длине к радиусу (R) шара. Если пренебречь различием их длин, то объём (v) каждой пирамиды можно выразить так:

$$v = \frac{1}{3} sR,$$

где s — площадь основания пирамиды.

Сумма объёмов (V') этих пирамид тогда выразится формулой: $V' = \frac{1}{3} S'R$, где S' — сумма площадей оснований пирамид. Сумма эта (S') весьма близка к площади поверхности шара (S).



Черт. 444

Сумма объёмов всех пирамид (V') весьма близка к объёму (V) шара. Если пренебречь незначительными различиями в размерах этих величин, то получим формулу: $V = \frac{1}{3} SR$, показывающую, что объём шара равен $\frac{1}{3}$ произведения площади поверхности шара на длину радиуса. Обычно говорят короче: объём шара равен $\frac{1}{3}$ произведения поверхности шара на его радиус.

Подставив значение $S = 4\pi R^2$, получим формулу: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, или $V = \frac{\pi D^3}{6}$, где D — диаметр шара.

Примечание. В формуле $V = \frac{1}{3} SR$ поставлен знак точного, а не приближённого равенства, хотя на основании проведённого рассуждения мы могли бы его считать приближённым, но в старших классах средней школы доказывается, что равенство $V = \frac{1}{3} SR$ точное, а не приближённое.

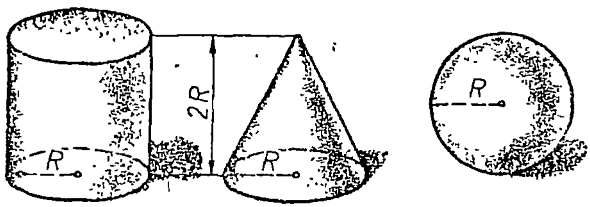
Упражнения.

1. Вычислить объём шара, если его радиус равен 5 *см* (8 *см*; 10 *см* 12 *см*).

2. Сколько весит чугунный шар, если радиус его равен 50 *см*? (Удельный вес чугуна принять равным 7.)

3. Определить объём футбольного мяча (предварительно сантиметровой лентой измерить окружность большого круга и вычислить R).

4. Медный шар весит 10 *кг*. Определить его диаметр (удельный вес меди равен 7,9).



Чер. 445

5. Вычислить объём земного шара, приняв его диаметр за 13 000 *км*.

6. На чертеже 445 изображены три геометрических тела: цилиндр, конус и шар. Радиусы оснований цилиндра и конуса равны радиусу шара. Высоты цилиндра и конуса равны диаметру шара.

Доказать, что при этих условиях объём цилиндра равен сумме объёмов конуса и шара.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.

ГЛАВА II. ТРЕУГОЛЬНИКИ.

ГЛАВА III. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ.

ГЛАВА IV. ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ.

ГЛАВА V. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР.

ГЛАВА VI. ПРЯМАЯ ПРИЗМА. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЁМ ПРЯМОЙ ПРИЗМЫ.

ГЛАВА VII. ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ЦИЛИНДР.

ГЛАВА VIII. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ ОТРЕЗКОВ. ПОДОБИЕ ФИГУР.

ГЛАВА IX. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА.

ГЛАВА X. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

ГЛАВА XI. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ.

ГЛАВА XII. ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЁМЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ.

Николай Никифорович Никитин

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 6—8 классов

Редактор *С. В. Пазельский*
Обложка художника *С. Я Нодельмана*. Художественный редактор *Б. Л. Николаев*. Технический редактор *Т. Н. Зыкина*. Корректор *В. Г. Соловьёва*

Сдано в набор 13/V 1968 г. Подписано к печати 20/VIII 1968 г. 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 11,93. Тираж 1200 тыс. экз.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Саратов, ул. Чернышевского, 59. Заказ 251.

Цена без переплета 16 коп., переплёт бум. 7 коп., коленкор. 15 коп.