А. Киселевъ.

КРАТКАЯ АРИѲМЕТИКА

ДЛЯ ГОРОДСКИХЪ УЧИЛИЩЪ.

Изданіе девятнадцатое.

Особымъ отдѣломъ Ученаго Комитета М. Н. Пр. допущена въ качествѣ **руководства** къ употребленію въ городскихъ училищахъ, а также и въ низшихъ женскихъ учебныхъ заведеніяхъ (Журн. М. Н. Пр., 1913, апрѣль). Учебнымъ Комитетомъ при Мин. Путей Сообщ. **рекомендована**, какъ полезное учебное пособіе для училищъ этого Министерства (увѣдомленіе отъ 26 апрѣля 1897 г. № 540). Деп. Торг. и Мануф. **допущена** въ качествѣ пособія въ торговыхъ классахъ и школахъ (извѣщ. отъ 30 мая 1898 г., № 14228).

Цѣна 35 коп.

ИЗДАНІЕ
Т-ва „В. В. ДУМНОВЪ, наслѣдн. бр. САЛАЕВЫХЪ"
ВЪ МОСКВѢ
Мясницкая улица, д. № 5,
ВЪ ПЕТРОГРАДѢ,
Большая Конюшенная, № 1.
1915.

Изъ предисловія къ 6-му изданію.

«Простѣйшія свойства дробей» помѣщены ранѣе статьи о дѣлимости, такъ какъ это, во-первыхъ, удовлетворяетъ требованію программъ городскихъ училищъ, а во-вторыхъ, при такомъ распредѣленіи польза вспомогательной для ариѳметики статьи «о дѣлимости» становится болѣе ощутительной вслѣдствіе непосредственаго примѣненія содержанія этой статьи къ сокращенію дробей и приведенію ихъ къ общему знаменателю.

Приведено упрощенное доказательство достаточности признака дѣлимости на 6 (§ 112),—доказательство, которое въ предыдущихъ изданіяхъ не могло быть указано, такъ какъ въ нихъ изложеніе простѣйшихъ свойствъ дробей не предшествовало статьѣ о дѣлимости, а слѣдовало за ней.

Способъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя посредствомъ разложенія чиселъ на простыхъ множителей, вслѣдствіе практической его безполезности, поставленъ нами на второй планъ (§ 115 и слѣд.). Дѣйствительно, въ элементарномъ курсѣ ариѳметики пользоваться общимъ наибольшимъ дѣлителемъ приходится только при сокращеніи дробей; но это сокращеніе на практикѣ производится или

посредствомъ послѣдовательнаго раздѣленія числителя и знаменателя, сообразно признакамъ дѣлимости, на ихъ общихъ дѣлителей, или же,—если примѣненіе признаковъ дѣлимости не обнаруживаетъ возможности сокращенія,—посредствомъ предварительнаго нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя; но именно потому, что въ этомъ случаѣ признаки дѣлимости ничего не даютъ, общій наибольшій дѣлитель долженъ быть найденъ способомъ послѣдовательнаго дѣленія, а не разложеніемъ на множителей.

Хотя изученіе свойствъ періодическихъ дробей и вообще обращеніе съ ними представляется намъ совершенно излишнимъ въ курсѣ городскихъ училищъ (оно практикуется лишь по укоренившемуся обычаю), мы не рискнули однако совсѣмъ выпустить статью о періодическихъ дробяхъ, а помѣстили ее въ сокращенномъ видѣ, мелкимъ шрифтомъ, и правила обращенія періодическихъ дробей въ обыкновенныя привели безъ доказательства.

При изложеніи рѣшенія задачъ на простое и сложное тройное правило, а также на проценты и на учетъ векселей, на первомъ мѣстѣ мы поставили наиболѣе простой способъ рѣшенія—приведеніе къ единицѣ.

Изъ предисловія къ 17-му изданію.

Въ § 106 вмѣсто излагавшихся прежде трехъ истинъ, служащихъ основаніемъ для вывода признаковъ дѣлимости, помѣщены только двѣ первыя, какъ имѣющія первенствующее значеніе. Надобность въ третьей истинѣ (если сумма двухъ слагаемыхъ и одно изъ этихъ слагаемыхъ дѣлятся на какое-нибудь число, то и другое слагаемое раздѣлится на него) встрѣчается только при объясненіи нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя способомъ послѣдовательнаго дѣленія; но тамъ (§ 115,а) ссылка на эту истину, дѣлавшаяся прежде, замѣнена теперь небольшимъ объясненіемъ.

Для бо̀льшей ясности нѣсколько измѣнено изложеніе признака дѣлимости на 6 (§ 112).

Въ § 115,а добавлено замѣчаніе о возможности примѣнять способъ послѣдовательнаго дѣленія къ нахожденію общаго наибольшаго дѣлителя трехъ и болѣе данныхъ чиселъ.

Упрощено изложеніе § 146, въ которомъ объясняется, какія обыкновенныя дроби обращаются и какія не обращаются въ точныя десятичныя.

Въ § 149 добавлена (жирнымъ шрифтомъ) табличка соотношенія (въ круглыхъ числахъ) метрическихъ мѣръ вѣса съ русскими.

Въ § 169 добавлена небольшая таблица, показывающая простѣйшія значенія нѣкоторыхъ процентныхъ таксъ.

Отвлеченныя цѣлыя числа.

Счисленіе.

1. Понятіе о числѣ. Одинъ предметъ да одинъ предметъ составляютъ два предмета, два предмета да одинъ предметъ составляютъ три предмета; три да одинъ составляютъ четыре и т. д.

Одинъ, два, три, четыре... и т. д. называются **числами.** Число одинъ называется иначе **единица.** Всякое другое число представляетъ собою **собраніе единицъ.**

Число наз. **отвлеченнымъ**, если при немъ не поставлено названія тѣхъ предметовъ, собраніе какихъ оно выражаетъ; таково, напр., число пять.

2. Естественный рядъ чиселъ. Чтобы имѣть ясное понятіе о собраніи предметовъ, мы должны сосчитать ихъ. Такъ, считая столы въ классѣ, мы отдѣляемъ мысленно одинъ столъ за другимъ и говоримъ: одинъ, два, три, четыре, пять, шесть и т. д. Числа, расположенныя въ такой послѣдовательности, образуютъ **естественный** (или **натуральный**) рядъ чиселъ. Наименьшее число въ этомъ ряду единица; наибольшаго числа нѣтъ, такъ какъ рядъ можно продолжать безъ конца.

2,а. Счисленіе. Способъ составлять названія для всякихъ чиселъ называется **словеснымъ счисленіемъ** (или словесною нумераціей).

Способъ выражать всякое число особыми письменными знаками называется **письменнымъ счисленіемъ** (или письменною нумераціей).

3. Словесное счисленіе до тысячи. Первыя десять чиселъ носятъ слѣдующія названія:

одинъ, два, три, четыре, пять, шесть, семь, восемь, девять, десять (или десятокъ).

Съ помощью этихъ и нѣкоторыхъ другихъ названій можно выражать и другія числа. Положимъ, мы желаемъ назвать число нарисованныхъ здѣсь черточекъ:

Для этого отсчитываемъ десять черточекъ и отдѣляемъ ихъ отъ остальныхъ; потомъ отсчитываемъ еще десять черточекъ и отдѣляемъ ихъ отъ остальныхъ. Продолжаемъ такъ отсчитывать по десятку до тѣхъ поръ, пока либо совсѣмъ не останется черточекъ, либо ихъ останется менѣе десяти. Сосчитавъ десятки и оставшіяся черточки, мы можемъ число всѣхъ нашихъ черточекъ назвать такъ:

четыре десятка три единицы

Когда въ числѣ окажется болѣе десяти десятковъ, то поступаютъ такъ же, какъ если бы эти десятки были отдѣльныя единицы, т.-е. отсчитываютъ десять десятковъ, потомъ еще десять десятковъ, затѣмъ снова десять десятковъ и т. д. до тѣхъ поръ, пока можно. Каждые десять десятковъ называютъ однимъ словомъ: **сто** или **сотня**. Положимъ, что въ какомъ-нибудь числѣ оказывается: сотенъ—три, десятковъ—пять и отдѣльныхъ единицъ—семь; такое число можно назвать такъ:

три сотни пять десятковъ семь единицъ.

Если сотенъ въ числѣ окажется болѣе десяти, то считаютъ ихъ тоже десятками. Каждыя десять сотенъ называютъ однимъ словомъ: **тысяча.**

Замѣтимъ, что десять да одинъ назыв. одиннадцать (т.-е

одинъ-на-десять); десять да два наз. двѣнадцать (т.-е. двѣ-на-десять) и т. п. Два десятка наз. двадцать (т.-е. два-десять); три десятка наз. тридцать (т.-е. три-десять); четыре десятка—сорокъ, пять десятковъ—пятьдесятъ и т. д. Двѣ сотни наз. двѣсти; три сотни наз. триста и т. д.

4. Письменное счисленіе до тысячи. Первыя девять чиселъ обозначаются особыми письменными знаками или **цыфрами**:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Съ помощью этихъ девяти цыфръ и десятой 0 (нуль), означающей **отсутствіе числа**, можно изобразить всякое число до тысячи. Для этого условились писать: простыя единицы на первомъ мѣстѣ справа, десятки—на второмъ мѣстѣ справа, сотни—на третьемъ мѣстѣ; напр.:

число триста сорокъ пять изобразится 345;
» триста сорокъ . . . . » 340;
» триста . . . . . » 300;

Съ лѣвой стороны числового изображенія не принято писать нулей; такъ, вмѣсто 024 пишутъ короче: 24, потому что и въ первомъ, и во второмъ изображеніи цыфра 2 стоитъ на второмъ мѣстѣ справа, а цыфра 4—на первомъ, и, слѣдовательно, 2 означаетъ десятки, а 4—единицы.

Всѣ цыфры, кромѣ нуля, называются **значащими** цыфрами. Число, изображаемое одною цыфрою, называется **однозначнымъ**, двумя цыфрами—**двузначнымъ**, многими цыфрами—**многозначнымъ**.

5. Словесное счисленіе чиселъ, бо́льшихъ тысячи. Когда считаемыхъ предметовъ болѣе тысячи, то составляютъ изъ нихъ столько тысячъ, сколько можно; затѣмъ считаютъ тысячи и оставшіяся единицы и называютъ число тѣхъ и другихъ; напр.: двѣсти сорокъ тысячъ пятьсотъ шестьдесятъ двѣ единицы.

Тысяча тысячъ составляетъ **милліонъ**; тысяча милліоновъ—**билліонъ** (или **милліардъ**); тысяча билліоновъ—**трилліонъ**; и т. д.

6. Составныя и главныя единицы. Десятки, сотни, тысячи, десятки тысячъ, сотни тысячъ, милліоны, десятки милліоновъ, сотни милліоновъ, билліоны и т. д. называются **составными** единицами. Изъ нихъ тысячи, милліоны, билліоны, трилліоны и т. д. называются **главными** единицами; къ нимъ причисляютъ также и простыя единицы. Всѣ остальныя составныя единицы представляютъ собою либо десятки, либо сотни этихъ главныхъ единицъ.

7. Письменное счисленіе чиселъ, бо̀льшихъ тысячи. Пусть требуется написать число:

тридцать пять билліоновъ восемьсотъ шесть милліоновъ семь тысячъ шестьдесятъ три единицы.

Его можно написать при помощи цыфръ и словъ такъ:

35 билліоновъ 806 милліоновъ 7 тысячъ 63 един.

Чтобы можно было обойтись совсѣмъ безъ словъ, условились: во-первыхъ, числа билліоновъ, милліоновъ, тысячъ и простыхъ единицъ писать рядомъ, въ одну строчку, слѣва направо, и, во-вторыхъ, изображать эти числа тремя цыфрами, т.-е. вмѣсто 63 ед. писать 063, вмѣсто 7 тысячъ писать 007 и т. п. Тогда наше число изобразится такъ:

35 806 007 063

При этомъ надо помнить, что **первыя справа три цыфры означаютъ число единицъ, слѣдующія влѣво три цыфры означаютъ число тысячъ, слѣдующія за этими влѣво три цыфры—число милліоновъ и т. д.** Напр.:

567 002 301	означаетъ	567 милл. 2 тыс. 301 ед.
2 008 001 020	»	2 билл. 8 милл. 1 тыс. 20 ед.
15 000 026	»	15 милл. 26 ед. и т. п.

Чтобы легче прочесть число, изображенное длиннымъ рядомъ цыфръ, отдѣляютъ въ немъ с п р а в а (напр. запятою) по три цыфры до тѣхъ поръ, пока можно; напр:

5'183'000'567'000.

Первая справа запятая замѣняетъ слово «тысячъ», вторая — «милліоновъ», третья — «билліоновъ», четвертая — «трилліоновъ». Значитъ, наше число должно быть прочтено такъ: 5 трилл. 183 билл. 567 тысячъ.

8. Значеніе мѣстъ, занимаемыхъ цыфрами. При такомъ способѣ писанія чиселъ каждое мѣсто, занимаемое цыфрой, имѣетъ свое особое значеніе, а именно:

на	1-мъ	мѣстѣ	справа	ставятся	простыя единицы
»	2-мъ	»	»	»	десятки
»	3-мъ	«	»	»	сотни
»	4-мъ	»	»	»	единицы тысячъ
»	5-мъ	»	«	»	десятки тысячъ
»	6-мъ	»	»	«	сотни тысячъ
»	7-мъ	«	»	»	ед. милліоновъ
»	8-мъ	«	»	»	дес. милліоновъ и т. д.

9. Разряды единицъ. Различныя единицы, которыми пользуются при счисленіи, раздѣляютъ на **разряды:** простыя единицы называются единицами 1-го разряда; десятки—единицами 2-го разряда; сотни—единицами 3-го разряда; и т. д.

Всякая составная единица, по сравненію съ другою, меньшею ея, называется единицею **высшаго разряда,** а по сравненію съ единицею, бо̀льшею ея, называется единицею **низшаго разряда**; такъ, сотня есть единица высшаго разряда сравнительно съ десяткомъ и единица низшаго разряда сравнительно съ тысячею.

Всякая составная единица содержитъ 10 единицъ слѣдующаго низшаго разряда; напр., сотня тысячъ содержитъ 10 десятковъ тысячъ; десятокъ тысячъ—10 тысячъ и т. д.

10. Какъ узнать, сколько въ числѣ единицъ даннаго разряда. Пусть требуется узнать, сколько въ числѣ 56284 заключается всѣхъ сотенъ, т.-е. сколько ихъ заключается въ десяткахъ тысячъ, въ тысячахъ и сотняхъ даннаго числа вмѣстѣ. Простыя сотни ставятся на третьемъ мѣстѣ справа; въ данномъ числѣ на третьемъ мѣстѣ стоитъ цыфра 2; значитъ, въ числѣ есть 2 простыя сотни. Слѣдующая влѣво цыфра 6 означаетъ тысячи; но въ каждой тысячѣ содержится 10 сотенъ; значитъ, въ 6 тысячахъ ихъ заключается 60. Слѣдующая влѣво цыфра 5 означаетъ десятки тысячъ; но каждый десятокъ тысячъ содержитъ въ себѣ 10 тысячъ и, слѣд., 100 сотенъ; значитъ, въ 5 десяткахъ тысячъ заключается 500 сотенъ. Всего, такимъ образомъ, въ данномъ числѣ содержится сотенъ 500 да 60 да 2, т.-е. 562.

Такъ же узнаемъ, что въ данномъ числѣ всѣхъ десятковъ содержится 5628, тысячъ—56 и т. п.

Правило. Чтобъ узнать, сколько въ числѣ заключается всѣхъ единицъ даннаго разряда, надо отбросить цыфры, означающія низшіе разряды, и прочесть число, выражаемое оставшимися цыфрами.

Славянская и римская нумерація.

11. Славянская нумерація. Въ церковныхъ книгахъ и въ памятникахъ славянской письменности употребляются для изображенія чиселъ буквы славянскаго алфавита. Когда буква означаетъ число, то ставятъ надъ ней титло (҃), чтобы сразу было видно, что эта буква означаетъ

не звукъ, а число. Слѣдующія 27 буквъ служатъ для выраженія первыхъ 9 чиселъ, 9 десятковъ и 9 сотенъ:

а҃ (1), в҃ (2), г҃ (3), д҃ (4), є҃ (5), ѕ҃ (6), з҃ (7), и҃ (8), ѳ҃ (9), і҃ (10), к҃ (20), л҃ (30), м҃ (40), н҃ (50), ѯ҃ (60), о҃ (70), п҃ (80), ч҃ (90), р҃ (100), с҃ (200), т҃ (300), у҃ (400), ф҃ (500), х҃ (600), ѱ҃ (700), ѡ҃ (800), ц҃ (900).

Нѣсколько буквъ подъ титломъ, написанныхъ рядомъ, означаютъ число, равное суммѣ чиселъ, выражаемыхъ каждою буквою. Для обозначенія тысячъ передъ числомъ ихъ ставится знакъ ҂. Напр., ҂а҃ѡ҃н҃д҃ означаетъ 1884. Буквы ставятся въ томъ порядкѣ, въ какомъ слѣдуютъ числа въ славянскомъ произношеніи. Напр., число 15, произносимое пять-на-десять, пишется такъ: і҃е҃ т.-е. вначалѣ ставится буква, означающая 5, а за нею буква, означающая 10.

12. Римская нумерація. Такъ какъ римскія цыфры и въ настоящее время употребляются иногда для выраженія чиселъ, то полезно ознакомиться и съ ними. Римляне употребляли для выраженія чиселъ только слѣдующіе семь знаковъ:

I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000.

Ихъ способъ выражать числа существенно отличался отъ нашего. У насъ цыфры измѣняютъ свое значеніе съ перемѣною мѣста, а въ римской нумераціи цыфры на всякомъ мѣстѣ сохраняютъ свое значеніе. Когда написаны нѣсколько римскихъ цыфръ рядомъ, то число, выражаемое ими равно суммѣ чиселъ, выражаемыхъ каждой цыфрой; напр., XXV означаетъ сумму 10-и, 10-и и 5-ти, т.-е. 25. CLXV означаетъ 165 и т. п. Исключеніе изъ этого правила составляютъ только слѣдующія числа:

4=IV, 9=IX, 40=XL, 90=XC, 400=CD, 900=CM.

Въ этихъ изображеніяхъ значеніе лѣвой цыфры отнимается изъ значенія правой.

Послѣ этого понятны будутъ слѣдующія изображенія:

I=1, II=2, III=3, IV=4, V=5, VI=6, VII=7, VIII=8, IX=9, X=10, XI=11, XII=12, XIV=14, XIX=19, XX=20, XXIX=29, XLII=42, LXXXIV=84, XCV=95, CCC=300, DCC=700, MDCCCLXXXIV=1884.

Число тысячъ изображается такъ же, какъ число единицъ, только съ правой стороны, внизу, ставятъ букву *m* (mille—тысяча); напр.:

$$CLXXX_m\ CCCLXIV=180364$$

Сложеніе.

13. Что такое сложеніе. Два, три и болѣе числа могутъ быть соединены въ одно число, которое называется ихъ **суммой**. Такъ, 5 перьевъ да 7 перьевъ да 2 пера могутъ быть соединены въ одно число: 14 перьевъ; 14 есть сумма трехъ чиселъ: 5, 7 и 2.

Нахожденіе по нѣсколькимъ даннымъ числамъ одного новаго числа называется **ариѳметическимъ дѣйствіемъ.**

Ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго находится сумма нѣсколькихъ чиселъ, наз. сложеніемъ.

Данныя для сложенія числа наз. **слагаемыми.**

Сумма содержитъ въ себѣ всѣ единицы слагаемыхъ.

14. Свойство суммы. Сумма не зависитъ отъ порядка, въ какомъ мы соединяемъ единицы слагаемыхъ. Такъ если требуется найти сумму 5, 7 и 2 (положимъ, спичекъ), то мы можемъ къ 5 присоединить 7, потомъ 2; или къ 5 присоединить сначала 2, потомъ 7; или къ 7 присоединить 2, потомъ 5. Можемъ поступить и такъ: взять какую-нибудь

часть 7-ми (спичекъ), присоединить къ ней какую-нибудь часть 5-и (спичекъ), потомъ присоединить оставшіяся единицы (спички) по одной, по двѣ или какъ-нибудь иначе. Всегда получимъ одну и ту же сумму 14 (спичекъ).

15. Сложеніе двухъ однозначныхъ чиселъ. Чтобы узнать сумму двухъ однозначныхъ чиселъ, достаточно къ одному изъ нихъ присчитать всѣ единицы другого. Такъ, присчитывая къ 7 всѣ единицы числа 5, находимъ сумму 12.

Чтобы умѣть быстро складывать всякія числа, слѣдуетъ предварительными упражненіями запомнить всѣ суммы, которыя получаются отъ сложенія двухъ однозначныхъ чиселъ.

16. Сложеніе многозначнаго числа съ однозначнымъ. Пусть требуется сложить 37 и 8. Искомую сумму мы можемъ найти весьма просто такъ: отъ 37 отдѣлимъ 7 ед. и сложимъ ихъ съ 8; получимъ 15, т.-е. 10 да 5; приложивъ къ 30-ти 10, получимъ 40; приложивъ къ 40 еще 5, получимъ 45.

Можно поступить и такъ. Замѣтивъ, что къ 37 надо приложить 3, чтобы получить 40, мы отдѣлимъ 3 ед. отъ 8 ед. и приложимъ ихъ къ 37; тогда получимъ 40 да еще 5 ед., оставшіяся отъ 8-и, т.-е. получимъ 45.

Слѣдуетъ привыкнуть выполнять эти дѣйствія въ умѣ.

17. Сложеніе многозначныхъ чиселъ. Пусть требуется найти сумму чиселъ: 13653, 22409, 1608 и 346. Для этого сложимъ сначала простыя единицы всѣхъ слагаемыхъ, потомъ ихъ десятки, затѣмъ сотни и т. д. Чтобы при этомъ не смѣшать между собою единицъ различныхъ разрядовъ, напишемъ данныя числа одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями и т. д.; подъ послѣднимъ слагаемымъ проведемъ черту:

13653
22409
1608
346
38016

Сложивъ единицы, получимъ 26, т.-е. 2 десятка и 6 единицъ; 2 десятка запомнимъ, чтобы ихъ сложить съ десятками данныхъ чиселъ, а 6 единицъ запишемъ подъ чертою, подъ единицами слагаемыхъ. Сложивъ десятки (вмѣстѣ съ тѣми 2 десятками, которые получились отъ сложенія единицъ), получимъ 11 дес., т.-е. 1 сотню и 1 десятокъ. 1 сотню мы запомнимъ, чтобы ее сложить съ сотнями, а 1 десятокъ напишемъ подъ чертою на мѣстѣ десятковъ. Отъ сложенія сотенъ получимъ 20 сотенъ, т.-е. ровно 2 тысячи; эти 2 тысячи запомнимъ, чтобы ихъ прибавить къ тысячамъ, а подъ чертою напишемъ 0 на мѣстѣ сотенъ; и т. д.

18. Правило сложенія. Пишутъ слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями и т. д.; подъ послѣднимъ слагаемымъ проводятъ черту, подъ которою пишутъ цыфры суммы по мѣрѣ ихъ полученія.

Сначала складываютъ простыя единицы всѣхъ слагаемыхъ.

Если отъ сложенія ихъ получается однозначное число, то пишутъ его подъ чертою на мѣстѣ единицъ; если же получается двузначное число, то единицы его пишутъ подъ чертою, а десятки запоминаютъ, чтобы сложить ихъ вмѣстѣ съ десятками слагаемыхъ.

Потомъ складываютъ десятки всѣхъ слагаемыхъ вмѣстѣ съ тѣми десятками, которые могли образоваться отъ сложенія единицъ. Если отъ сложенія ихъ получается однозначное число, то пишутъ его подъ чертою налѣво отъ ранѣе написанной цыфры простыхъ единицъ; если же получается двузначное число, то единицы его пишутъ подъ чертою, а десятки запоминаютъ, чтобы сложить ихъ затѣмъ вмѣстѣ съ сотнями слагаемыхъ.

Такимъ же путемъ складываютъ затѣмъ сотни слагаемыхъ, за сотнями—тысячи и т. д.

Если при сложеніи единицъ послѣдняго высшаго разряда получается число двузначное, то его, безъ всякаго измѣненія, пишутъ подъ чертою налѣво отъ ранѣе написанныхъ цыфръ.

19. Сложеніе по группамъ. Если требуется сложить много слагаемыхъ, то для удобства ихъ разбиваютъ на нѣсколько группъ, производятъ сложеніе въ каждой группѣ отдѣльно и затѣмъ полученныя суммы соединяютъ въ одну. Такъ, пусть требуется сложить 10 слагаемыхъ: 286, 35, 76, 108, 93, 16, 426, 576, 45, 72. Разобьемъ эти слагаемыя на группы, напр., такъ:

1-я группа.	2-я группа.	3-я группа.	Общая сумма.
286			
108	35	16	1396
426	93	45	204
576	76	72	133
1396	204	133	1733

20. Повѣрка сложенія. Складываютъ слагаемыя во второй разъ въ иномъ порядкѣ, чѣмъ въ первый, напр., снизу вверхъ. Если при второмъ сложеніи получится та же сумма, то весьма вѣроятно, что дѣйствіе произведено вѣрно.

Вычитаніе.

21. Что такое вычитаніе. Ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго отъ одного даннаго числа отнимаютъ столько единицъ, сколько ихъ есть въ другомъ данномъ числѣ, наз. вычитаніемъ.

Число, отъ котораго отнимаютъ, наз. **уменьшаемымъ**, число, которое отнимаютъ, наз. **вычитаемымъ**, число, получае-

мое послѣ вычитанія, наз. **остаткомъ.** Такъ, если изъ 17 вычитаемъ 9, то 17 наз. уменьшаемымъ, 9—вычитаемымъ, а 8—остаткомъ. Остатокъ иначе наз. **разностью,** потому что онъ означаетъ разницу между уменьшаемымъ и вычитаемымъ.

22. Зависимость между уменьшаемымъ, вычитаемымъ и остаткомъ. Посредствомъ вычитанія одно число разлагается на два числа. Напр., если мы, отнявъ 5 отъ 9, нашли, что осталось 4, то, значитъ, мы разложили 9 на два числа: 5 (отнятыхъ единицъ) и 4 (оставшіяся единицы). Если эти два числа соединимъ въ одно, то получимъ то число 9, которое разлагали; значитъ: **уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ остаткомъ.**

23. Сравненіе вычитанія съ сложеніемъ. При сложеніи даются слагаемыя, а отыскивается ихъ сумма; при вычитаніи, наоборотъ, дается сумма (уменьшаемое) и одно слагаемое (вычитаемое), а отыскивается другое слагаемое (остатокъ). Поэтому можно сказать, что **вычитаніе есть дѣйствіе, съ помощью котораго по данной суммѣ и одному слагаемому отыскивается другое слагаемое.**

24. Вычитаніе однозначнаго числа. Пусть требуется изъ 28 вычесть 6. Для этого разобьемъ уменьшаемое на двѣ части: на 20 и 8. Вычтя 6 изъ 8-и, получимъ 2; значитъ, отъ всего уменьшаемаго останется 20 да 2, т.-е. 22. Пусть еще требуется изъ 32 вычесть 8. Здѣсь удобнѣе разбить вычитаемое 8 на двѣ части: на 2 и 6. Отнявъ 2 отъ 32, получимъ 30; отнявъ еще 6, получимъ 24.

Нужно привыкнуть отнимать въ умѣ однозначное число отъ всякаго другого числа.

25. Вычитаніе многозначнаго числа. Пусть требуется изъ 60072 вычесть 7345. Будемъ держаться того же

порядка, какъ и при сложеніи, т.-е. станемъ вычитать единицы изъ единицъ, десятки изъ десятковъ и т. д.

. . .
60072.....уменьшаемое
7345.....вычитаемое
52727.....остатокъ

5 ед. изъ 2 ед. нельзя вычесть; беремъ отъ 7 дес. одинъ десятокъ, разлагаемъ его на единицы и прикладываемъ къ 2; получимъ въ уменьшаемомъ единицъ 12, а десятковъ 6. Чтобы запомнить, что десятковъ въ уменьшаемомъ не 7, а 6, поставимъ точку надъ цыфрою 7.

5 ед. изъ 12 ед.; останется 7 ед. Пишемъ 7 ед. подъ чертою на мѣстѣ единицъ.

4 дес. изъ 6 дес. . . . 2 дес.; пишемъ 2 подъ чертою на мѣстѣ десятковъ.

3 сотни изъ 0 сотенъ вычесть нельзя. Обращаемся къ тысячамъ уменьшаемаго, чтобы взять отъ нихъ одну для раздробленія въ сотни. Но тысячъ въ уменьшаемомъ нѣтъ. Обращаемся къ слѣдующему высшему разряду, т.-е. къ десяткамъ тысячъ; если бы и ихъ не оказалось, мы взяли бы сотню тысячъ и т. д. Въ нашемъ примѣрѣ въ уменьшаемомъ есть 6 десятковъ тысячъ; беремъ отъ нихъ одинъ (въ знакъ чего ставимъ точку надъ цыфрою 6) и раздробляемъ его въ простыя тысячи; получимъ 10 тысячъ. Отъ этихъ 10 тысячъ беремъ одну и раздробляемъ ее въ сотни; тогда получимъ сотенъ 10, тысячъ 9, а десятковъ тысячъ 5. Поставимъ точку надъ цыфрою 0 тысячъ и будемъ помнить, что 0 съ точкой будетъ означать число 9. Теперь продолжаемъ вычитаніе: 3 сотни изъ 10 сотенъ... 7 сотенъ; 7 тысячъ изъ 9 тысячъ . . . . 2 тысячи; наконецъ, 5 десятковъ тысячъ уменьшаемаго перейдутъ въ остатокъ безъ всякаго измѣненія, такъ какъ изъ нихъ ничего не вычитается.

Вотъ еще примѣры на вычитаніе:

....	.....
6000227	500000
4320423	17236
1679804	482764

26. Правило вычитанія. Пишутъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д.; подъ вычитаемымъ проводятъ черту, подъ которою пишутъ цыфры остатка по мѣрѣ ихъ полученія.

Сначала вычитаютъ единицы изъ единицъ, потомъ десятки изъ десятковъ, затѣмъ сотни изъ сотенъ и т. д.

Получаемыя отъ вычитанія числа ставятъ подъ чертою на мѣстѣ единицъ, когда вычитались единицы, на мѣстѣ десятковъ, когда вычитались десятки, и т. д.

Если число единицъ какого-нибудь разряда въ уменьшаемомъ меньше числа единицъ того же разряда въ вычитаемомъ, то мысленно увеличиваютъ это число на 10 и вмѣстѣ съ тѣмъ въ уменьшаемомъ ставятъ точку надъ первой слѣва отъ этого разряда значащей цыфрой, а также и надъ каждымъ изъ нулей, которые могутъ находиться между этимъ разрядомъ и первой слѣва значащей цыфрой. Тогда при дальнѣйшемъ вычитаніи принимаютъ, что точка, стоящая надъ значащей цыфрой, уменьшаетъ ея значеніе на единицу; точка же, стоящая надъ нулемъ, обращаетъ его въ девять.

27. Повѣрка вычитанія. Складываютъ вычитаемое съ остаткомъ; если получится число, равное уменьшаемому, то весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

27_2. Уменьшеніе числа на другое число. Уменьшить какое-нибудь число на нѣсколько единицъ значитъ вычесть изъ числа эти нѣсколько единицъ. Такъ, если требуется уменьшить 100 на 30, то это значитъ, что требуется изъ 100 вычесть 30 (получится 70).

28. Сравненіе двухъ чиселъ. Чтобы узнать, на сколько единицъ одно число бо́льше или меньше другого, надо изъ бо́льшаго числа вычесть меньшее. Напр., чтобы узнать, на сколько 20 меньше 35, надо изъ 35 вычесть 20; тогда найдемъ, что 20 меньше 35 (или 35 больше 20) на 15 единицъ.

Измѣненіе суммы и остатка.

29. Такъ какъ сумма содержитъ въ себѣ всѣ единицы слагаемыхъ, то очевидно, что:

если къ какому-либо слагаемому прибавимъ нѣсколько единицъ, то сумма увеличится на столько же единицъ;

если отъ какого-либо слагаемаго отнимемъ нѣсколько единицъ, то сумма уменьшится на столько же единицъ.

Примѣръ:	73	73	73
	18	**20** (ув. на 2)	18
	40	40	**30** (ум. на 10)
	131	**133** (ув. на 2)	**121** (ум. на 10)

30. Если измѣнимъ нѣсколько слагаемыхъ, то сумма иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ перемѣны. Напр.:

30	**40** . . . увеличено на 10
25	**30** . . . учеличено на 5
75	**60** . . . уменьшено на 15
130	**130** . . . безъ измѣненія.

Въ этомъ примѣрѣ сумма осталась безъ измѣненія. Дѣйствительно, отъ увеличенія перваго слагаемаго на 10 сумма увеличится на 10. Отъ увеличенія второго слагаемаго на 5 сумма еще увеличится на 5; значитъ, противъ прежняго она увеличится на 10 и на 5, т.-е. на 15. Отъ уменьшенія третьяго слагаемаго на 15 сумма уменьшится на 15; значитъ,

15 единицъ, которыя къ ней прибавились прежде, теперь отойдутъ; слѣдовательно, сумма останется безъ измѣненія.

31. Такъ какъ уменьшаемое равно вычитаемому, сложенному съ остаткомъ, то легко понять, что:

если къ уменьшаемому прибавимъ (или отнимемъ) нѣсколько единицъ, то остатокъ увеличится (или уменьшится) на столько же единицъ;

если къ вычитаемому прибавимъ (или отнимемъ) нѣсколько единицъ, то остатокъ уменьшится (или увеличится) на столько же единицъ.

32. Если станемъ измѣнять одновременно и вычитаемое, и уменьшаемое, то остатокъ иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ перемѣны. Напр.:

50	60	. . . увел. на 10
15	30	. . . увел. на 15
35	30	. . . умен. на 5

Отъ увеличенія уменьшаемаго на 10 остатокъ увеличивается на 10; отъ увеличенія вычитаемаго на 15 остатокъ уменьшается на 15. Значитъ, къ остатку прибавляется 10 и убавляется 15; отъ этого остатокъ уменьшается на 5.

Если уменьшаемое и вычитаемое увеличимъ или уменьшимъ на одно и то же число, то остатокъ не измѣнится; напр.:

50	60	. . ув. на 10	40	. . ум. на 10
15	25	. . ув. на 10	5	. . ум. на 10
35	35	. . без. измѣн.	35	. . безъ измѣн.

Знаки дѣйствій, скобки, формулы.

33. Знаки дѣйствій. Условились обозначать сложеніе знакомъ **плюсъ** +, а вычитаніе знакомъ **минусъ** —. Напр.:

$$\begin{array}{r} +\,446 \\ 235 \\ \hline 681 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,446 \\ 235 \\ \hline 211 \end{array}$$

Иногда бываетъ нужно, не производя дѣйствій на самомъ дѣлѣ, только указать знаками, какія дѣйствія надо выполнить надъ данными числами. Положимъ, напр., надо указать, что числа 10, 15 и 20 требуется сложить. Тогда пишутъ данныя слагаемыя въ одну строчку и ставятъ между ними знакъ сложенія: 10+15+20. Такъ какъ сумма не зависитъ отъ порядка, въ какомъ соединяемъ единицы слагаемыхъ, то безразлично, въ какомъ порядкѣ писать слагаемыя.

Если надо указать, что изъ одного числа требуется вычесть другое, то пишутъ уменьшаемое и вычитаемое въ одну строчку (первое налѣво, второе направо) и ставятъ между ними знакъ минусъ. Такъ, выраженіе 10—8 означаетъ, что надо изъ 10 вычесть 8.

Выраженіе 10+15+20 читается такъ: 10 плюсъ 15 плюсъ 20, или же: сумма 10-и, 15-и и 20-и. Выраженіе 10—8 читается такъ: 10 минусъ 8, или же разность 10-и и 8-и.

Если надъ данными числами надо произвести рядъ послѣдовательныхъ сложеній и вычитаній, то пишутъ числа въ строку въ томъ порядкѣ, въ какомъ надо произвести надъ ними дѣйствія. Такъ, выраженіе 10+15—2 означаетъ, что къ 10-ти надо приложить 15 и отъ полученной суммы отнять 2.

34. Знаки равенства и неравенства. Въ ариѳметикѣ употребительны еще знаки: =, > и <. Первый наз. знакомъ равенства и замѣняетъ собою слово «равно» или «равняется»; два другіе наз. знаками неравенства и означаютъ: знакъ > «больше», а знакъ < «меньше»; напр., выраженія: 7+8=15, 7+8>10 и 7+8<20 читаются такъ: 7 плюсъ 8 равно 15; 7 плюсъ 8 больше 10; 7 плюсъ 8 меньше 20. Слѣдуетъ помнить, что знаки > и < должны быть обращены остреемъ угла къ меньшему числу.

35. Скобки и формула. При рѣшеніи задачъ весьма полезно раньше совершенія дѣйствій указать, какія дѣй-

ствія и въ какомъ порядкѣ надо выполнить надъ данными числами, чтобы дойти до отвѣта на предложенный вопросъ. Положимъ, напр., что для рѣшенія какой-нибудь задачи надо сначала сложить 35 и 20, а потомъ эту сумму вычесть изъ 200. Чтобы указать это, пишутъ такъ:

$$200-(35+20)$$

Знакъ минусъ, стоящій передъ скобками, означаетъ, что изъ 200 надо вычесть не 35, а сумму 35+20, т.-е. 55.

Иногда приходится употреблять скобки различной формы, чтобы отличить ихъ однѣ отъ другихъ; напр., выраженіе:

$$100+\{160-[60+(7+8)]\}$$

означаетъ: сложить 7 и 8 (получимъ 15); найденную сумму (15) сложить съ 60 (получимъ 75); вычесть найденное число (75) изъ 160 (получимъ 85); сложить полученное число съ 100 (получимъ 185).

Выраженіе, показывающее, какія дѣйствія и въ какой послѣдовательности надо выполнить надъ данными числами, чтобы получить искомое число, наз. формулой.

Вычислить формулу значитъ найти число, которое получится послѣ выполненія дѣйствій, указанныхъ въ формулѣ.

Умноженіе.

36. Что такое умноженіе. Ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго одно данное число повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько въ другомъ данномъ числѣ находится единицъ, наз. умноженіемъ.

Такъ, умножить 7 на 4 значитъ повторить число 7 слагаемымъ 4 раза, т.-е. найти сумму 7+7+7+7.

Число, которое должно повторить слагаемымъ, называется **множимымъ**, а число, которое показываетъ, сколько разъ

надо множимое повторить слагаемымъ, называется **множителемъ**. Число, полученное послѣ умноженія, называется **произведеніемъ**. Напр., когда 7 умножается на 4, то 7 есть множимое, 4—множитель, а получившееся послѣ умноженія число 28—произведеніе. Множимое и множитель вмѣстѣ называются **сомножителями**.

Умноженіе обозначаютъ посредствомъ особаго знака. Если, напр., 7 надо умножить на 4, то пишутъ такъ: 7×4, или $7 . 4$, т.-е. пишутъ множимое, справа отъ него знакъ умноженія (косой крестъ или точку), а справа отъ знака ставятъ множителя; такое обозначеніе замѣняетъ собою сумму $7+7+7+7$.

Замѣчаніе. Множитель всегда число отвлеченное, такъ какъ онъ означаетъ, сколько разъ множимое должно быть повторено слагаемымъ; **множимое можетъ означать единицы какого угодно названія**, напр., аршины, рубли, карандаши и т. п.; **произведеніе означаетъ единицы того же названія, какъ и множимое**; такъ, если 7 р у б л е й умножаются на 4, то получается 28 р у б л е й.

37. Увеличеніе числа въ нѣсколько разъ. Увеличить число въ 2 раза, въ 3 раза, въ 4 раза и т. д.—значитъ повторить это число слагаемымъ 2 раза, 3 раза, 4 раза и т. д. Напр., увеличить 10 въ 5 разъ—значитъ повторить 10 слагаемымъ 5 разъ, т.-е. умножить 10 на 5. Такимъ образомъ, увеличеніе числа въ нѣсколько разъ выполняется умноженіемъ (тогда какъ увеличеніе числа на нѣсколько единицъ выполняется сложеніемъ).

38. Таблица умноженія. Чтобы умѣть быстро производить умноженіе всякихъ чиселъ, надо запомнить всѣ произведенія **однозначныхъ** чиселъ. Для этого соста-

вляютъ (при помощи сложенія) слѣдующую таблицу умноженія и заучиваютъ ее наизусть *).

2×2= 4	2×3= 6	2×4= 8	2×5=10
3×2= 6	3×3= 9	3×4=12	3×5=15
4×2= 8	4×3=12	4×4=16	4×5=20
5×2=10	5×3=15	5×4=20	5×5=25
6×2=12	6×3=18	6×4=24	6×5=30
7×2=14	7×3=21	7×4=28	7×5=35
8×2=16	8×3=24	8×4=32	8×5=40
9×2=18	9×3=27	9×4=36	9×5=45
2×6=12	2×7=14	2×8=16	2×9=18
3×6=18	3×7=21	3×8=24	3×9=27
4×6=24	4×7=28	4×8=32	4×9=36
5×6=30	5×7=35	5×8=40	5×9=45
6×6=36	6×7=42	6×8=48	6×9=54
7×6=42	7×7=49	7×8=56	7×9=63
8×6=48	8×7=56	8×8=64	8×9=72
9×6=54	9×7=63	9×8=72	9×9=81

39. Умноженіе многозначнаго числа на однозначное. Пусть требуется умножить 846 на 5. Принято располагать дѣйствіе такъ:

$$\begin{array}{r} 846 \\ \times 5 \\ \hline 4230 \end{array}$$

т.-е. пишутъ множимое, подъ нимъ множителя; подъ множителемъ проводятъ черту; сбоку ставятъ знакъ умноженія.

*) Заучивая эту таблицу, обыкновенно произносятъ сначала множителя, а потомъ множимое; напр., равенство: 8×3=24 произносятъ такъ: **трижды** 8....24.

Подъ чертою пишутъ цыфры произведенія по мѣрѣ того, какъ ихъ получаютъ.

Умножить 846 на 5 значитъ повторить 846 слагаемымъ 5 разъ. Для этого повторимъ 5 разъ (т.-е. умножимъ на 5) сначала единицы множимаго, потомъ десятки, затѣмъ сотни. Произведенія будемъ находить по таблицѣ умноженія.

Пятью 6 (ед.)... 30 (ед.); ставимъ 0 подъ чертою на мѣстѣ единицъ, а 3 десятка запоминаемъ.

Пятью 4 (десятка)... 20 (десятковъ); да 3 (дес.).. 23 (дес.); ставимъ 3 подъ чертою на мѣстѣ десятковъ, а 2 сотни запоминаемъ.

Пятью 8 (сотенъ)... 40 (сотенъ); да 2 (сотни)... 42 (сотни); ставимъ подъ чертою 42 (т.-е. 4 тысячи и 2 сотни).

Произведеніе 846 на 5 будетъ 4230.

40. Умноженіе на 10, на 100, на 1000 и т. д. Пусть требуется умножить:

$$358 \times 10,$$

т.-е. требуется повторить 358 слагаемымъ 10 разъ. Для этого повторимъ 10 разъ каждую изъ 358 единицъ. Одна единица, повторенная 10 разъ, дастъ десятокъ; значитъ, если каждую изъ 358 ед. повторимъ 10 разъ, то получимъ 358 десятковъ, что составляетъ 3580 единицъ.

Возьмемъ еще другой примѣръ:

$$296 \times 1000.$$

Одна единица, повторенная 1000 разъ, составляетъ одну тысячу; слѣд., 296 единицъ, повторенныя 1000 разъ, составятъ 296 тысячъ, что изображается такъ: 296000.

Правило. Чтобы умножить число на единицу съ нулями, достаточно приписать ко множимому справа столько нулей, сколько ихъ есть во множителѣ.

41. Умноженіе на одну значащую цыфру съ нулями. Пусть требуется умножить:

$$248 \times 30.$$

Умножить 248 на 30 значитъ повторить 248 слагаемымъ 30 разъ. Но 30 слагаемыхъ можно соединить въ 10 группъ, по 3 слагаемыхъ въ каждой группѣ:

248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
248	248	248	248	248	248	248	248	248	248
744	744	744	744	744	744	744	744	744	744

Вмѣсто того, чтобы 248 повторять 3 раза, мы можемъ умножить 248 на 3, и вмѣсто того, чтобы 744 повторять 10 разъ, мы можемъ умножить 744 на 10. Значитъ, для умноженія какого-нибудь числа на 30 достаточно умножить его на 3 и полученное произведеніе умножить на 10 (для чего надо приписать справа одинъ нуль).

$$248 \times 3 = 744; \qquad 744 \times 10 = 7440.$$

Возьмемъ еще другой примѣръ: 895×400.

Въ этомъ примѣрѣ требуется повторить 895 слагаемымъ 400 разъ. Но 400 слагаемыхъ можно соединить въ 100 группъ, по 4 слагаемыхъ въ каждой группѣ. Чтобы узнать, сколько единицъ въ одной группѣ, надо 895 умножить на 4 (получимъ 3580); чтобы затѣмъ узнать, сколько единицъ во всѣхъ группахъ, надо 3580 умножить на 100 (для чего достаточно приписать 2 нуля).

Дѣйствіе удобнѣе всего расположить такъ:

$$\begin{array}{r} 248 \\ \times 30 \\ \hline 7440 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 895 \\ \times 400 \\ \hline 358000 \end{array}$$

при чемъ пишутъ множителя такъ, чтобы нули его стояли направо отъ множимаго.

Правило. Чтобы умножить число на какую-нибудь значащую цыфру съ нулями, достаточно умножить множимое на эту значащую цыфру и къ произведенію приписать справа столько нулей, сколько ихъ есть въ множителѣ.

42. Умноженіе на многозначное число.

Примѣръ. 3826×472.

Умножить 3826 на 472 значитъ повторить 3826 слагаемымъ 472 раза. Для этого достаточно повторить 3826 слагаемымъ 2 раза, потомъ 70 разъ, потомъ 400 разъ и полученныя суммы соединить въ одну; другими словами, достаточно 3826 умножить на 2, потомъ на 70, затѣмъ на 400 и полученныя произведенія сложить:

3826	3826
×472	×472
7652	7652
267820	26782
1530400	15304
1805872	1805872

Дѣйствіе расположимъ такъ: пишемъ множимое, подъ нимъ множителя, подъ множителемъ проводимъ черту.

Умножаемъ множимое на 2 и полученное произведеніе пишемъ подъ чертою; это будетъ **первое частное произведеніе.**

Умножаемъ множимое на 70; для этого достаточно умножить его на 7 и къ произведенію приписать справа одинъ нуль; поэтому мы ставимъ 0 подъ цыфрою единицъ перваго частнаго произведенія, а цыфры, получаемыя отъ умноженія на 7, пишемъ, по порядку ихъ полученія, подъ десятками, сотнями и прочими разрядами перваго частнаго произведенія. Это будетъ **второе частное произведеніе.**

Умножаемъ множимое на 400. Для этого достаточно умножить его на 4 и къ произведенію приписать два нуля.

Пишемъ два нуля подъ единицами и десятками второго частнаго произведенія, а цыфры, получаемыя отъ умноженія на 4, пишемъ подъ сотнями, тысячами и прочими разрядами второго частнаго произведенія. Тогда получимъ **третье частное произведеніе.**

Подъ послѣднимъ частнымъ произведеніемъ проводимъ черту и складываемъ всѣ ихъ.

Для сокращенія письма обыкновенно не пишутъ нулей, указанныхъ нами жирнымъ шрифтомъ, а только оставляютъ для нихъ мѣсто.

```
     470827
   × 60013
   -------
    1412481
   470827
2824962
-----------
28255740751
```

Замѣчаніе. Когда во множителѣ встрѣчаются нули (какъ въ примѣрѣ, помѣщенномъ налѣво), то, конечно, на нихъ не умножаютъ, а переходятъ прямо къ умноженію на слѣдующую значащую цыфру множителя.

43. Правило умноженія. Подписываютъ множителя подъ множимымъ такъ, чтобы единицы стояли подъ единицами, десятки подъ десятками и т. д.; подъ множителемъ проводятъ черту.

Умножаютъ множимое на значащія цыфры множителя: сначала на цыфру его единицъ, потомъ на цыфру его десятковъ, затѣмъ на цыфру сотенъ и т. д.

Получаемыя отъ этихъ умноженій частныя произведенія пишутъ подъ чертою одно подъ другимъ, наблюдая, чтобы первая справа цыфра каждаго частнаго произведенія стояла на одной вертикальной линіи съ тою цыфрою множителя, на которую умножаютъ.

Всѣ частныя произведенія складываютъ между собою.

44. Умноженіе чиселъ, оканчивающихся нулями. Сначала возьмемъ примѣръ, въ которомъ одно множимое оканчивается нулями: 28**00**×15. Умножить 2800

на 15 значитъ повторить 2800 слагаемымъ 15 разъ. Если станемъ находить эту сумму обыкновеннымъ сложеніемъ:

```
 2800 |
 2800 |
 ____ |
 ____ |
+____ | 15 разъ
 ____ |
 ____ |
------
 ...00
```

то нули слагаемыхъ, очевидно, перейдутъ и въ сумму, а 28 сотенъ повторятся слагаемымъ 15 разъ. Значитъ, для умноженія 2800 на 15 достаточно умножить 28 на 15 и къ произведенію приписать 2 нуля.

Дѣйствіе располагаютъ такъ:

```
  2800
 ×15
 ----
  140
  28
 -----
 42000
```

т.-е. пишутъ множителя такъ, чтобы нули множимаго стояли направо отъ множителя, производятъ умноженіе, не обращая вниманія на нули множимаго, а къ произведенію приписываютъ ихъ справа.

Возьмемъ теперь примѣръ, въ которомъ одинъ множитель оканчивается нулями: 358×23000.

```
  358
 ×23000
 ------
  1074
  716
 -------
 8234000
```

Чтобы повторить 358 слагаемымъ 23000 разъ, можно повторить 358 слагаемымъ 23 раза (т.-е. умножить 358 на 23) и полученное число повторить слагаемымъ 1000 разъ (т.-е. умножить на 1000, для чего достаточно приписать справа три нуля). Дѣйствіе располагаютъ такъ, какъ указано на примѣрѣ.

Наконецъ, возьмемъ примѣръ, въ которомъ оба данныя числа оканчиваются нулями: 57000×3200.

```
  57000
 ×3200
 -----
  114
 171
 ---------
 182400000
```

Для умноженія 57000 на какое-нибудь число, надо умножить на это число 57 и къ произведенію приписать три нуля. Но чтобы умножить 57 на 3200, надо умножить 57 на 32 и къ произведенію приписать два нуля. Поэтому, когда

множимое и множитель оканчиваются нулями, производятъ умноженіе, не обращая вниманія на нули, и къ произведенію приписываютъ столько нулей, сколько ихъ есть во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.

45. Перемѣстительное свойство произведенія. Положимъ, мы желаемъ сосчитать изображенныя здѣсь черточки:

| | | | | | | | Въ первой строчкѣ ихъ 7, во второй 7 и въ третьей тоже 7; значитъ, всѣхъ черточекъ будетъ 7+7+7, т.-е. 7×3. Но тѣ же черточки можно считать вертикальными столбцами: въ первомъ столбцѣ ихъ 3, во второмъ 3, въ третьемъ 3 и т. д.; такъ какъ всѣхъ столбцовъ 7, то черточекъ окажется 3+3+3+3+3+3+3, т.-е. 3×7. Но число черточекъ *не зависитъ отъ того, въ какомъ порядкѣ* мы ихъ считаемъ: значитъ, 7×3=3×7.

Подобнымъ же образомъ можемъ убѣдиться, что 8×5==5×8, 20×15=15×20 и т. д. Вообще **произведеніе не измѣняется отъ перестановки сомножителей.**

Это свойство наз. **перемѣстительнымъ,** потому что оно состоитъ въ возможности **перемѣщать** множимое со множителемъ, не измѣняя произведенія.

Этимъ свойствомъ мы можемъ иногда съ выгодою пользоваться при вычисленіяхъ; если, напр., требуется умножить 47 на 8536, мы можемъ вмѣсто этого умножить 8536 на 47, что выполняется проще.

46. Повѣрка умноженія. Для повѣрки умноженія достаточно совершить его во второй разъ, умножая множителя на множимое.

Примѣръ:		Повѣрка:	
	532		145
	× 145		× 532
	2660		290
	2128		435
	532		725
	77140		77140

Оба произведенія оказались одинаковы; слѣд., весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

47. Произведеніе трехъ и болѣе сомножителей. Пусть имѣемъ нѣсколько чиселъ, напр.: 7, 5, 3 и 4. *Составимъ изъ нихъ произведеніе такимъ образомъ:* умножимъ первое число на второе, получимъ 35; умножимъ 35 на третье число, получимъ 105; умножимъ 105 на четвертое число, получимъ 420. Число 420 называется произведеніемъ четырехъ сомножителей 7, 5, 3 и 4. Для обозначенія такихъ *послѣдовательныхъ умноженій пишутъ данныя числа* въ одну строчку въ томъ порядкѣ, въ какомъ требуется производить надъ ними умноженіе, и ставятъ между ними знакъ умноженія. Такимъ образомъ выраженія:

3 . 4 . 2 . 7 или 3×4×2×7

означаютъ, что 3 умножается на 4, полученное произведеніе—на 2 и это послѣднее произведеніе—на 7.

Произведеніе не измѣняется отъ перестановки сомножителей, сколько бы ни было этихъ сомножителей.

Напр.: 3.4.2.7.=168; 4.2.7.3.=168; 7.3.2.4.=168 и т. п.

Дѣленіе.

48. Двойное значеніе дѣленія. Слово «дѣленіе» имѣетъ два значенія; напр., раздѣлить 24 на 6 значитъ:

1) узнать, сколько разъ въ 24 ед. содержатся (т.-е. повторяются слагаемымъ) 6 ед.;

2) узнать, сколько единицъ получится въ каждой части, если число 24 разложимъ на 6 равныхъ частей.

Такимъ образомъ, **дѣленіе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, сколько разъ одно число содержится въ другомъ;**

или **дѣленіе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, сколько единицъ будетъ въ каждой части, если одно данное число разложимъ на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ другомъ данномъ числѣ.**

Данное число, въ которомъ ищется содержаніе, или котораго часть отыскивается, наз. **дѣлимымъ;** данное число, котораго содержаніе отыскивается, или которое означаетъ, на сколько равныхъ частей надо разложить дѣлимое, наз. **дѣлителемъ;** искомое число наз. **частнымъ.** Оно показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ, или сколько единицъ въ каждой части дѣлимаго, если его разложимъ на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ дѣлителѣ.

Дѣленіе обозначается знакомъ : (двѣ точки), который ставятъ между дѣлимымъ и дѣлителемъ (дѣлимое налѣво, дѣлитель направо). Напр., выраженіе 24 : 6=4 означаетъ, что 24, дѣленныя на 6, даютъ 4.

49. Наименованіе единицъ дѣлимаго, дѣлителя и частнаго. Когда дѣленіемъ узнается, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, то дѣлимое и дѣлитель могутъ выражать какія угодно единицы, но только одного и того же названія. Напр., мы можемъ узнавать, сколько разъ въ 30 книгахъ содержатся 5 книгъ, сколько разъ въ 30 листахъ содержатся 5 листовъ и т. п., но было бы нелѣпо узнавать, сколько разъ въ 30 книгахъ содержатся 5 перьевъ и т. п. При нахожденіи содержанія

частное показываетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ и потому оно есть число отвлеченное.

Когда же дѣленіемъ число разлагается на равныя части, то дѣлимое можетъ выражать единицы любого названія, дѣлитель означаетъ, на сколько равныхъ частей разлагается дѣлимое, и потому онъ есть число отвлеченное, а частное должно выражать тѣ же единицы, изъ которыхъ составлено дѣлимое. Напр., если 30 книгъ разложимъ на 5 равныхъ частей, то въ каждой части получимъ 6 книгъ, а не какихъ-нибудь другихъ единицъ.

50. Дѣленіе съ остаткомъ. Пусть требуется раздѣлить 27 на 6, т.-е. узнать, сколько разъ въ 27 содержится 6, или разложить 27 на 6 равныхъ частей. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ получимъ въ частномъ число 4, при чемъ 3 единицы окажутся не раздѣленными. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что дѣленіе 27 на 6 совершается **съ остаткомъ** и частное получается **неточное.**

Дѣйствіе въ этомъ случаѣ можно обозначить такъ:

$$27 : 6 = 4 \text{ (ост. 3)},$$

помѣщая въ скобкахъ остатокъ отъ дѣленія.

Остатокъ отъ дѣленія всегда меньше дѣлителя.

51. Сравненіе дѣленія съ умноженіемъ. Возьмемъ какой-нибудь случай дѣленія безъ остатка, напр.: 56 : 7. Раздѣлить 56 на 7 значитъ: или узнать, сколько разъ 7 содержится въ 56; или узнать, сколько единицъ будетъ въ каждой части, если 56 разложимъ на 7 равныхъ частей.

Пусть мы узнали, что 7 въ 56 содержится 8 разъ. Тогда 56 можно представить въ видѣ такой суммы:

$$56 = 7+7+7+7+7+7+7+7 \quad \text{(8 разъ)}$$

$$\text{или } 56 = 7 \times 8.$$

Изъ этого равенства видно, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное.

Раздѣливъ 56 на 7 равныхъ частей, получимъ въ каждой части то же число 8. Теперь 56 можно представить въ видѣ другой суммы:

$$56=8+8+8+8+8+8+8 \quad (7 \text{ разъ})$$

$$\text{или } 56=8\times7.$$

Изъ этого равенства видно, что дѣлимое равно частному, умноженному на дѣлителя.

Такимъ образомъ, когда дѣленіе совершается безъ остатка, то **дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, или произведенію частнаго на дѣлителя.**

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перестановки сомножителей, то можно безразлично принимать дѣлителя за множимое, а частное—за множителя, или же, наоборотъ, дѣлителя принимать за множителя, а частное—за множимое; и въ томъ, и въ другомъ случаѣ величина частнаго одна и та же.

Возьмемъ теперь какой-нибудь примѣръ дѣленія съ остаткомъ, напр., 32 : 9=3 (ост. 5). Это дѣленіе означаетъ, что 9 въ 32 содержится 3 раза, при чемъ 5 ед. остаются, или что, раздѣливъ 32 на 9 равныхъ частей, получимъ въ каждой части по 3, при чемъ еще останутся 5 ед. Значитъ, 32 можно представить такъ:

$$32=9+9+9 \quad +5, \qquad \text{т.-е. } 32=9\times3+5.$$

$$\text{или } 32=3+3+3+3+3+3+3+3+3+5, \text{ т.-е. } 32=3\times9+5.$$

Мы видимъ такимъ образомъ, что когда дѣленіе совершается съ остаткомъ, то **дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное или произведенію частнаго на дѣлителя, сложенному съ остаткомъ.**

52. Когда при рѣшеніи задачъ употребляется дѣленіе. При рѣшеніи задачъ дѣленіе употребляется въ слѣдующихъ 4-хъ случаяхъ:

1) **Когда надо узнать, сколько разъ меньшее число содержится въ бо̀льшемъ;** напр; сколько разъ 5 рублей содержатся въ 20 рубляхъ.

2) **Когда надо узнать, во сколько разъ одно число больше или меньше другого,** потому что узнать это—значитъ опредѣлить, сколько разъ меньшее число содержится въ бо̀льшемъ. Напр., узнать, во сколько разъ 20 больше 5 значитъ, другими словами, опредѣлить, сколько разъ 20 содержитъ въ себѣ 5.

3) **Когда требуется данное число разложить на нѣсколько равныхъ частей;** напр., когда требуется 60 листовъ бумаги разложить на 12 равныхъ частей.

4) **Когда надо уменьшить данное число въ нѣсколько разъ,** потому что уменьшить, напр., 60 въ 12 разъ значитъ разложить 60 на 12 равныхъ частей и взять вмѣсто 60-ти одну только его часть.

53. Дѣленіе можно выполнять посредствомъ сложенія, вычитанія и умноженія. Пусть, напр., требуется раздѣлить 212 на 53. Искомое частное мы можемъ найти:

1) Сложеніемъ: 53+53=106; 106+53=159; 159+53=**212.**

Оказывается, что 53 надо повторить слагаемымъ 4 раза, чтобы получить 212; значитъ, искомое частное есть 4.

2) Вычитаніемъ:

$$\begin{array}{r} 212 \\ -\ 53 \\ \hline 159 \end{array} \quad \begin{array}{r} 159 \\ -\ 53 \\ \hline 106 \end{array} \quad \begin{array}{r} 106 \\ -\ 53 \\ \hline 53 \end{array} \quad \begin{array}{r} 53 \\ -\ 53 \\ \hline 0 \end{array}$$

Оказывается, что 53 отъ 212 можно отнять 4 раза; значитъ, искомое частное есть 4.

3) Умноженіемъ: 53×2=106; 53×3=159; 53×4=212. Искомое частное есть 4.

Однако, эти способы неудобны, если частное большое число; ариѳметика указываетъ болѣе простой пріемъ, который мы теперь и разсмотримъ.

54. Какъ узнать, будетъ ли частное однозначное или многозначное. Легко узнать, будетъ ли частное менѣе 10-и или болѣе 10-и. Для этого стоитъ только умножить (въ умѣ) дѣлителя на 10 и сравнить полученное произведеніе съ дѣлимымъ.

Примѣръ 1. 534 : 37=?

Если 37 умножимъ на 10, то получимъ 370; но 370 меньше 534; значитъ, дѣлимое больше дѣлителя, повтореннаго 10 разъ, и потому частное должно быть больше 10. Еще примѣръ:

Примѣръ 2. 534 : 68=?

Если 68 умножимъ на 10, то получимъ 680; но 680 больше 534; значитъ, частное должно быть менѣе 10.

Когда частное меньше 10, то оно есть число однозначное, а когда частное болѣе 10, то оно есть число многозначное.

55. Нахожденіе однозначнаго частнаго. Разсмотримъ два случая: когда дѣлитель тоже однозначный и когда дѣлитель многозначный.

1) Когда дѣлитель и частное состоятъ изъ одной цыфры, то частное находится по таблицѣ умноженія. Напр., частное отъ дѣленія 56 на 8 будетъ 7, потому что семью восемь равно 56; частное отъ дѣленія 42 на 9 равно 4 съ остаткомъ 6, потому что четырежды девять 36, что меньше 42, а пятью девять 45, что больше 42; значитъ, въ частномъ надо взять 4, при чемъ въ остаткѣ получится 6.

2) Когда дѣлитель состоитъ изъ нѣсколькихъ цыфръ, а частное изъ одной цыфры, то это частное находится посредствомъ испытанія одной или нѣсколькихъ цыфръ.

Примѣръ. 43530 : 6837.

Такъ какъ въ этомъ примѣрѣ дѣлимое меньше дѣлителя, умноженнаго на 10, то искомое частное должно быть однозначное. Чтобы найти цыфру частнаго, поступимъ такъ: Зачеркнемъ въ дѣлителѣ всѣ цыфры, кромѣ первой слѣва, т.-е. возьмемъ изъ дѣлителя только 6 тысячъ. Въ дѣлимомъ зачеркнемъ справа столько же цыфръ, сколько ихъ зачеркнули въ дѣлителѣ, т.-е. возьмемъ изъ дѣлимаго только 43 тысячи. Зададимся теперь вопросомъ: на какую цыфру надо умножить 6, чтобы получить 43 или число, близкое къ 43. Изъ таблицы умноженія находимъ, что если 6 умножимъ на 7, то получимъ 42, а если умножимъ на 8, то окажется 48. Значитъ, искомое частное не можетъ быть больше 7; но оно можетъ быть 7 или меньше 7-и (меньше 7 оно будетъ тогда, когда отброшенныя нами 837 ед., умноженныя на 7, составятъ такое число, которое превзойдетъ 1 тысячу, оставшуюся отъ 43 тысячъ дѣлимаго, вмѣстѣ съ 530 единицами). Начнемъ испытаніе съ цыфры 7. Для этого умножимъ 6837 на 7; если получимъ больше 43530, то цыфра 7 не годится; тогда испытаемъ слѣдующую меньшую цыфру 6:

$$\begin{array}{r} 6837 \\ \times\ 7 \\ \hline 47859 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6837 \\ \times\ 6 \\ \hline 41022 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43530 \\ -\ 41022 \\ \hline 2508 \end{array}$$

Произведеніе 6837×7 оказалось больше 43530, а произведеніе 6837×6 меньше этого числа; значитъ, частное должно быть 6, при чемъ получится остатокъ 2508.

56. Первую цыфру для испытанія можно найти иначе. Замѣтивъ, что въ нашемъ примѣрѣ дѣлитель мало отличается отъ 7 тысячъ, будемъ узнавать, на какую цыфру

надо умножить 7, чтобы получить число, возможно близкое къ 43. По таблицѣ умноженія находимъ, что шестью 7 будетъ 42, а семью 7...49. Значитъ, частное должно быть 6 или больше 6-и (потому что дѣлитель меньше 7 тысячъ). Начнемъ испытаніе съ цыфры 6. Для этого умножимъ дѣлителя на 6 и вычтемъ произведеніе изъ дѣлимаго; если останется больше 6837, то цыфра 6 мала; тогда надо испытать цыфру 7; а если останется меньше 6837, то цыфра 6 годится. Остатокъ оказался 2508; значитъ, цыфра 6 годится.

Такъ полезно поступать тогда, когда вторая цыфра дѣлителя больше 5. Напр., дѣлитель 6837, благодаря тому, что у него вторая цыфра болѣе 5, ближе подходитъ къ 7000, чѣмъ къ 6000.

57. Нахожденіе многозначнаго частнаго.

При объясненіи способа нахожденія цыфръ многозначнаго частнаго, проще всего разсматривать дѣленіе, какъ разложеніе дѣлимаго на столько равныхъ частей, сколько единицъ въ дѣлителѣ (полученное частное будетъ означать также, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ).

Пусть требуется раздѣлить 64508 на 23. Отдѣлимъ дѣлителя отъ дѣлимаго вертикальнагою чертою; подъ дѣлителемъ проведемъ горизонтальную черту, подъ которою будемъ писать цыфры частнаго въ мѣрѣ ихъ нахожденія:

```
64508 | 23
46    |  2804
185
184
  108
   92
   16
```

Раздѣлить 64508 на 23 значитъ разложить 64508 какихъ-нибудь единицъ на 23 равныя части (напр., раздѣлить 64508 рублей поровну между 23 человѣками). Такъ какъ въ дѣлимомъ только 6 десятковъ тысячъ, а частей всѣхъ 23, то десятковъ тысячъ въ каждой части не можетъ получиться. Такъ какъ въ дѣлимомъ 64 тысячи, а частей

всѣхъ 23, то въ каждой части, очевидно, получится по нѣскольку тысячъ. Раздѣливъ 64 тысячи на 23 равныя части, получимъ въ каждой части по 2 тысячи. Пишемъ въ частномъ цыфру 2. Если въ каждой части 2 тысячи, то въ 23 частяхъ ихъ будетъ 46. Вычитаемъ 46 тысячъ, изъ 64 тысячъ; останется 18 тысячъ, которыя предстоитъ раздѣлить на 23 равныя части. Очевидно, тысячи не получится. Раздробимъ 18 тысячъ въ сотни и приложимъ 5 сотенъ дѣлимаго. Получимъ 185 сотенъ. Раздѣливъ ихъ на 24, получимъ въ каждой части по 8 сотенъ. Пишемъ въ частномъ цыфру 8 на мѣстѣ сотенъ. Умноживъ 8 на 23, узнаемъ, что во всѣхъ частяхъ сотенъ будетъ 184; вычитаемъ ихъ изъ 185. Остается 1 сотня, которую предстоитъ раздѣлить на 23 равныя части. Раздробимъ ее въ десятки; получимъ 10 десятковъ. Отъ дѣленія ихъ на 23 въ частномъ не получимъ десятковъ; поэтому ставимъ въ частномъ 0 на мѣстѣ десятковъ. Раздробимъ 10 десятковъ въ единицы и приложимъ 8 ед. дѣлимаго; получимъ 108 ед. Раздѣливъ ихъ на 23, найдемъ 4 ед. Пишемъ цыфру 4 въ частномъ на мѣстѣ единицъ, умножаемъ на нее 23 и полученное произведеніе вычитаемъ изъ 108, чтобы найти остатокъ отъ дѣленія.

Вотъ еще 2 примѣра дѣленія:

```
1470035 | 7          3480000 | 15
14      |------      30      |------
------  | 210005     ------  | 232000
  7     |            48
  7     |            45
------  |            ------
   0035               30
      35              30
------                ------
      0                  000
```

58. Правило дѣленія. Пишутъ дѣлимое и дѣлителя въ одной горизонтальной строкѣ, отдѣливъ ихъ другъ

отъ друга вертикальною чертою. Подъ дѣлителемъ проводятъ горизонтальную черту, подъ которою пишутъ цыфры частнаго, по мѣрѣ ихъ полученія.

Отдѣляютъ въ дѣлимомъ отъ лѣвой руки къ правой столько цыфръ, чтобы изображаемое ими число содержало дѣлителя, но менѣе 10 разъ.

Отдѣленное число дѣлятъ на дѣлителя (какъ было объяснено раньше).

Полученную цыфру пишутъ въ частномъ.

Умножаютъ дѣлителя на найденную цыфру частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ отдѣленной части дѣлимаго.

Къ остатку сносятъ слѣдующую вправо цыфру дѣлимаго.

Полученное послѣ снесенія число дѣлятъ на дѣлителя (какъ было объяснено раньше); цыфру отъ этого дѣленія пишутъ въ частномъ направо отъ ранѣе написанной цыфры.

Умножаютъ дѣлителя на вторую цыфру частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ того числа, которое было раздѣлено для полученія второй цыфры частнаго.

Къ остатку сносятъ слѣдующую цыфру дѣлимаго.

Полученное послѣ снесенія число дѣлятъ на дѣлителя.

Продолжаютъ такъ дѣйствіе до тѣхъ поръ, пока въ дѣлимомъ не окажется цыфръ для снесенія.

Если въ остаткѣ, послѣ снесенія къ нему надлежащей цыфры дѣлимаго, получится число, меньшее дѣлителя, то пишутъ въ частномъ 0, а къ остатку сносятъ слѣдующую цыфру дѣлимаго.

59. Сокращенный способъ дѣленія. Когда дѣлитель однозначный, то для сокращенія письма полезно привыкнуть всѣ вычитанія производить въ умѣ, выписывая

только одни остатки. Напр., такъ:

```
563087 | 6
 23    |  93847
  50   |
   28  |
    47
     5
```

или еще короче:

```
563087 | 6
     5   93847
```

гдѣ цыфра 5 подъ чертою означаетъ послѣдній остатокъ.

60. Случай, когда дѣлитель оканчивается нулями. Дѣленіе упрощается въ томъ случаѣ, когда дѣлитель оканчивается однимъ или нѣсколькими нулями. Возьмемъ сначала случай, когда дѣлитель есть единица съ нулями. Раздѣливъ какое-нибудь число на 10, на 100, на 1000 и т. д., мы узнаемъ, сколько въ этомъ числѣ заключается десятковъ, сотенъ, тысячъ и т. д. Но это же можно узнать и по правилу счисленія, указанному нами раньше (см. § 10). Напр.:

54634 : 10=5463 (ост. 4)
54634 : 1000=54 (ост. 634)

Правило. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на 1 съ нулями, отдѣляютъ въ этомъ числѣ справа столько цыфръ, сколько нулей въ дѣлителѣ; оставшіяся цыфры дѣлимаго представляютъ собою частное, а отдѣленныя— остатокъ.

Возьмемъ теперь случай, когда дѣлитель есть какое-нибудь число, оканчивающееся нулями. Напр.: 389224 : 7300.

```
389224 | 7300
365    |  53
 242   |
 219   |
  2324
```

Дѣлитель представляетъ собою 73 сотни. Чтобы узнать, сколько разъ эти 73 сотни содержатся въ дѣлимомъ, разобьемъ его на двѣ части: на сотни и единицы. Въ дѣлимомъ всѣхъ сотенъ 3892 и еще 24 единицы. 73 сотни дѣлителя могутъ содер-

жаться только въ одной изъ этихъ частей, именно въ сотняхъ. Чтобъ узнать, сколько разъ 73 сотни содержатся въ 3892 сотняхъ, надо раздѣлить 3892 на 73. Раздѣливъ, находимъ, что 73 сотни въ 3892 сотняхъ содержатся 53 раза, при чемъ 23 сотни остаются. Приложивъ къ 23 сотнямъ 24 единицы дѣлимаго, получимъ 2324; въ этомъ числѣ 73 сотни не содержатся ни разу; слѣд., 2324 ед. будутъ въ остаткѣ.

Вотъ еще примѣръ, въ которомъ и дѣлимое, и дѣлитель оканчиваются нулями:

```
35000 | 7300
292   |  4
 5800
```

Правило. Если дѣлитель оканчивается нулями, то зачеркиваютъ въ немъ эти нули и въ дѣлимомъ зачеркиваютъ справа столько же цыфръ; оставшіяся числа дѣлятъ и къ остатку сносятъ зачеркнутыя цыфры дѣлимаго.

61. Повѣрка дѣленія. Дѣленіе можно повѣрять умноженіемъ, основываясь на томъ, что дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное (плюсъ остатокъ, если онъ есть).

```
Примѣръ:  8375 | 42        Повѣрка:   199
          42   | 199                  × 42
          417                          398
          378                         796
           395                        8358
           378                       + 17
            17                       8375
```

Чтобы повѣрить дѣйствіе, мы умножили частное 199 на дѣлителя 42 и къ полученному произведенію приложили остатокъ 17. Такъ какъ послѣ этого получилось дѣлимое, то весьма вѣроятно, что дѣйствіе сдѣлано вѣрно.

Измѣненіе произведенія и частнаго.

62. Если увеличимъ множителя въ нѣсколько разъ, то произведеніе увеличится во столько же разъ. Напр.:

$$15\times3 \qquad 15\times6$$

Первое произведеніе представляетъ собою сумму: 15+ +15+15, а второе: $\underline{15+15+15}+\underline{15+15+15}$. Значитъ, во второй суммѣ первая сумма повторяется 2 раза, т.-е. вторая сумма болѣе первой въ 2 раза.

Если увеличимъ множимое въ нѣсколько разъ, то произведеніе увеличится во столько же разъ. Напр.:

$$15\times3 \qquad 60\times3.$$

Первое произведеніе представляетъ собою сумму трехъ слагаемыхъ: 15+15+15 и второе произведеніе представляетъ собою также сумму трехъ слагаемыхъ: 60+60+60, но каждое слагаемое второй суммы болѣе каждаго слагаемаго первой суммы въ 4 раза; значитъ, вторая сумма болѣе первой суммы въ 4 раза.

Если уменьшимъ множителя или множимое въ нѣсколько разъ, то и произведеніе уменьшится во столько же разъ.

Напр.: 20×2=40; 10×2=20; 5×2=10 и т. п.

63. Зная эти измѣненія произведенія, мы можемъ иногда **упростить умноженіе.** Пусть, напр., надо умножить 438 на 5. Увеличимъ множителя въ 2 раза, т.-е. вмѣсто 5 возьмемъ 10. Тогда произведеніе находимъ сразу; оно будетъ 4380. Но, увеличивъ множителя въ 2 раза, мы увеличили произведеніе въ 2 раза; слѣд., искомое произведеніе должно быть вдвое меньше 4380-ти, т.-е. оно равно 2190.

Подобно этому, если требуется умножить на 25, мы можемъ умножить на 100 и полученное произведеніе уменьшить въ 4 раза. Напр.:

$$32\times25=3200:4=800.$$

64. Если **оба сомножителя измѣняются** одновременно, то произведеніе иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ перемѣны. Разсмотримъ это на примѣрѣ:

$$15 \times 6 = 90.$$

1) Увеличимъ множимое въ 3 раза и множителя въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; \quad \mathbf{45 \times 12} = ?$$

Отъ увеличенія одного множимаго въ 3 раза произведеніе увеличится въ 3 раза, т.-е. будетъ не 90, а 90+90+90. Отъ увеличенія затѣмъ множителя въ 2 раза произведеніе еще увеличится въ 2 раза:

$$(90+90+90)+(90+90+90);$$

значитъ, сравнительно съ начальнымъ произведеніемъ оно увеличится въ дважды три раза (въ 6 разъ).

2) Уменьшимъ множимое въ 3 раза и множителя въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; \quad \mathbf{5 \times 3} = ?$$

Отъ уменьшенія одного множимаго въ 3 раза произведеніе уменьшится въ 3 раза, т.-е. сдѣлается вмѣсто 90 только 30; отъ уменьшенія затѣмъ множителя въ 2 раза произведеніе еще уменьшится въ 2 раза, т.-е. сдѣлается 15. Значитъ, отъ этихъ двухъ измѣненій произведеніе уменьшится въ дважды три раза, т.-е. въ 6 разъ.

3) Увеличимъ множимое въ 6 разъ, а множителя уменьшимъ въ 2 раза:

$$15 \times 6 = 90; \quad \mathbf{90 \times 3} = ?$$

Отъ увеличенія одного множимаго въ 6 разъ произведеніе увеличится въ 6 разъ, а отъ уменьшенія затѣмъ множителя въ 2 раза это увеличенное въ 6 разъ произведеніе уменьшится въ 2 раза. Значитъ, послѣ двухъ этихъ измѣненій произведеніе увеличится только въ 3 раза.

65. Когда дѣленіе совершается безъ остатка, то дѣлимое есть произведеніе, а дѣлитель и частное сомножители; поэтому:

если увеличимъ дѣлимое въ нѣсколько разъ, то частное увеличится во столько же разъ; напр.:

10 : 2=5; 20 : 2=10; 30 : 2=15;

если увеличимъ дѣлителя въ нѣсколько разъ, то частное уменьшится во столько же разъ; напр.:

48 : 2=24; 48 : 4=12; 48 : 6=8.

Подобно этому, **если уменьшимъ дѣлимое въ нѣсколько разъ, то частное уменьшится во столько же разъ;**

если уменьшимъ дѣлителя въ нѣсколько разъ, то частное увеличится во столько же разъ.

66. Когда дѣлимое и дѣлитель измѣняются одновременно, то частное иногда увеличится, иногда уменьшится, или же останется безъ измѣненія. Такъ, если въ примѣрѣ 27 : 3=9 увеличимъ дѣлимое въ 2 раза и дѣлителя увеличимъ въ 6 разъ, то частное уменьшится въ 3 раза: 54 : 18=3.

Если дѣлимое и дѣлителя увеличимъ или уменьшимъ въ одинаковое число разъ, то частное не измѣнится. Такъ, если въ примѣрѣ 60 : 15=4 увеличимъ дѣлимое и дѣлителя въ 5 разъ, то получимъ 300 : 75=4; частное осталось безъ перемѣны, такъ какъ отъ увеличенія дѣлимаго въ 5 разъ, оно должно увеличиться въ 5 разъ, а отъ увеличенія дѣлителя въ 5 разъ, наоборотъ, должно уменьшиться въ 5 разъ.

Именованныя цѣлыя числа.

67. Что называется величиною. Все то, что можетъ быть равно, больше или меньше, наз. **величиною.** Такъ, вѣсъ есть величина, потому что вѣсъ одного предмета можетъ быть равенъ вѣсу другого предмета и можетъ быть больше или меньше вѣса другого предмета.

Вотъ величины, наиболѣе знакомыя каждому изъ насъ: **длина** (называемая иногда шириной, иногда высотою, тол-

щиною...); **поверхность**, т.-е. то, что ограничиваетъ предметъ съ разныхъ сторонъ; **объемъ**, т.-е. часть пространства, занимаемая предметомъ; **вѣсъ**, т.-е. давленіе, производимое предметомъ на подпору; **время**, въ теченіе котораго совершается какое-либо явленіе или дѣйствіе; **цѣна** товаровъ, и т. п.

Замѣтимъ, что плоская поверхность (напр., поверхность стола, пола и т. п.) называется **площадью**; внутренній объемъ какого-нибудь сосуда или ящика назыв. **вмѣстимостью** или **емкостью**.

68. Измѣреніе величины. Чтобы составить ясное понятіе о длинѣ комнаты, мы измѣряемъ ее при помощи другой длины, которая намъ хорошо извѣстна, напр., помощью аршина. Для этого откладываемъ аршинъ по длинѣ комнаты столько разъ, сколько можно. Если аршинъ уложится по длинѣ комнаты ровно 10 разъ, то длина ея равна 10 аршинамъ. Подобно этому, чтобы измѣрить вѣсъ какого-либо предмета, мы беремъ другой вѣсъ, который намъ хорошо извѣстенъ, напр., фунтъ, и узнаемъ (помощью вѣсовъ), сколько разъ фунтъ содержится въ измѣряемомъ вѣсѣ. Пусть онъ содержится ровно 5 разъ; тогда вѣсъ предмета равенъ 5 фунтамъ.

Извѣстная намъ величина, употребляемая для измѣренія другихъ величинъ того же рода, наз. **единицею.** Такъ, аршинъ есть единица длины, фунтъ—единица вѣса и т. п. Для каждой величины выбираютъ нѣсколько единицъ, однѣ болѣе крупныя, другія болѣе мелкія. Такъ, для измѣренія длины, кромѣ аршина, употребляютъ еще: сажень, версту, вершокъ, футъ и другія. Если, напр., въ длинѣ комнаты аршинъ содержится не ровно 10 разъ, а съ нѣкоторымъ остаткомъ, который меньше аршина, то этотъ остатокъ измѣряютъ при помощи болѣе мелкой единицы, напр. верш-

комъ. Если случится, что въ остаткѣ вершокъ уложится 7 разъ, то длина комнаты равна 10 аршинамъ 7 вершкамъ.

Въ каждомъ государствѣ правительство установило опредѣленныя единицы для главнѣйшихъ величинъ. Такія единицы называются **мѣрами.**

По сравненію одна съ другой **однородныя мѣры** (т.-е. мѣры одной и той же величины) бываютъ **высшаго и низшаго разряда.** Такъ, сажень есть мѣра высшаго разряда по сравненію съ аршиномъ и низшаго разряда по сравненію съ верстой.

Единичнымъ отношеніемъ (или просто **отношеніемъ**) двухъ однородныхъ мѣръ называется число, показывающее, сколько разъ меньшая мѣра содержится въ бо́льшей. Такъ, единичное отношеніе сажени къ аршину есть число 3.

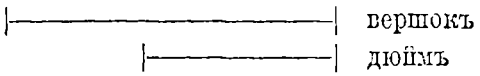
Мѣры, употребляемыя въ Россіи.

69. Мѣры длины (линейныя мѣры):

миля	= 7 верстамъ	сажень	= 7 футамъ
верста	=500 саженямъ	футъ	=12 дюймамъ
сажень	= 3 аршинамъ	дюймъ	=10 линіямъ
аршинъ	= 16 вершкамъ		

Такъ какъ сажень содержитъ 84 дюйма (12×7), а аршинъ втрое меньше сажени, то 1 арш.=28 дюймамъ.

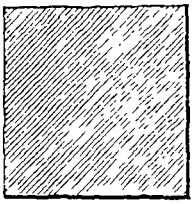
Предлагаемъ здѣсь для нагляднаго сравненія двѣ мѣры:



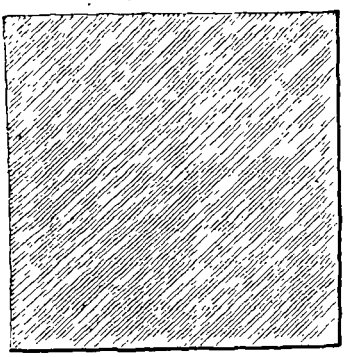
70. Мѣры площади. Для измѣренія площадей употребляются мѣры, называемыя **квадратными**, такъ какъ онѣ имѣютъ форму квадрата. Квадратомъ называется такой четыреугольникъ, у котораго всѣ 4 стороны равны и всѣ 4 угла одинаковы. Квадратный дюймъ есть квадратъ, у котораго каждая сторона равна линейному дюйму; ква-

дратный вершокъ есть квадратъ, у котораго каждая сторона равна линейному вершку, и т. д.

Для наглядности мы изобразили квадр. дюймъ и квадр. вершокъ на чертежѣ въ натуральную величину:

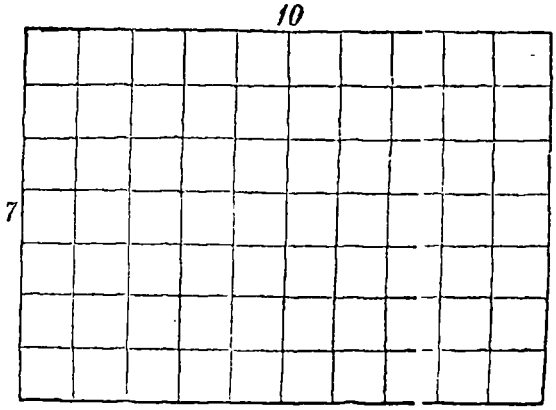


Кв. дюймъ.



Кв. вершокъ.

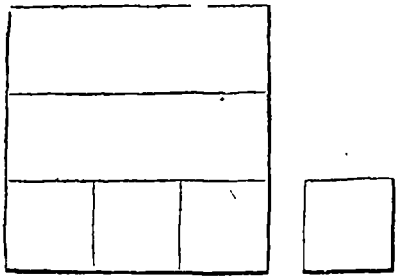
71. Измѣреніе нѣкоторыхъ площадей. Если площадь имѣетъ форму четыреугольника съ одинаковыми углами (форму **прямоугольника**), то ее легко измѣрить. Пусть, напр., требуется узнать, сколько квадратныхъ



аршинъ заключается въ площади пола комнаты. Для этого достаточно смѣрить линейнымъ аршиномъ длину и ширину комнаты и полученныя числа перемножить. Пусть, напр.,

длина комнаты равна 10 аршинамъ, а ширина 7 аршинамъ. Раздѣлимъ длину пола на 10, а ширину на 7 равныхъ частей и затѣмъ проведемъ линіи, какъ указано на чертежѣ; тогда площадь пола раздѣлится на кв. аршины, которыхъ будетъ 7 рядовъ по 10, т.-е. $10 \times 7 = 70$.

72. Какъ найти единичное отношеніе двухъ квадратныхъ мѣръ. **Чтобы найти единичное отношеніе двухъ квадратныхъ мѣръ, достаточно помножить само на себя отношеніе двухъ линейныхъ мѣръ тѣхъ же названій.** Напр., единичное отношеніе квадр. сажени къ квадр. аршину равно $3 \times 3 = 9$. Для объясненія этого вообразимъ два квадрата такихъ, чтобы у одного сторона была въ аршинъ, а у другого—въ сажень; тогда меньшій квадратъ будетъ квадратный аршинъ, а бо̀льшій—квадратная сажень (эти 2 квадрата изображены на чертежѣ въ уменьшонномъ видѣ). Если раздѣлимъ бо̀льшій квадратъ на 3 равныя полосы (какъ указано на чертежѣ), то каждая полоса, имѣя ширину въ 1 арш., а длину въ 3 аршина, будетъ содержать, очевидно, 3 малыхъ квадрата; значитъ, бо̀льшій квадратъ будетъ содержать ихъ 3 раза по 3 или 9.

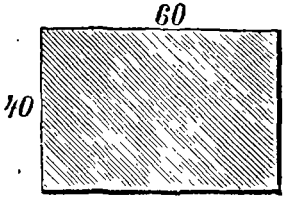


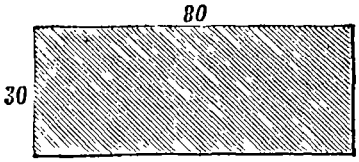
Такимъ образомъ составляется слѣдующая **таблица квадратныхъ мѣръ:**

квадр. миля=49 кв. верст. ($7 \times 7 = 49$)
» верста=250000 кв. саж. ($500 \times 500 = 250000$)
» сажень=9 кв. арш. ($3 \times 3 = 9$)
» » =49 кв. фут. ($7 \times 7 = 49$).
» аршинъ=256 кв. верш. ($16 \times 16 = 256$)

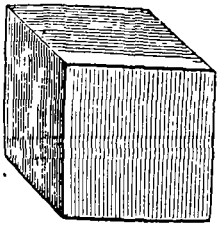
квадр. футъ=144 кв. дюйма (12×12=144)
» дюймъ=100 кв. линій (10×10=100)

73. Десятина. Для измѣренія поверхности полей употребляется десятина; это—площадь, содержащая въ себѣ 2400 кв. саженъ и, слѣд., равная площади прямоугольника, имѣющаго въ длину 60 саженъ, а въ ширину—40 саженъ, или же площади прямоугольника, имѣющаго въ длину 80 саженъ, а въ ширину 30 саженъ (умноживъ 60 на 40 или 80 на 30, получимъ одно и то же число 2400).





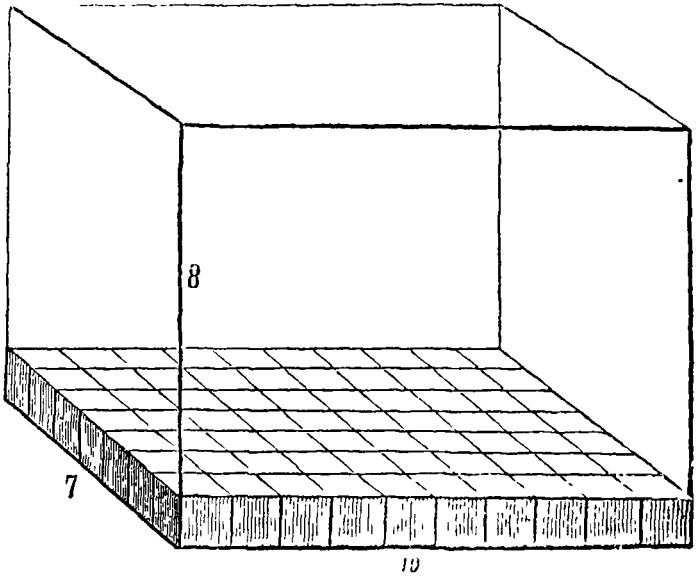
74. Мѣры объемовъ. Для измѣренія объемовъ употребляются мѣры, называемыя **кубическими**, такъ какъ онѣ имѣютъ форму куба. Кубомъ назыв. объемъ, ограниченный шестью одинаковыми квадратами. Каждый квадратъ называется стороною куба; линіи, по которымъ пересѣкаются двѣ смежныя стороны, называются ребрами куба. Всѣ ребра куба имѣютъ одинаковую длину. Кубъ, у котораго каждое ребро въ дюймъ, называется кубическимъ дюймомъ. Кубическимъ футомъ назыв. такой кубъ, у котораго каждое ребро равно линейному футу, и т. п.



75. Измѣреніе нѣкоторыхъ объемовъ. Пусть требуется узнать, сколько куб. аршинъ заключается въ объемѣ комнаты (см. черт. на слѣд. страницѣ). Для этого достаточно измѣрить линейнымъ аршиномъ длину, ширину и высоту комнаты и полученныя числа перемножить. Пусть,

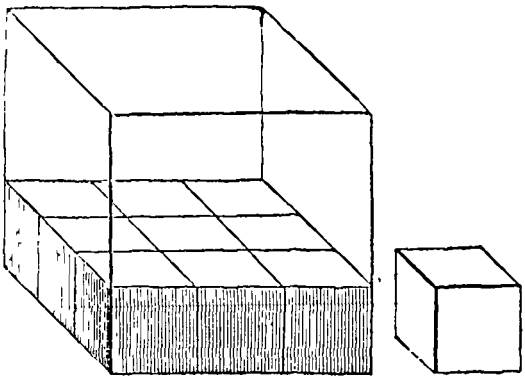
напр., длина комнаты будетъ 10 арш., ширина 7 арш., а высота 8 арш. Умноживъ 10 на 7, мы узнаемъ, что на полу комнаты помѣстится 70 квадр. аршинъ. Очевидно, что на каждомъ изъ этихъ 70 квадр. аршинъ можно поставить одинъ куб. аршинъ, а на всемъ полу ихъ установится 70. Тогда получится слой кубовъ въ одинъ аршинъ высоты (какъ изображено на чертежѣ); но комната имѣетъ въ высоту 8 арш.; слѣд., можно въ ней помѣстить одинъ на другой 8 слоевъ. Тогда всѣхъ куб. аршинъ окажется 70×8, т.-е. 560, или произведеніе трехъ чиселъ: 10×7×8.

Такъ же можно узнать вмѣстимость ящика, ямы съ отвѣсными стѣнками и т. п.



76. Какъ найти единичное отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ. Чтобы узнать единичное отношеніе двухъ кубическихъ мѣръ, достаточно повторить сомножителемъ 3 раза отношеніе линейныхъ мѣръ тѣхъ же названій.

Такъ, единичное отношеніе куб. сажени къ куб. аршину равно произведенію 3×3×3, т.-е. 27. Для объясненія этого представимъ себѣ такіе два куба, чтобы у одного ребро было въ аршинъ, а у другого—въ сажень (такіе два куба въ уменьшенномъ видѣ изображены у насъ на чертежѣ), тогда меньшій кубъ будетъ куб. аршинъ, а бо̀льшій—куб. сажень. Очевидно, что на днѣ бо̀льшаго куба установится 9 меньшихъ кубовъ (потому что дно бо̀льшаго куба содержитъ въ себѣ



9 квадр. арш.). Но высота бо̀льшаго куба равна сажени, а высота меньшаго куба равна аршину; поэтому на первый слой малыхъ кубовъ можно будетъ еще наложить 2 слоя и тогда выйдетъ 3 слоя по 9 кубовъ, т.-е. всего 27 куб.

Такимъ образомъ составляется слѣдующая **таблица кубическихъ мѣръ:**

куб. миля=343 куб. верст. (7×7×7)
» верста=125 000 000 куб. саж. (500×500×500)
» сажень=27 куб. арш. (3×3×3)
» » =343 куб. футамъ (7×7×7)
» аршинъ=4096 куб. вершк. (16×16×16)
» футъ=1728 куб. дюйм. (12×12×12)
» дюймъ=1000 куб. линіямъ (10×10×10)

77. Мѣры объемовъ жидкихъ тѣлъ. Основная мѣра—**ведро**, имѣющее объемъ, равный приблизительно 750 куб. дюймамъ; въ этомъ объемѣ помѣщается 30 фунтовъ чистой воды. Кромѣ того употребительны:

бочка=40 вед., ведро=10 штофамъ, штофъ=2 полуштофамъ, полуштофъ=5 чаркамъ.

Мѣры сыпучихъ тѣлъ (напр., ржи, пшеницы, овса и т. п.). Четверть=2 осминамъ=8 четверикамъ (или мѣрамъ), четверикъ=8 гарнцамъ. Вмѣстимость четверика немного менѣе куб. фута.

Замѣчаніе. Слова «четверикъ» и «четверть» пишутъ сокращенно такъ: «чк.» и «чт.».

78. Мѣры торговаго вѣса.

Пудъ	=40 фунтамъ.	Лотъ	= 3 золотникамъ.
Фунтъ	=32 лотамъ.	Золотникъ	=96 долямъ.

Фунтъ=96 золотн. (3×32).

Мѣры аптекарскаго вѣса. Аптекарскій фунтъ меньше торговаго фунта на одну восьмую часть; онъ равенъ 28 лотамъ (или 84 золотн.) торговаго вѣса.

Ап. фунтъ	=12 унціямъ.	Драхма	= 3 скрупуламъ.
Унція	= 8 драхмамъ.	Скрупулъ	=20 гранамъ.

79. Мѣры цѣны (деньги). Какъ мѣры цѣны употребляются или металлическія монеты, или кредитные билеты.

1) Россійская государственная монета чеканится: золотая, серебряная и мѣдная.

Золотая монета чеканится изъ сплава, содержащаго на 9 вѣсовыхъ частей чистаго золота 1 часть мѣди. Въ настоящее время обращаются слѣдующія золотыя монеты: въ 15 рублей (имперіалъ), въ 10 руб., въ 7 руб. 50 коп. (полуимперіалъ) и въ 5 руб.

Серебряная монета въ 1 рубль, въ 50 коп. и въ 25 коп. чеканится изъ сплава, содержащаго на 9 вѣсовыхъ частей серебра 1 вѣсовую часть мѣди, а серебряная монета въ 20 коп., 15 коп., 10 коп. и 5 коп. чеканится изъ сплава, содержащаго на 5 вѣсовыхъ частей серебра 5 частей мѣди.

Мѣдная монета чеканится въ 5 коп., 3 коп., 2 коп., 1 коп., въ полкопейки и въ четверть копейки.

2) Кредитные билеты употребляются: въ 500 руб., 100 руб., 50 руб., 25 руб., 10 руб., 5 руб., 3 руб. и 1 руб.

80. Мѣры времени. Есть двѣ главныя мѣры времени: сутки и годъ. **Сутки** представляютъ (приблизительно) то время, въ теченіе котораго земля совершаетъ полный оборотъ около своей оси; онѣ раздѣляются на 24 часа, считаемые отъ 1 до 12 и затѣмъ опять отъ 1 до 12. За начало сутокъ принимаютъ полночь, т.-е. 12 часовъ ночи.

Недѣля = 7 суткамъ	Часъ = 60 минутамъ.
Сутки = 24 часамъ.	Минута = 60 секундамъ.

Годъ представляетъ собою (приблизительно) то время, въ теченіе котораго земля совершаетъ полный оборотъ кругомъ солнца. У насъ принято считать каждые 3 года въ 365 дней, а четвертый—въ 366 дней. Годъ, содержащій въ себѣ 366 дней, называется **високоснымъ**, а года, содержащіе по 365 дней,—**простыми**. Къ четвертому году добавляютъ одинъ лишній день по слѣдующей причинѣ. Время обращенія земли кругомъ солнца содержитъ въ себѣ не ровно 365 сутокъ, а 365 сутокъ и 6 часовъ. Такимъ образомъ простой годъ короче истиннаго года на 6 часовъ, а 4 простыхъ года короче 4-хъ истинныхъ годовъ на 24 часа, т.-е. на однѣ сутки. Поэтому къ каждому четвертому году добавляютъ однѣ сутки (въ концѣ февраля). Случилось такъ, что годъ, отъ котораго мы ведемъ наше лѣтосчисленіе (т.-е. годъ

Рождества Христова), былъ високосный; поэтому слѣдующіе за тѣмъ високосные годы были: 4-й, 8-й, 12-й, 16-й, 20-й... вообще такіе годы, которыхъ числа дѣлятся на 4 безъ остатка; такъ 1912 годъ былъ високосный (1912 дѣлится на 4 безъ остатка), года же 1909-й, 1910-й, 1911-й были простые.

Годъ раздѣляется на 12 неравныхъ частей, называемыхъ **мѣсяцами.** Вотъ названія мѣсяцевъ по порядку: январь (31 день), февраль (28 или 29), мартъ (31), апрѣль (30) май (31), іюнь (30), іюль (31), августъ (31), сентябрь (30), октябрь (31), ноябрь (30) и декабрь (31).

Лѣтосчисленіе, по которому три года считаются въ 365 дней, а четвертый въ 366, было установлено римскимъ диктаторомъ Юліемъ Цезаремъ (въ 46 году до Р. Хр.) и потому наз. **юліанскимъ** или **старымъ стилемъ.** Оно принято у насъ, въ Россіи. Въ западной Европѣ принято иное счисленіе, называемое **григоріанскимъ** (по имени римскаго папы Григорія XIII, введшаго это счисленіе въ 1582 г.), или **новымъ стилемъ**; тамъ счетъ времени идетъ на 13 дней впереди нашего; такъ, когда мы считаемъ, положимъ, 1 декабря, въ западной Европѣ считаютъ 14 декабря.

81. Именованное число. То, что получается *послѣ измѣренія какой-нибудь величины*, называется **числомъ.** Число наз. **именованнымъ**, если при немъ оставлено названіе единицы, которою производилось измѣреніе; таково, напр., число 7 саженъ. Число назыв. **отвлеченнымъ**, если при немъ не поставлено названія единицы, напр., число 7. Именованное число наз. **простымъ**, если оно составлено изъ единицъ только одного названія, напр., 13 фунтовъ. Именованное число называется **составнымъ**, если оно составлено изъ единицъ разныхъ названій, напр., 13 фунтовъ 5 лотовъ 2 золотника.

Если составное именованное число составлено правильно, то всякое отдѣльное число въ немъ не можетъ составить ни одной мѣры высшаго разряда; напр., такое число

2 пуда 85 фунтовъ

неправильно составлено, потому что 85 фунтовъ составляютъ 2 пуда и 5 фунтовъ; въ правильномъ видѣ число это будетъ:

4 пуда 5 фунтовъ.

Раздробленіе и превращеніе.

82. Когда именованныя числа считаются равными и когда неравными. Если два именованныя числа выражаютъ собою двѣ одинаковыя величины, то они считаются равными между собою; напр., 2 саж. 1 арш.=7 арш., потому что длина въ 2 саж. 1 арш. одинакова съ длиной въ 7 арш.

Изъ двухъ неравныхъ именованныхъ чиселъ то считается бо̀льшимъ, которое выражаетъ бо̀льшую величину. Такъ, именованное число 1 ф. 40 зол. больше именованнаго числа 20 лот. 18 зол., такъ какъ вѣсъ, выражаемый первымъ числомъ, больше вѣса, выражаемаго вторымъ числомъ.

Очень часто приходится одно именованное число преобразовывать въ другое именованное число, равное ему. Такихъ преобразованій есть два: раздробленіе и превращеніе.

83. Раздробленіе. Раздробленіемъ именованнаго числа наз. преобразованіе его въ единицы какого-нибудь одного низшаго разряда.

Пусть, напр., требуется 5 пуд. 4 фунт. 15 лотъ раздробить въ золотники. Для этого узнаемъ сначала, сколько въ 5 пуд. заключается фунтовъ; къ полученному числу приложимъ 4 фунта; затѣмъ узнаемъ, сколько во всѣхъ фунтахъ заключается лотовъ; къ полученному числу приложимъ 15

лотовъ; наконецъ, узнаемъ, сколько во всѣхъ лотахъ заключается золотниковъ. Дѣйствія располагаютъ такъ:

```
   5  пуд. 4 фун. 15 лот.
 ×40
 200 .... фунтовъ въ 5 пудахъ.
  +4
 204 .... фунта въ 5 пуд. 4 фунт.
 ×32
 408
612
6528 ... лотовъ въ 5 пуд. 4 фун.
 +15
6543  .... лота въ 5 пуд. 4 фунт. 15 лот.
 × 3
19629 .... золотниковъ въ 5 пуд. 4 фун. 15 лот.
```

84. Превращеніе. Превращеніемъ именованнаго числа называется преобразованіе его въ единицы высшихъ разрядовъ.

Пусть напр требуется превратить 19629 золотниковъ въ мѣры высшихъ разрядовъ. Для этого узнаемъ сначала, сколько въ 19629 золотн. заключается лотовъ; потомъ, сколько въ полученномъ числѣ лотовъ заключается фунтовъ; потомъ—въ этихъ фунтахъ сколько пудовъ.

Дѣйствія располагаются такъ:

```
19629 | 3
18    | 6543 | 32
 16   | 64   | 204 | 40
 15   | 143  | 200 |  5 пуд.
  12  | 128  |  4 фун.
  12  | 15 лот.
   9
   9
   0
```

Слѣд.: 19629 зол.=5 пуд. 4 фун. 15 лот.

Дѣйствія надъ именованными числами.

85. Сложеніе. Для удобства подписываютъ слагаемыя одно подъ другимъ такъ, чтобы единицы одного названія стояли въ одномъ вертикальномъ столбцѣ. Начинаютъ сложеніе съ единицъ низшаго разряда; затѣмъ переходятъ къ сложенію единицъ слѣдующихъ высшихъ разрядовъ; полученныя суммы пишутъ подъ чертою. Напр.:

5	вер...	490	саж...	6	фут.	11	дюйм.
10	»	432	»	5	»	10	»
+8	»	460	»	4	»	9	»
2	»	379	»	3	»	11	»
3	»	446	»	2	»	10	»
28	вер.	2207	саж.	20	фут.	51	дюйм.
32	вер.	210	саж.	3	фут.	3	дюйм.

Послѣ сложенія получилось (подъ первою чертою) неправильно составленное именованное число; подъ нимъ проводятъ вторую черту и превращаютъ 51 дюймъ въ 4 ф. и 3 д.; 3 д. подписываютъ подъ второю чертою на мѣстѣ дюймовъ, а 4 ф. прикладываютъ къ 20 ф.; 24 ф. превращаютъ въ 3 саж. и 3 ф.; 3 ф. подписываютъ подъ второю чертою, а 3 саж. прикладываютъ къ 2207 саж. и т. д.

Можетъ случиться, что въ одномъ или нѣсколькихъ слагаемыхъ нѣтъ единицъ такихъ названій, какія есть въ остальныхъ слагаемыхъ; тогда на мѣстахъ недостающихъ единицъ пишутъ нули. Напр.:

+	300	вер...	0	саж...	0	арш...	8	вершк.
	250	» ..	80	» ..	2	» ..	12	»
			30	» ..	1	» ..	0	»
	550	вер...	111	саж...	1	арш...	4	вершк.

(Здѣсь превращенія сдѣланы въ умѣ).

86. Вычитаніе. Пусть требуется вычесть 2 версты 80 саж. 2 арш. 5 верш. изъ 9 вер. 50 саж. 2 арш. Подписы-

ваемъ въ извѣстномъ порядкѣ вычитаемое подъ уменьшаемымъ и проводимъ черту:

		549		4		16	
9	вер...	50	саж...	2	арш...	0	верш.
2	» ..	80	» ..	2	» ..	5	»
6	вер...	469	саж...	2	арш...	11	вершк.

Чтобы вычесть 5 вершковъ, беремъ отъ 2-хъ аршинъ 1 аршинъ (въ знакъ чего ставимъ точку надъ 2 арш.); взятый аршинъ раздробляемъ въ вершки; получаемъ 16 вершк.; пишемъ 16 надъ 0 вершк. Теперь вычитаемъ 5 вершк. изъ 16 вершк.; оставшіеся 11 вершк. пишемъ подъ чертою. 2 арш. изъ 1 арш. вычесть нельзя; беремъ отъ 50 саж. одну сажень (въ знакъ чего ставимъ точку надъ числомъ саженей); раздробляемъ взятую сажень въ аршины и прикладываемъ къ 1 арш. уменьшаемаго; получаемъ 4 аршина; пишемъ 4 надъ числомъ аршинъ. Теперь вычитаемъ 2 арш. изъ 4-хъ арш.; остатокъ 2 пишемъ подъ чертою; и т. д.

Вотъ еще примѣръ вычитанія, въ которомъ на мѣсто недостающихъ мѣръ поставлены нули:

		40		32		3	
5	пуд...	0	фунт.	0	лот.	0	зол.
		16	»	24	»	2	»
4	пуд...	23	фунт.	7	лот.	1	зол.

87. Умноженіе. Такъ какъ множитель означаетъ, сколько разъ множимое должно быть повторено слагаемымъ, то онъ есть всегда число отвлеченное; поэтому надо только разсмотрѣть **умноженіе именованнаго числа на отвлеченное.**

Пусть требуется умножить 64 чт. 7 чк. 3 гарн. на 6. Расположимъ дѣйствіе такъ:

64	чт....	7	чк....	3	гарн.
				×6	
384	чт...	42	чк....	18	гарн.
389	чт....	4	чк....	2	гарн.

Умноживъ на 6 отдѣльно гарнцы, четверики и четверти, получимъ неправильно составленное именованное число: 384 чт. 42 чк. 18 гарн. Проведя подъ этимъ числомъ вторую черту, превращаемъ (въ умѣ или на сторонѣ) 18 гарн. въ 2 чк. и 2 гарн.; 2 гарнца подписываемъ подъ второю чертою, а 2 чк. прикладываемъ къ 42 чк., отчего получаемъ 44 чк.; превращаемъ эти 44 чк. въ 5 чт. и 4 чк.; 4 чк. подписываемъ подъ второю чертою, а 5 чт. прикладываемъ къ 384 чт.; получимъ 389 чт.

Замѣчаніе. Когда множитель состоитъ изъ двухъ и болѣе цыфръ, то лучше производить на сторонѣ какъ умноженіе отдѣльныхъ чиселъ множимаго, такъ и превращенія.

88. Дѣленіе. Дѣленіе именованныхъ чиселъ, какъ и отвлеченныхъ, имѣетъ цѣлью: или узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ, или разложить число на равныя части. Въ первомъ случаѣ именованное число дѣлится на именованное, во второмъ—именованное число на отвлеченное.

1) Дѣленіе именованнаго числа на именованное. Пусть требуется узнать, сколько разъ 8 ф. 2 л. содержится въ 3 п. 18 фунт. Для этого раздробимъ дѣлимое и дѣлителя въ мѣры одного названія, а именно въ самыя мелкія, какія есть въ дѣлимомъ и въ дѣлителѣ, т.-е. въ лоты:

3 п.... 18 фун.	8 ф.... 2 л.	4416 | 258
×40	×32	258 | 17
120	256	1836
+18	+2	1806
138	258 лотовъ.	30
×32		
276		
414		
4416 лотовъ.		

и затѣмъ узнаемъ, сколько разъ 258 лот. содержатся въ 4416 лотахъ (17 разъ съ остаткомъ 30 лот.).

Замѣчаніе. При нахожденіи содержанія частное есть число отвлеченное, потому что оно означаетъ, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

2) Дѣленіе именованнаго числа на отвлеченное. Пусть требуется 18 верстъ 137 саж. 2 арш. раздѣлить на 14 равныхъ частей. Для этого раздѣлимъ 18 верстъ на 14 равныхъ частей; оставшіяся отъ дѣленія версты раздробимъ въ сажени; приложимъ 137 саженъ; раздѣлимъ получившееся число саженъ на 14 равныхъ частей; оставшіяся сажени раздробимъ въ аршины; приложимъ 2 арш.; раздѣлимъ получившееся число аршинъ на 14 равныхъ частей.

Дѣйствіе располагаемъ такъ:

```
 18  в... 137 саж... 2 арш.      | 14
 14                              ----------------
 ---                             1 в. 152 с. 2 ар. 1 вер.
  4  ...версты въ остаткѣ
× 500
 ----
 2000
+ 137
 ----
 2137...саженей.
  73
  ---
   37
   ---
    9...саж. въ остаткѣ.
  × 3
   ---
   27
  + 2
   ---
   29...аршинъ.
    1...арш. въ остаткѣ.
  ×16
   ---
   16...вершковъ.
    2...вершка въ остаткѣ.
```

Замѣчаніе. При дѣленіи именованнаго числа на равныя части дѣлитель есть число отвлеченное, потому что онъ означаетъ, на сколько равныхъ частей дѣлится дѣлимое, а частное—число именованное, потому что оно означаетъ часть дѣлимаго.

Задачи на вычисленіе времени.

89₁. Задача 1. Пароходъ вышелъ изъ гавани 27-го апрѣля въ 7 часовъ утра. Когда пароходъ возвратился въ эту гавань, если онъ пробылъ въ плаваніи 6 мѣс. 8 дней 21 часъ 40 мин.?

Первое рѣшеніе. Когда говорятъ, что отъ такого-то числа такого-то мѣсяца прошелъ 1 мѣсяцъ, то это значитъ, что наступило т а к о е ж е число слѣдующаго мѣсяца. Если, напр., отъ 27-го апрѣля (7 часовъ утра) прошелъ 1 мѣсяцъ, то это значитъ, что наступило 27-е мая (7 часовъ утра). Замѣтивъ это, будемъ рѣшать нашу задачу такъ:

Возвращеніе парохода произошло позже его отбытія на 6 мѣс. 8 дней 21 час. 40 м. Это значитъ, что послѣ его отбытія прошло 6 мѣс., потомъ 8 дней, затѣмъ 21 часъ 40 м., и тогда пароходъ возвратился. Когда отъ 27-го апрѣля (7-и часовъ утра) прошелъ 1 мѣсяцъ, то наступило 27-е мая (7 час. утра); когда прошелъ другой мѣсяцъ, наступило 27-е іюня (7 час. утра); продолжая такъ прикладывать по 1 мѣсяцу 6 разъ, получимъ 27-е октября (7 часовъ утра). Послѣ этого прошло еще 8 дней. Такъ какъ въ октябрѣ 31 день, то изъ этихъ 8 дней 4 дня придутся на октябрь, а остальные 4 дня на ноябрь. Значитъ, наступило 4-е ноября (7 часовъ утра). Потомъ прошелъ еще 21 часъ. Если бы прошло 24 часа, то было бы 5-е ноября 7 час. утра. Но 21 часъ менѣе 24-хъ на 3 часа; значитъ, будетъ 5-е ноября 4 часа утра; наконецъ, прошло еще 40 мин., и тогда пароходъ возвратился. Итакъ, возвращеніе парохода было 5-го ноября въ 4 часа 40 мин. утра того же года.

Такъ обыкновенно и рѣшаются подобныя задачи, если промежутокъ времени, протекшій отъ одного событія до другого, не великъ. Въ противномъ случаѣ удобнѣе будетъ:

Второе рѣшеніе. Узнаемъ, сколько времени прошло отъ начала года, т.-е. отъ 1-го января до 27 апрѣля 7-ми часовъ утра. Прошло 3 мѣсяца: январь, февраль и мартъ и 26 дней апрѣля; такъ какъ отбытіе произошло въ 7 часовъ утра, то, значитъ, прошло еще 7 часовъ слѣдующаго дня (27 апрѣля). Всего отъ начала года до отбытія парохода прошло 3 мѣс. 26 дней 7 час. Теперь приложимъ къ этому числу 6 мѣс. 8 дней 21 часъ 40 мин:.

+	3 мѣс....	26 дн....	7 час.	
	6 » ...	8 » ...	21 » ...	40 мин.
	9 мѣс....	34 дн....	28 час....	40 мин.
	10 мѣс....	4 дн....	4 час....	40 мин.

Превращая 35 дней въ мѣсяцы, мы должны задаться вопросомъ, во сколько дней считать мѣсяцъ. Для этого обратимъ вниманіе, что отъ начала года прошло 9 мѣсяцевъ; значитъ, изъ 35 дней долженъ составиться 10-й мѣсяцъ, а 10-й мѣсяцъ (октябрь) содержитъ 31 день; поэтому изъ 35 дней останется 4 дня, а 31 день составятъ 1 мѣсяцъ (который мы приложили къ 9 мѣсяцамъ).

Мы узнали, что отъ начала года до возвращенія парохода прошло 10 мѣс. 4 дня 4 часа 40 мин. Но это не окончательный отвѣтъ на вопросъ, потому что требовалось узнать, когда пароходъ возвратился, а не сколько времени прошло отъ начала года до возвращенія парохода. Поэтому, передѣлаемъ отвѣтъ такъ, чтобы онъ отвѣчалъ на вопросъ к о г д а? Если прошло 10 мѣсяцевъ, то начался 11-й мѣсяцъ, ноябрь. Если прошло 4 дня этого мѣсяца, то началось 5-е число ноября. Итакъ, пароходъ возвратился 5-го ноября въ 4 часа 40 минутъ утра.

89₂. Задача 2. Путешественникъ возвратился домой 5-го ноября въ 2 часа 10 минутъ пополудни. Когда онъ

отправился въ путешествіе, если его отсутствіе изъ дома продолжалось 4 мѣс. 25 дней 19 час.?

Первое рѣшеніе. Отсутствіе путешественника продолжалось 4 мѣс. 25 дней 19 часовъ. Это надо понимать такъ: послѣ отправленія въ путешествіе прошло 4 мѣс., потомъ 25 дней, затѣмъ еще 19 часовъ, и тогда путешественникъ возвратился, т.-е. тогда наступило 5-е ноября 2 часа 10 минутъ пополудни. Поэтому, чтобы опредѣлить время отбытія путешественника, мы отъ «5-го ноября 2 ч. 10 м. пополудни» отодвинемся назадъ сначала на 19 часовъ, потомъ еще на 25 дней и затѣмъ еще на 4 мѣсяца. Какое было время за 19 часовъ до «5-го ноября 2 ч. 10 м. пополудни»? За 24 часа было «4-е ноября 2 ч. 10 м. пополудни»; но 19 часовъ менѣе 24 час. на 5 час.; поэтому за 19 час. было «4-е ноября», но не «2 ч. 10 м. пополудни», а «7 ч. 10 м. пополудни». Отъ этого времени отодвинемся назадъ на 25 дней. За 4 дня до 4-го ноября было 31-е октября; за 21 день до 31 октября было 10-е октября (7 час. 10 мин. пополудни). Наконецъ, отодвинемся назадъ еще на 4 мѣсяца. Получимъ то же число и тотъ же часъ, но мѣсяцъ не октябрь, а іюнь. Значитъ, путешественникъ отправился въ путешествіе 10-го іюня въ 7 час. 10 мин. пополудни.

Когда промежутокъ времени, который надо отнять, выражается большими числами, то удобнѣе будетъ:

Второе рѣшеніе. Узнаемъ, сколько времени прошло отъ начала года до 5-го ноября 2 часа 10 мин. пополудни. Прошло 10 мѣсяцевъ (январь, февраль... октябрь), 4 дня (ноября) и нѣсколько часовъ и минутъ. Чтобы узнать, сколько часовъ и минутъ, примемъ во вниманіе, что за начало дня считается полночь. Отъ полуночи до полудня прошло 12 часовъ; но возвращеніе совершилось въ 2 часа 10 мин. пополудни; значитъ, отъ полуночи до возвращенія про-

шло 14 час. 10 мин. Всего отъ начала года да возвращенія путешественника прошло 10 мѣс. 4 дня 14 час. 10 мин.

Теперь вычтемъ изъ этого числа то время, которое путешественникъ пробылъ въ путешествіи:

	34	38	
10 мѣс....	4 дня...	14 час....	10 мин.
4 » ...	25 » ...	19 » ...	0 »
5 мѣс....	9 дн....	19 час....	10 мин.

При вычитаніи дней намъ пришлось занять одинъ мѣсяцъ и раздробить его въ дни. Въ такихъ случаяхъ надо сообразить, какой мѣсяцъ раздробляемъ въ дни, потому что не всѣ мѣсяцы содержатъ одинаковое число дней. Въ нашей задачѣ 3 дня уменьшаемаго принадлежатъ ноябрю (потому что 10 мѣс., начиная съ начала года, уже прошли); такъ какъ 25 дней вычитаемаго нельзя отнять отъ этихъ 3-хъ дней ноября, то приходится часть ихъ отнять отъ 10-го мѣсяца, т.-е. отъ октября; октябрь имѣетъ 31 день; прибавивъ 31 день къ 3 днямъ ноября, получимъ 34 дня.

Мы узнали, что отъ начала года до отправленія путешественника въ путь прошло 5 мѣс. 9 дней 19 часовъ 10 мин. Передѣлаемъ отвѣтъ такъ, чтобы онъ отвѣчалъ на вопросъ: «когда?» Если прошло 5 мѣс., то наступилъ 6-й мѣсяцъ, іюнь; если 9 дней этого мѣсяца прошли, то наступило 10-е іюня; притомъ 10-го іюня прошло уже 19 час. 10 мин.; значитъ, часы будутъ показывать 7 час. 10 мин. пополудни. Итакъ, путешественникъ отправился въ путь 10-го іюня въ 7 час. 10 м. пополудни того же года.

89₃. Задача 3. Императоръ Александръ I вступилъ на престолъ 12-го марта 1801-го года и скончался 19-го ноября 1825-го года. Сколько времени царствовалъ Императоръ Александръ I?

Первое рѣшеніе. Отъ 12-го марта 1801 года до 12-го марта 1825 года прошло 24 года. Отъ 12-го марта 1825 года до 12-го ноября того же года прошло 8 мѣсяцевъ; наконецъ, отъ 12 ноября до 19 ноября прошло 7 дней; значитъ Александръ I царствовалъ 24 года 8 мѣс. и 7 дней.

Второе рѣшеніе. До 12 марта 1801 года отъ Р. Х. прошло 1800 лѣтъ 2 мѣсяца и 11 дней, а до 19-го ноября 1825-го года прошло 1824 года 10 мѣс. 18 дней. Для рѣшенія задачи надо, очевидно, вычесть изъ послѣдняго числа первое:

1824	года...	10	мѣс....	18	дней.
1800	» ...	2	» ...	11	»
24	года...	8	мѣс....	7	дней.

Это—окончательный отвѣтъ на вопросъ задачи: «сколько времени царствовалъ Императоръ Александръ I»?.

Простѣйшія свойства дробей.

90. Доли единицы. Если какую-нибудь единицу, напр. аршинъ, раздѣлимъ на нѣсколько равныхъ частей, то каждая часть получаетъ обыкновенно названіе, указывающее, сколько такихъ частей содержится въ цѣлой единицѣ. Такъ, когда единица раздѣлена на 12 равныхъ частей, то каждая часть называется двѣнадцатою частью; раздѣливъ на 40 равныхъ частей, получимъ сороковыя части и т. п.

Вторая часть называется иначе половиной, третья часть—третью, четвертая часть—четвертью.

Части единицы, получаемыя отъ дѣленія ея на нѣсколько равныхъ частей, обыкновенно называются долями единицы.

91. Дробное число. Одна доля или собраніе нѣсколькихъ одинаковыхъ долей единицы называется дробью.

Напр., 1 десятая, 3 пятыхъ, 12 седьмыхъ суть дроби.

Цѣлое число вмѣстѣ съ дробью составляетъ **смѣшанное число**; напр., 3 цѣлыхъ 7 восьмыхъ. Дроби и смѣшанныя числа называются **дробными числами** въ отличіе отъ **цѣлыхъ** чиселъ, составленныхъ изъ цѣлыхъ единицъ.

92. Изображеніе дробныхъ чиселъ. Принято изображать дробь такъ: пишутъ число, показывающее, сколько долей содержится въ дроби; подъ нимъ проводятъ черту (горизонтальную или наклонную); подъ чертою ставятъ другое число, показывающее, на сколько равныхъ частей раздѣлена единица, отъ которой взята дробь. Напр., 3 пятыхъ изображаютъ такъ: $\frac{3}{5}$ или $^3/_5$.

Число, стоящее надъ чертою, называются **числителемъ**; оно показываетъ число долей, изъ которыхъ составлена дробь. Число, стоящее подъ чертою, называются **знаменателемъ**; оно означаетъ, на сколько равныхъ частей была раздѣлена единица. Оба эти числа вмѣстѣ назыв. **членами дроби.**

Смѣшанное число изображаютъ такъ: пишутъ цѣлое число и къ нему, съ правой стороны, приписываютъ дробь; напр.: $3\frac{2}{7}$ или $3^2/_7$ (три и двѣ седьмыхъ).

93. Полученіе дробныхъ чиселъ при измѣреніи. Положимъ, что мы, измѣряя нѣкоторую длину, нашли, что въ этой длинѣ вершокъ укладывается 7 разъ, при чемъ получается остатокъ, меньшій вершка. Чтобы измѣрить этотъ остатокъ, подыскиваемъ такую долю вершка, которая уложилась бы въ остаткѣ безъ новаго остатка. Пусть окажется, что восьмая доля вершка укладывается въ остаткѣ ровно 5 разъ. Тогда говоримъ, что измѣряемая длина равна $7^5/_8$ вершка. Подобно этому дробныя числа могутъ получиться при измѣреніи вѣса (напр., $2^1/_4$ зол.), времени (напр., $^7/_{10}$ секунды) и т. д.

Дробное число (какъ и цѣлое) наз. **именованнымъ**, если оно сопровождается названіемъ единицы, доли которой употреблялись при измѣреніи, напр., $^3/_4$ вершка; въ противномъ случаѣ число наз. **отвлеченнымъ**, напр., $^3/_4$.

94. Полученіе дробныхъ чиселъ при дѣленіи цѣлаго числа на равныя части. Пусть требуется раздѣлить 5 яблокъ между 8 учениками поровну. Мы можемъ выполнить это дѣленіе такъ: разрѣжемъ одно яблоко на 8 равныхъ частей и дадимъ каждому ученику по одной части; затѣмъ сдѣлаемъ то же самое со вторымъ яблокомъ, третьимъ и т. д. Тогда каждый ученикъ получитъ по 5 восьмыхъ яблока. Значитъ, восьмая часть 5 яблокъ равна $^5/_8$ яблока (и вообще восьмая часть 5-и какихъ-нибудь единицъ равна $^5/_8$ одной единицы).

Возьмемъ еще другой примѣръ: пусть требуется уменьшить 28 въ 5 разъ, т.-е. вмѣсто 28-и требуется взять одну пятую часть 28-и. Мы можемъ найти эту пятую часть такъ: пятая часть одной единицы есть $^1/_5$; пятая часть другой единицы есть тоже $^1/_5$; если такимъ образомъ возьмемъ по пятой части отъ каждой изъ 28 единицъ, то получимъ $^{28}/_5$.

Правило. Чтобы уменьшить цѣлое число въ нѣсколько разъ, достаточно взять это число числителемъ дроби, а знаменателемъ написать другое число, показывающее, во сколько разъ уменьшается цѣлое число.

95. Дробь правильная и неправильная. Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, наз. **правильною**; дробь, у которой числитель больше знаменателя или равенъ ему, наз. **неправильною**. Очевидно, правильная дробь меньше 1, а неправильная больше ея или равна ей; напр., $^7/_3<1$, $^8/_8=1$, $^9/_8>1$.

96. Обращеніе цѣлаго числа въ неправильную дробь. Всякое цѣлое число можно выразить въ какихъ угодно доляхъ единицы. Пусть, напр., требуется 8 ед. выразить въ двадцатыхъ доляхъ. Въ одной единицѣ заключаются 20 двадцатыхъ; слѣд., въ 8 единицахъ ихъ будетъ 20×8, т.-е. 160. Значитъ:

$$8 = \frac{20.8}{20} = \frac{160}{20}.$$

Примѣры: $25 = \frac{100}{4}$; $100 = \frac{1700}{17}$.

Замѣчаніе. Цѣлое число иногда бываетъ полезно изобразить въ видѣ такой дроби, у которой числитель есть это цѣлое число, а знаменателемъ служитъ 1. Такъ, вмѣсто цѣлаго числа 5 можно написать дробь $^5/_1$. Чтобы придать смыслъ такому выраженію, надо условиться, что раздѣлить какую-нибудь единицу на 1 равную часть значитъ оставить эту единицу безъ измѣненія.

97. Обращеніе смѣшаннаго числа въ неправильную дробь. Пусть требуется обратить смѣшанное число $8\,/_5$ въ неправильную дробь. Это значитъ: узнать, сколько пятыхъ долей заключается въ 8 цѣлыхъ единицахъ вмѣстѣ съ 3-мя пятыми долями той же единицы. Въ 8 единицахъ пятыхъ долей содержится 5×8, т.-е. 40; значитъ, въ 8 ед. и 3-хъ пятыхъ ихъ будетъ $40+3$, т.-е. 43. Итакъ: $8^3/_5 = {}^{43}/_5$.

Примѣры: $3\frac{7}{8} = \frac{31}{8}$; $10\frac{1}{4} = \frac{41}{4}$; $25\frac{2}{7} = \frac{177}{7}$.

Правило. Чтобы обратить смѣшанное число въ неправильную дробь, умножаютъ цѣлое число на знаменателя и къ произведенію прибавляютъ числителя; полученное отъ этого число берутъ числителемъ искомой дроби, а знаменателя оставляютъ прежняго.

98. Исключеніе изъ неправильной дроби цѣлаго числа. Пусть требуется изъ неправильной дроби $^{100}/_{8}$ **исключить цѣлое число**, т.-е. узнать, сколько въ этой дроби заключается цѣлыхъ единицъ и сколько еще есть восьмыхъ долей, не составляющихъ единицы. Такъ какъ единица заключаетъ въ себѣ 8 восьмыхъ, то въ 100 восьмыхъ содержится столько единицъ, сколько разъ 8 восьмыхъ содержатся въ 100 восьмыхъ. 8 восьмыхъ въ 100 восьмыхъ содержатся 12 разъ, при чемъ 4 восьмыхъ остаются. Значитъ, 100 восьмыхъ содержатъ 12 цѣлыхъ единицъ и еще 4 восьмыхъ доли. Итакъ:

$$^{100}/_{8} = 12^{4}/_{8}.$$

Примѣры: $\frac{59}{8} = 7\frac{3}{8}$; $\frac{314}{25} = 12\frac{14}{25}$; $\frac{85}{17} = 5$; $\frac{25}{25} = 1$.

Правило. Чтобы исключить изъ неправильной дроби цѣлое число, дѣлятъ числителя на знаменателя; цѣлое частное отъ этого дѣленія означаетъ, сколько единицъ въ дроби, а остатокъ—сколько долей единицы.

99. Измѣненіе величины дроби. Если числителя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ нѣсколько разъ, то дробь увеличится (или уменьшится) во столько же разъ.

Напр., увеличимъ числителя дроби $^{4}/_{10}$ въ три раза; получимъ $^{12}/_{10}$. Эта дробь больше прежней въ 3 раза, потому что число долей въ ней больше прежняго въ 3 раза, а доли остались тѣ же.

Если знаменателя дроби увеличимъ (или уменьшимъ) въ нѣсколько разъ, то дробь уменьшится (или увеличится) во столько же разъ.

Напр., увеличимъ знаменателя дроби $^{4}/_{10}$ въ 5 разъ; получимъ $^{4}/_{50}$. Эта дробь меньше прежней въ 5 разъ, потому что въ ней число долей осталось прежнее, но доли сдѣлались мельче прежнихъ въ 5 разъ.

Если числителя и знаменателя увеличимъ (или уменьшимъ) въ одинаковое число разъ, то величина дроби не измѣнится.

Напр., уменьшимъ числителя и знаменателя дроби $^4/_{10}$ въ 2 раза; получимъ $^2/_5$. Эта дробь равна прежней, потому что если мы уменьшимъ одного числителя въ 2 раза, то дробь уменьшится въ 2 раза; если же затѣмъ уменьшимъ и знаменателя въ 2 раза, то эта уменьшенная въ 2 раза дробь увеличится вдвое и, слѣд., сдѣлается равной прежней дроби.

100. Увеличеніе или уменьшеніе дроби въ нѣсколько разъ. Зная, какъ измѣняется дробь съ измѣненіемъ ея числителя и знаменателя, мы можемъ вывести слѣдующія **правила:**

1) Чтобы увеличить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно увеличить во столько же разъ ея числителя или уменьшить во столько же разъ ея знаменателя; напр.:

увеличить $^7/_{12}$ въ 5 разъ; получимъ $^{35}/_{12}$;
увеличить $^7/_{12}$ въ 6 разъ; » $^{42}/_{12}$ или $^7/_2$.

2) Чтобы уменьшить дробь въ нѣсколько разъ, достаточно уменьшить во столько же разъ ея числителя или увеличить во столько же разъ ея знаменателя; напр.:

уменьшить $^8/_9$ въ 7 разъ; получимъ $^8/_{63}$;
уменьшить $^8/_9$ въ 4 раза; » $^8/_{36}$ или $^2/_9$.

101. Сокращеніе дроби. Если числитель и знаменатель дроби дѣлятся безъ остатка на одно и то же число, то такую дробь можно **сократить** (упростить). Возьмемъ, напр., дробь $^{20}/_{35}$; у нея оба члена дѣлятся безъ остатка на 5 и послѣ дѣленія получается новая дробь $^4/_7$. Такъ какъ величина дроби не измѣняется, когда числитель и знаменатель ея уменьшены въ одинаковое число разъ, то $^4/_7 = ^{20}/_{35}$. Дробь $^4/_7$ проще, чѣмъ $^{20}/_{35}$, такъ какъ у первой дроби доли крупнѣе и число ихъ меньше, чѣмъ у второй.

Дробь, которую нельзя сократить, наз. **несократимой.** Такова, напр., дробь $^9/_{20}$.

102. Приведеніе дроби къ бо̀льшему знаменателю. Основываясь на томъ, что дробь не измѣнитъ своей величины, если оба ея члена увеличимъ въ одинаковое число разъ, мы всегда можемъ выразить данную дробь въ другихъ болѣе мелкихъ доляхъ. Если, напр., станемъ увеличивать числителя и знаменателя дроби $^3/_4$ въ 2 раза, въ 3 раза и т. д., то получимъ такой рядъ равныхъ дробей:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{15}{20}=\ldots\ldots$$

Подобно этому:

$$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}=\frac{3}{18}=\frac{4}{24}=\ldots.$$

$$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{6}{15}=\frac{8}{20}=\ldots.$$

103. Нахожденіе дроби даннаго числа. Задача. Поѣздъ проходитъ въ часъ 30 верстъ; узнать, сколько верстъ проходитъ онъ въ $^7/_8$ часа.

Очевидно, что въ $^7/_8$ часа поѣздъ пройдетъ не всѣ 30 верстъ, а только $^7/_8$ этого числа. Значитъ въ этой задачѣ требуется найти дробь даннаго числа, именно узнать, чему равны $^7/_8$ 30-и верстъ. Чтобы найти $^7/_8$ 30-и верстъ, сначала найдемъ $^1/_8$ этого числа, а потомъ увеличимъ ее въ 7 разъ. Найти $^1/_8$ 30-и—это все равно, что уменьшить 30 въ 8 разъ. Для этого, какъ мы видѣли, достаточно 30 взять числителемъ, а 8 знаменателемъ. Значитъ, $^1/_8$ отъ 30-ти верстъ составляетъ $^{30}/_8$ версты. Теперь увеличимъ эту дробь въ 7 разъ; для этого достаточно увеличить въ 7 разъ числителя дроби; отчего получимъ $^{210}/_8 = 26^2/_8 = 26^1/_4$. Итакъ, $^7/_8$ 30-и верстъ составляютъ $26^1/_4$ вер.; значитъ, въ $^7/_8$ часа поѣздъ проходитъ $26^1/_4$ верстъ.

Пусть, еще требуется найти $^5/_6$ числа $2^3/_4$ (напр., $^5/_6$ отъ $2^3/_4$ рубля). Для этого предварительно обратимъ $2^3/_4$ въ неправильную дробь (получимъ $^{11}/_4$), потомъ уменьшимъ эту дробь въ 6 разъ, чтобы найти $^1/_6$ ея, а затѣмъ увеличимъ въ 5 разъ, чтобы найти $^5/_6$. Для ясности выразимъ это строчками:

$$\text{такъ какъ } \frac{1}{6} \text{ числа } \frac{11}{4} \text{ составляетъ } \frac{11}{24},$$

$$\text{то } \frac{5}{6} \text{ числа } \frac{11}{4} \text{ составляютъ } \frac{55}{24} = 2\frac{7}{24}.$$

104. Нахожденіе числа по данной его дроби. Задача. Въ $^7/_8$ часа поѣздъ проходитъ $26^1/_4$ верстъ. Сколько верстъ пройдетъ поѣздъ въ часъ?

Въ $^7/_8$ часа поѣздъ, очевидно, проходитъ $^7/_8$ того числа верстъ, которое онъ проходитъ въ часъ. Значитъ, въ этой задачѣ намъ дана дробь неизвѣстнаго числа, именно указано, что $^7/_8$ неизвѣстнаго числа составляютъ $26^1/_4$; требуется найти это неизвѣстное число. Ходъ рѣшенія этой задачи для ясности выразимъ строчками:

Такъ какъ $^7/_8$ неизв. числа составляютъ $26^1/_4$, т.-е. $^{105}/_4$,
а $^1/_8$ меньше $^7/_8$ въ 7 разъ,
то $^1/_8$ неизв. числа въ 7 разъ менѣе $^{105}/_4$;
значитъ, $^1/_8$ неизв. числа составляетъ $^{105}/_{28}$.

Такъ какъ полное неизвѣстное число въ 8 разъ болѣе $^1/_8$ его части, то

$$\text{неизв. число} = \frac{105 \,.\, 8}{28} = \frac{840}{28} = 30.$$

Итакъ, 30 есть такое число, котораго $^7/_8$ составляютъ $26^1/_4$; значитъ, поѣздъ проходитъ въ часъ 30 верстъ.

Признаки дѣлимости.

105. Предварительныя замѣчанія. Когда одно цѣлое число дѣлится на другое цѣлое число безъ

остатка, то для сокращенія рѣчи просто говорятъ, что первое число **дѣлится** на второе (значитъ, слова: «безъ остатка» подразумѣваются). Такъ, говорятъ: 15 дѣлится на 3, но не дѣлится на 4.

Чтобы сократить данную дробь, надо, какъ мы говорили, раздѣлить ея числителя и знаменателя на какое-нибудь одно и то же цѣлое число, если такое дѣленіе возможно безъ остатка. Для этого полезно знать такъ называемые **признаки дѣлимости**, по которымъ можно быстро опредѣлить, на какія числа дѣлится данное намъ число. Эти признаки мы теперь и разсмотримъ.

106. Двѣ истины о дѣлимости чиселъ. Выводъ признаковъ дѣлимости основанъ на слѣдующихъ двухъ истинахъ:

1) **Если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма дѣлится на это число.**

Возьмемъ, напр., сумму: 15+20+40, въ которой каждое слагаемое дѣлится на 5. Это значитъ, что каждое слагаемое можетъ быть составлено изъ пятерокъ; въ такомъ случаѣ и сумма этихъ слагаемыхъ можетъ быть составлена изъ пятерокъ. Дѣйствительно, взявъ 3 пятерки, получимъ 15; приложивъ къ нимъ 4 пятерки, получимъ 15+20; приложивъ еще 8 пятерокъ, получимъ 15+20+40. Значитъ, сумма эта, какъ составленная изъ пятерокъ, дѣлится на 5.

2) **Если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма ихъ не раздѣлится на это число.**

Возьмемъ, напр., 2 числа: 20 и 17, изъ которыхъ первое дѣлится, а второе не дѣлится на 5. Это значитъ, что 20 можно составить изъ пятерокъ, а 17 нельзя. Въ такомъ случаѣ очевидно, что сумму 20+17 нельзя составить изъ пятерокъ, и, значитъ, эта сумма не дѣлится на 5.

107. Признакъ дѣлимости на 2. Замѣтимъ, что числа, дѣлящіяся на 2, наз. **четными**, а не дѣлящіяся на 2—**нечетными**.

Десятокъ дѣлится на 2; поэтому сумма какого угодно числа десятковъ дѣлится на 2. Всякое число, оканчивающееся нулемъ, есть сумма нѣсколькихъ десятковъ (напр., 430 есть сумма 43 десятковъ). Значитъ, всякое число, оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 2.

Возьмемъ теперь два числа, изъ которыхъ одно оканчивается нечетною, а другое четною цыфрою, напр., 327 и 328. Ихъ можно представить въ видѣ суммъ такъ:

$$327=320+7; \qquad 328=320+8.$$

Число 320 оканчивается нулемъ и потому дѣлится на 2; 7 не дѣлится на 2; поэтому 327 не раздѣлится на 2 (если одно изъ двухъ слагаемыхъ дѣлится, а другое не дѣлится на какое-нибудь число, то сумма не раздѣлится на это число). Слагаемое 8 дѣлится на 2; поэтому 328 раздѣлится на 2 (если каждое слагаемое дѣлится на одно и то же число, то и сумма раздѣлится на это число). Такимъ образомъ:

на 2 дѣлится только такое число, которое оканчивается нулемъ или четною цыфрою.

108. Признакъ дѣлимости на 4. Сотня дѣлится на 4 (въ частномъ получается 25); поэтому сумма какого угодно числа сотенъ дѣлится на 4. Всякое число, оканчивающееся двумя нулями, есть сумма нѣсколькихъ сотенъ (напр., число 1300 есть сумма 13 сотенъ); значитъ, всякое число, оканчивающееся двумя нулями, дѣлится на 4.

Возьмемъ теперь два числа такихъ, чтобы у одного сумма десятковъ съ единицами не дѣлилась на 4, а другого дѣлилась, напр., 2350 и 2348. Ихъ можно представить въ видѣ суммъ такъ:

$$2350=2300+50; \qquad 2348=2300+48.$$

Число 2300 оканчивается двумя нулями и потому дѣлится на 4; 50 не дѣлится на 4; поэтому 2350 не раздѣлится на 4 (если одно слагаемое дѣлится, а другое не дѣлится, то...); 48 дѣлится на 4; поэтому 2348 раздѣлится на 4 (если каждое слагаемое дѣлится, то...). Такимъ образомъ:

на 4 дѣлится только такое число, которое оканчивается двумя нулями или у котораго двѣ послѣднія цыфры выражаютъ число, дѣлящееся на 4.

109. Признакъ дѣлимости на 8. Тысяча дѣлится на 8 (въ частномъ получается 125); поэтому сумма какого угодно числа тысячъ дѣлится на 8. Значитъ, всякое число, оканчивающееся тремя нулями, дѣлится на 8.

Возьмемъ теперь два числа такихъ, чтобы у одного сумма сотенъ, десятковъ и единицъ не дѣлилась на 8, а у другого дѣлилась, напр., 73**150** и 73**152**. Ихъ можно представить въ видѣ суммъ такъ:

$$73150=73000+\mathbf{150};\ 73152=73000+\mathbf{152}.$$

150 не дѣлится, а 152 дѣлится на 8. Изъ этого заключаемъ, что 73150 не дѣлится, а 73152 дѣлится на 8. Слѣд.:

на 8 дѣлится только такое число, которое оканчивается тремя нулями или у котораго три послѣднія цыфры выражаютъ число, дѣлящееся на 8.

110. Признаки дѣлимости на 5 и на 10. Десятокъ дѣлится на 5 и на 10; поэтому число, составленное изъ десятковъ, т.-е. оканчивающееся нулемъ, дѣлится на 5 и на 10. Если число не оканчивается нулемъ, то оно не дѣлится на 10, а на 5 оно раздѣлится только тогда, когда послѣдняя его цыфра будетъ 5, потому что изъ всѣхъ однозначныхъ чиселъ только 5 дѣлится на 5. Итакъ:

на 5 дѣлится только такое число, которое оканчивается нулемъ или цыфрою 5; таковы, напр., числа: 60, 80, 95, 115 и т. п.

на 10 дѣлится только такое число, которое оканчивается нулемъ; таковы, напр., числа: 90, 120, 560, 3400 и т. п.

111. Признаки дѣлимости на 3 и на 9. Предварительно замѣтимъ, что и на 3, и на 9 дѣлится всякое число, написанное посредствомъ только цыфры 9, т.-е. 9, 99, 999 и т. п. Дѣйствительно:

999 : 3=333; 9999 : 3=3333; и т. д.

999 : 9=111; 9999 : 9=1111; и т. д.

Замѣтивъ это, возьмемъ какое-нибудь число, наприм., 2457, и разложимъ его на отдѣльныя единицы различныхъ разрядовъ (кромѣ простыхъ единицъ, которыя оставимъ не разложенными):

$$\begin{aligned} 2457 = & 1000+1000 \\ & +100+100+100+100 \\ & +10+10+10+10+10 \\ & +7 \end{aligned}$$

Разложимъ каждую тысячу на 999 и 1, каждую сотню—на 99 и 1, каждой десятокъ на 9 и 1. Тогда вмѣсто 2 тысячъ получимъ 2 раза по 999 и 2 единицы; вмѣсто 4 сотенъ получимъ 4 раза по 99 и 4 единицы; вмѣсто 5 дес.—5 разъ по 9 и еще 5 ед. Слѣд.:

$$\begin{aligned} 2457 = & 999+999 && +2 \\ & 99+99+99+99 && +4 \\ & 9+9+9+9+9 && +5 \\ & && +7 \end{aligned}$$

Слагаемыя 99, 99 и 9 дѣлятся на 3 и на 9; значитъ, дѣлимость даннаго числа на 3 или на 9 зависитъ только отъ суммы 2+4+5+7; если эта сумма дѣлится на 3, или на 9, то и данное число раздѣлится на эти числа, и наоборотъ. Поэтому можемъ сказать:

на 3 дѣлится только такое число, у котораго сумма цыфръ дѣлится на 3;

на 9 дѣлится только такое число, у котораго сумма цыфръ дѣлится на 9.

Въ нашемъ примѣрѣ сумма цыфръ равна 18; 18 дѣлится на 3 и на 9; значитъ, 2457 тоже дѣлится и на 3, и на 9. Дѣйствительно: 2457 : 3=819; 2457 : 9=273.

112. Признакъ дѣлимости на 6. Если какое-нибудь число дѣлится на 6, то его можно разложить на шестерки, т.-е. представить его въ видѣ суммы:

$$6+6+6+6+\ldots\ldots$$

Но каждую шестерку можно разложить и на двойки (2+2+2), и на тройки (3+3); значитъ, и все такое число можно разложить и на двойки, и на тройки; слѣд., оно дѣлится и на 2, и на 3. Итакъ:

чтобы число дѣлилось на 6, необходимо, чтобы оно дѣлилось на 2 и на 3.

Изложенное разсужденіе еще не убѣждаетъ насъ, чтобы этотъ признакъ дѣлимости на 6 былъ достаточенъ; вѣдь точно такъ же мы можемъ утверждать, что если число дѣлится на 24, то оно разлагается и на шестерки, и на четверки и, значитъ, дѣлится и на 6, и на 4; но было бы ошибочно утверждать обратное, т.-е. что если число дѣлится на 6 и на 4, то оно раздѣлится на 24; напр., 36 дѣлится и на 4, и на 6, но не дѣлится на 24.

Чтобы убѣдиться въ достаточности указаннаго признака дѣлимости на 6, можно разсуждать такъ:

Если какое-нибудь число (напр. 534) дѣлится заразъ и на 2, и на 3, то тогда и половина его есть число цѣлое, и третья часть его есть цѣлое число. Но въ такомъ случаѣ и шестая часть этого числа должна быть также цѣлымъ числомъ, потому что шестую часть числа мы можемъ получить, отнявъ изъ половины этого числа одну треть его, какъ видно изъ равенства:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$

Если же шестая часть какого-нибудь числа есть цѣлое число, то, значитъ, это число дѣлится на 6 безъ остатка.

Такимъ образомъ, чтобы число дѣлилось на 6, **необходимо и достаточно,** чтобы оно дѣлилось на 2 и на 3; или, другими словами, **на 6 дѣлится только такое число, которое дѣлится на 2 и на 3.** Напр., число 13854 дѣлится на 6, такъ какъ оно дѣлится на 2 (оканчивается четною цыфрою), и въ то же время дѣлится на 3 (сумма его цыфръ дѣлится на 3). Дѣйствительно: 13854 : 6=2309.

Разложеніе на множителей.

113. Число, которое дѣлится только на единицу и на само себя, наз. простымъ; таково, напр., число 7, которое дѣлится только на 1 и на 7.

Есть 26 простыхъ чиселъ, меньшихъ 100, а именно:
1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Число, которое дѣлится не только на единицу и на само себя, но еще и на другія числа, наз. составнымъ; таково, напр., число 12, которое дѣлится не только на 1 и на 12, но еще и на 2, и на 3, и на 4, и на 6.

Всякое составное число можно разложить на простыхъ множителей, т.-е. представить его въ видѣ произведенія простыхъ чиселъ. Напр., разложимъ на простыхъ множителей составное число 420. Для этого находимъ, по признакамъ дѣлимости, наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дѣлится 420. Такое число есть 2; раздѣлимъ 420 на 2:

420 : 2=210; значитъ: 420=210 . 2.

Теперь находимъ наименьшее простое число (кромѣ 1), на которое дѣлится 210. Такое число есть 2:

210 : 2=105; значитъ: 210=105 . 2.

Замѣнимъ въ равенствѣ 420=210 . 2 число 210 равнымъ ему произведеніемъ; тогда получимъ:

420=105 . 2 . 2.

Наименьшее простое число, на которое дѣлится 105, есть 3:

$$105 : 3 = 35; \text{ значитъ: } 105 = 35 \,.\, 3.$$

Замѣнимъ въ равенствѣ $420 = 105 \,.\, 2 \,.\, 2$ число 105 равнымъ ему произведеніемъ:

$$420 = 35 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2.$$

Наконецъ, подставимъ въ послѣднее равенство на мѣсто 35 равное ему произведеніе $5 \,.\, 7$:

$$420 = 5 \,.\, 7 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 2$$

Теперь всѣ множители оказываются простыми.

Такое разложеніе обыкновенно располагаютъ такъ:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

т.-е. пишутъ данное число и проводятъ справа отъ него вертикальную черту. Справа отъ черты пишутъ наименьшее простое число, на которое дѣлится данное составное, и дѣлятъ на него данное число. Цыфры частнаго подписываютъ подъ даннымъ числомъ. Съ этимъ частнымъ поступаютъ такъ же, какъ съ даннымъ числомъ. Дѣйствія продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока въ частномъ не получится 1. Тогда всѣ числа, стоящія направо отъ черты, будутъ простыми множителями даннаго составного числа.

Такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перемѣны мѣстъ множителей, то можно писать ихъ въ какомъ угодно порядкѣ; обыкновенно пишутъ ихъ отъ меньшихъ къ бо̀льшимъ, т.-е. такъ: $420 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7$.

Замѣчанія. 1) Когда данное число не велико, то множителей его прямо выписываютъ въ строку. Напр.:

$$72 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 3$$

При этомъ говорятъ такъ: 72 равно 2, умноженнымъ на 36 (2 пишемъ, а 36 запоминаемъ); 36 равно 2, умноженнымъ на 18 (2 пишемъ, а 18 запоминаемъ); 18 равно 2, умноженнымъ на 9; и т. д.

2) Если данное число легко разлагается на какихъ-нибудь составныхъ множителей, то всего лучше разложить его сначала на этихъ множителей, а потомъ каждаго изъ нихъ разложить на простыхъ. Напримѣръ:
14000=1000 . 14=10 . 10 . 10 . 14=2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 7.

Нахожденіе дѣлителей.

114. Дѣлителемъ даннаго числа называется всякое число, на которое данное дѣлится безъ остатка. Такъ, дѣлители 6-ти будутъ: 1, 2, 3 и 6, потому что 6 дѣлится и на 1, и на 2, и на 3, и на 6.

Пусть требуется найти всѣхъ дѣлителей числа 420. Для этого разложимъ это число на простыхъ множителей:

420=2 . 2 . 3 . 5 . 7.

На каждаго изъ этихъ множителей 420 дѣлится безъ остатка. Напр., оно дѣлится на 5. Дѣйствительно, такъ какъ произведеніе не измѣняется отъ перестановки сомножителей, то мы можемъ поставить въ началѣ любого изъ нихъ. Напишемъ впереди множителя 5:

420=**5** . 2 . 2 . 3 . 7.

Это равенство показываетъ, что 420 можно составить изъ пятерокъ (потому что 5 повторяется 2 раза, полученное число повторяется еще 2 раза, и т. д.). Если же 420 можно составить повтореніемъ 5-и, то 5 въ 420 содержится безъ остатка и, значитъ, 420 дѣлится на 5.

Подобнымъ образомъ можемъ убѣдиться, что 420 дѣлится и на произведеніе двухъ, трехъ и болѣе своихъ множителей. Напр., 420 дѣлится на произведеніе 3 . 7, т.-е. на 21, такъ какъ, переставивъ множителей 3 и 7 къ началу ряда, мы получимъ:

420=**3** . **7** . 2 . 2 . 5=**21** . 2 . 2 . 5

Изъ этого равенства заключаемъ, что 420 можно составить повтореніемъ числа 21; слѣдовательно, 420 дѣлится на 21.

Правило. Чтобы найти дѣлителей составного числа, разлагаютъ его на простыхъ множителей; эти множители будутъ и простыми дѣлителями даннаго числа; чтобы получить составныхъ дѣлителей, перемножаютъ простыхъ множителей по два, по три, по четыре и т. д.

Общій наибольшій дѣлитель.

115. Общимъ наибольшимъ дѣлителемъ нѣсколькихъ данныхъ чиселъ называется наибольшее число, на которое дѣлятся всѣ эти данныя числа. Напр., общій наибольшій дѣлитель трехъ чиселъ: 18, 30 и 24 есть 6, потому что всѣ эти числа дѣлятся на 6, но не дѣлятся ни на какое число, бо̀льшее 6-и.

Нахожденіе общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ. основывается на слѣдующихъ двухъ истинахъ:

1) **Если бо̀льшее изъ двухъ данныхъ чиселъ дѣлится на меньшее, то это меньшее и есть общій наибольшій дѣлитель.**

Напр., возьмемъ два числа: 54 и 18, изъ которыхъ бо̀льшее дѣлится на меньшее. Такъ какъ 54 дѣлится на 18 и 18 дѣлится на 18, то 18 есть общій дѣлитель чиселъ 54 и 18. Этотъ дѣлитель есть вмѣстѣ съ тѣмъ наибольшій, потому что 18 не можетъ дѣлиться ни на какое число, бо̀льшее 18.

2) **Если бо̀льшее изъ двухъ данныхъ чиселъ не дѣлится на меньшее, то ихъ общій наибольшій дѣлитель равенъ общему наибольшему дѣлителю двухъ другихъ чиселъ, а именно: меньшаго изъ данныхъ чиселъ и остатка отъ дѣленія бо̀льшаго на меньшее.**

Пусть, напр., даны два числа: 85 и 30. Раздѣливъ первое на второе, получимъ: 85 : 30=2 (ост. 25). Общій наибольшій

дѣлитель чиселъ 85 и 30 долженъ быть также и общимъ наибольшимъ дѣлителемъ чиселъ 30 и 25 (а именно, это есть число 5).

Объясненіе. Дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное, сложенному съ остаткомъ; поэтому:

$$85 = 30 \,.\, 2 + 25.$$

Значитъ, 85 есть сумма двухъ слагаемыхъ: одно слагаемое равно произведенію 30 . 2, а другое 25. Замѣтивъ теперь, что если 30 дѣлится на какое-нибудь число, то на это число должно раздѣлиться также и произведеніе 30 . 2, мы изъ написаннаго равенства можемъ вывести слѣдующія два заключенія:

1) такъ какъ всѣ общіе дѣлители чиселъ 85 и 30 дѣлятъ сумму (85) и одно слагаемое (30 . 2), то они должны дѣлить и другое слагаемое (25) (если бы другое слагаемое не раздѣлилось, то не раздѣлилась бы и сумма).

2) такъ какъ всѣ общіе дѣлители чиселъ 30 и 25 дѣлятъ каждое слагаемое (30 . 2 и 25), то они должны дѣлить и сумму (85).

Значитъ, двѣ пары чиселъ: (85 и 30) и (30 и 25) имѣютъ однихъ и тѣхъ же общихъ дѣлителей; слѣд., у нихъ долженъ быть *одинъ и тотъ же наибольшій* общій дѣлитель.

Посмотримъ, какъ можно пользоваться этими двумя истинами для нахожденія общаго наиб. дѣлителя **двухъ чиселъ.** Пусть требуется найти общаго наибольшаго дѣлителя чиселъ 391 и 299. Раздѣлимъ 391 на 299, чтобы узнать, не будетъ ли 299 общимъ наиб. дѣлителемъ (на основаніи истины 1-ой). Видимъ, что 391 не дѣлится на 299, поэтому 299 не есть общій наиб. дѣлитель. На основаніи истины 2-й заключаемъ, что общій наиб. дѣлитель чиселъ 391 и 299 есть также общій наиб. дѣлитель 299 и 92. Станемъ искать общаго наиб. дѣлителя этихъ чиселъ. Для этого дѣлимъ 299 на 92, чтобы узнать, не будетъ ли 92 общимъ наиб. дѣлителемъ (истина 1-я). Видимъ, что 92 не есть общій наиб. дѣлитель. Теперь опять, на основаніи истины

```
     391 | 299
     299   1
299 | 92
276   3
92 23
92  4
 0
```

2-ой, заключаемъ, что общій наиб. дѣлитель 299 и 92 есть также общій наиб. дѣлитель 92 и 23. Станемъ искать этого дѣлителя. Для этого дѣлимъ 92 на 23. Видимъ, что 23 есть общій наиб. дѣлитель для 92 и 23, слѣд. и для 299 и 92, слѣд. и для 391 и 299.

Правило. Чтобы найти общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ, дѣлятъ бо̀льшее изъ нихъ на меньшее, потомъ меньшее на первый остатокъ, первый остатокъ на второй, второй на третій и т. д. до тѣхъ поръ, пока не получится въ остаткѣ 0; тогда послѣдній дѣлитель будетъ общимъ наибольшимъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ.

Замѣчанія. 1) Описанный способъ (называемый способомъ **послѣдовательнаго дѣленія**) можно примѣнить и къ нахожденію общаго наиб. дѣлителя 3-хъ, 4-хъ и болѣе данныхъ чиселъ. Тогда поступаютъ такъ: находятъ сначала общаго наиб. дѣлителя какихъ-нибудь двухъ изъ данныхъ чиселъ; затѣмъ находятъ общаго наиб. дѣлителя найденнаго дѣлителя и какого-нибудь третьяго изъ данныхъ чиселъ; далѣе—общаго наиб. дѣлителя послѣдняго найденнаго дѣлителя и четвертаго даннаго числа, и т. д. Пусть, напр., требуется найти общаго наиб. дѣлителя трехъ чиселъ: 78, 130 и 195. Находимъ сначала общаго наиб. дѣлителя двухъ чиселъ: 78 и 130. Это будетъ 26. Теперь находимъ общаго наиб. дѣлителя 26 и 195-и. Это будетъ 13. Число 13 и есть общій наиб. дѣлитель трехъ данныхъ чиселъ.

2) Если данныя числа разложены на простыхъ множителей, то общій наиб. дѣлитель ихъ всего проще получается **перемноженіемъ тѣхъ простыхъ множителей, которые общи всѣмъ даннымъ числамъ.** Пусть, напр., числа 180 и 126 разложены на простыхъ множителей:

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \qquad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Въ числѣ этихъ множителей есть общіе, а именно 2, 3 и 3. Каждый изъ нихъ, какъ мы видѣли, служитъ дѣлителемъ данныхъ чиселъ. Чтобы получить составныхъ общихъ дѣлителей, достаточно перемножить общихъ множителей по два и по три. Значитъ, наибольшій общій дѣлитель получится перемноженіемъ всѣхъ ихъ: 2 . 3 . 3=18.

116. Сокращеніе дроби (см. § 101). Руководствуясь признаками дѣлимости, опредѣляютъ, не дѣлятся ли числитель и знаменатель данной дроби на какого-нибудь общаго дѣлителя; если такой дѣлитель существуетъ, то на него дробь сокращаютъ; полученную послѣ сокращенія дробь, если можно, сокращаютъ такимъ же путемъ снова; продолжаютъ такое послѣдовательное сокращеніе до тѣхъ поръ, пока не получится дробь несократимая. Напр.:

$$\frac{840}{3600}\overset{10}{=}\frac{84}{360}\overset{4}{=}\frac{21}{90}\overset{3}{=}\frac{7}{30}.$$

Для памяти надписываютъ надъ дробью то число, на которое сокращаютъ.

Если же по признакамъ дѣлимости затруднительно опредѣлить, сократима ли дробь, или нѣтъ, то тогда отыскиваютъ (способомъ послѣдовательнаго дѣленія) общаго наибольшаго дѣлителя числителя и знаменателя дроби, а затѣмъ на него сокращаютъ дробь. Напр., пусть требуется сократить дробь $^{299}/_{391}$. Находимъ общаго наиб. дѣлителя чиселъ 299 и 391 (онъ равенъ 23, см. стр. 84) и на него сокращаемъ:

$$\frac{299}{391}=\frac{299:23}{391:23}=\frac{13}{17}.$$

Въ этомъ случаѣ послѣ сокращенія получается дробь несократимая, потому что общій наибольшій дѣлитель содержитъ въ себѣ всѣхъ общихъ дѣлителей.

Наименьшее кратное число.

117. **Кратнымъ** (числомъ) **даннаго числа наз. всякое число, которое дѣлится на данное безъ остатка.** Такъ, для числа 9 кратными будутъ: 9, 18, 27, 36 и многія другія.

Наименьшимъ кратнымъ (числомъ) **нѣсколькихъ данныхъ чиселъ называется самое меньшее число, которое дѣлится на каждое изъ этихъ чиселъ.**

Такъ, для трехъ чиселъ: 6, 15 и 20 наименьшее кратное есть 60, такъ какъ 60 дѣлится на эти числа, а никакое число, меньшее 60, не дѣлится на нихъ.

Пусть требуется найти наименьшее кратное чиселъ: 100, 40 и 35. Для этого разложимъ каждое изъ нихъ на простыхъ множителей.

$$100=2\,.\,2\,.\,5\,.\,5;\quad 40=2\,.\,2\,.\,2\,.\,5;\quad 35=5\,.\,7.$$

Чтобы какое-нибудь число дѣлилось на 100, на 40 и на 35, необходимо, чтобы въ него входили всѣ простые множители этихъ дѣлителей. Выпишемъ всѣхъ множителей числа 100 и добавимъ къ нимъ тѣхъ множителей числа 40, которыхъ недостаетъ въ разложеніи 100. Тогда получимъ произведеніе 2 . 2 . 5 . 5 . 2, которое дѣлится и на 100, и на 40. Добавимъ къ этому произведенію тѣхъ множителей числа 35, которыхъ въ произведеніи недостаетъ. Тогда получимъ число:

$$2\,.\,2\,.\,5\,.\,5\,.\,2\,.\,7=1400,$$

которое дѣлится и на 100, и на 40, и на 35. Это и есть искомое наименьшее кратное, потому что, выключивъ изъ него хотя бы одного сомножителя, мы получимъ число, которое не раздѣлится на какое-нибудь изъ данныхъ чиселъ.

Правило. **Чтобы найти наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ, разлагаютъ всѣ эти числа на простыхъ множителей; затѣмъ, взявъ одно изъ нихъ, приписываютъ къ нему недостающихъ множителей изъ другого числа; къ**

этому произведенію приписываютъ недостающихъ множителей изъ третьяго числа и т. д.

118. Укажемъ нѣкоторые частные случаи, въ которыхъ наименьшее кратное можетъ быть найдено проще.

Случай 1-й, когда никакая пара данныхъ чиселъ не имѣетъ общихъ множителей.

Пусть, напр., даны три числа: 20, 49, 33, изъ которыхъ, какъ видно изъ разложеній:

$$20=2\,.\,2\,.\,5; \qquad 49=7\,.\,7; \qquad 33=3\,.\,11$$

никакая пара не имѣетъ общихъ множителей.

Примѣняя къ этому случаю общее правило, придемъ къ заключенію, что всѣ данныя числа надо перемножить:

$$20\,.\,49\,.\,33=32340.$$

Такъ же надо поступать, когда отыскивается наим. кратное простыхъ чиселъ; напр., наим. кратное чиселъ 3, 7 и 11 равно: $3\,.\,7\,.\,11=231$.

Случай 2-й, когда бо̀льшее изъ данныхъ чиселъ дѣлится на всѣ остальныя. Пусть, напр., даны числа: 5, 12, 15 и 60. Изъ нихъ 60 дѣлится на 5, на 12, на 15 и на само себя. Значитъ, оно и есть наименьшее кратное.

119. Приведеніе дробей къ общему наименьшему знаменателю. Мы вскорѣ увидимъ, что *для сложенія или вычитанія дробей ихъ нужно предварительно привести къ общему знаменателю*, т.-е. выразить въ одинаковыхъ доляхъ единицы. Укажемъ способъ, посредствомъ котораго можно приводить дроби не только къ общему, но притомъ и къ наименьшему знаменателю.

Возьмемъ для примѣра двѣ дроби $^5/_{12}$ и $^7/_{15}$ и зададимся вопросомъ, нельзя ли эти дроби выразить въ одинаковыхъ доляхъ единицы? Дробь $^5/_{12}$—несократима, поэтому ее можно выразить, кромѣ 12-ыхъ долей, только въ доляхъ.

24-хъ, 36-хъ, 48-хъ и т. д.; значитъ, знаменатели всѣхъ дробей, которымъ можетъ равняться дробь $^5/_{12}$, должны быть числами кратными 12-и. Дробь $^7/_{15}$ тоже несократима; поэтому знаменатели всѣхъ дробей, которымъ можетъ равняться эта дробь, должны быть числами кратными 15-и; слѣд., общій знаменатель взятыхъ дробей долженъ быть общимъ кратнымъ 12-и и 15-и, а **наименьшій общій знаменатель долженъ быть наименьшимъ кратнымъ** 12-и и 15-и. Найдемъ наименьшее кратное этихъ чиселъ:

$$\begin{array}{r} 12=2\,.\,2\,.\,3 \\ 15=3\,.\,5 \\ \hline \text{н. кратное}=2\,.\,2\,.\,3\,.\,5=60 \end{array}$$

Это и есть наименьшій общій знаменатель дробей $^5/_{12}$ и $^7/_{15}$.

Чтобы выразить каждую изъ этихъ дробей въ 60-хъ доляхъ, найдемъ для ихъ знаменателей **дополнительныхъ множителей**, т.-е. найдемъ тѣ числа, на которыя надо умножить знаменателей, чтобы получить наим. кратное. Сравнивая между собою разложенія 12-и, 15-и и 60-и, находимъ, что для полученія 60-и надо умножить 12 на 5, а 15 на 2 . 2, т.-е. на 4. Чтобы не измѣнились величины дробей, надо умножить числителя каждой дроби на то же число, на которое умножаемъ ея знаменателя:

$$\frac{5}{12}=\frac{5\,.\,5}{12\,.\,5}=\frac{25}{60} \qquad \frac{7}{15}=\frac{7\,.\,4}{15\,.\,4}=\frac{28}{60}$$

Пусть еще требуется привести къ наименьшему общему знаменателю три дроби: $^4/_{90}$, $^7/_{20}$ и $^8/_{75}$. Первая изъ нихъ послѣ сокращенія дастъ $^2/_{45}$; остальныя дроби несократимы. Отыщемъ наименьшее кратное знаменателей 45, 20 и 75:

$$\begin{array}{lll} 45=3\,.\,3\,.\,5 & \text{доп. мн. для} & 45=2\,.\,2\,.\,5=20 \\ 20=2\,.\,2\,.\,5 & \text{»\quad »\quad »} & 20=3\,.\,3\,.\,5=45 \\ 75=3\,.\,5\,.\,5 & \text{»\quad »\quad »} & 75=2\,.\,2\,.\,3=12 \\ \hline \text{н. кр.}=3\,.\,3\,.\,5\,.\,2\,.\,2\,.\,5=900 & & \end{array}$$

Теперь умножимъ оба члена каждой дроби на дополнительнаго множителя для ея знаменателя:

$$\frac{2}{45}=\frac{2\,.\,20}{45\,.\,20}=\frac{40}{900};\quad \frac{7}{20}=\frac{7\,.\,45}{20\,.\,45}=\frac{315}{900};\quad \frac{8}{75}=\frac{8\,.\,12}{75\,.\,12}=\frac{96}{900}.$$

Правило. Чтобы привести дроби къ наименьшему общему знаменателю, предварительно, если можно, ихъ сокращаютъ; затѣмъ находятъ наименьшее кратное всѣхъ знаменателей и умножаютъ оба члена каждой дроби на дополнительнаго множителя для ея знаменателя.

При этомъ могутъ представиться тѣ же частные случаи, которые мы указали при нахожденіи наименьшаго кратнаго, а именно:

Случай 1-й, когда никакая пара знаменателей не содержитъ общихъ множителей; напр.: $^3/_7$, $^4/_{15}$, $^5/_8$. Такъ какъ въ этомъ случаѣ наименьшее кратное знаменателей равно ихъ произведенію, то **оба члена каждой дроби надо умножить на произведеніе знаменателей остальныхъ дробей:**

$$\frac{3}{7}=\frac{3\,.\,120}{7\,.\,120}=\frac{360}{840};\quad \frac{4}{15}=\frac{4\,.\,56}{15\,.\,56}=\frac{224}{840};\quad \frac{5}{8}=\frac{5\,.\,105}{8\,.\,105}=\frac{525}{840}.$$

Случай 2-й, когда наибольшій изъ данныхъ знаменателей дѣлится на каждаго изъ остальныхъ знаменателей; напр.: $^3/_7$, $^7/_{15}$, $^7/_{315}$. Въ этомъ случаѣ **наибольшій знаменатель долженъ быть общимъ знаменателемъ:**

доп. мн. для 7=45 доп. мн. для 15=21

$$\frac{3}{7}=\frac{3\,.\,45}{7\,.\,45}=\frac{135}{315};\quad \frac{7}{15}=\frac{7\,.\,21}{15\,.\,21}=\frac{147}{315};\quad \frac{8}{315}=\frac{8}{315}.$$

Дѣйствія надъ отвлеченными дробями.

Сложеніе.

120. Что такое сложеніе. **Сложеніе есть аркеметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго находится такое**

число (сумма), **которое содержитъ въ себѣ всѣ единицы и всѣ доли единицъ, заключающіяся въ нѣсколькихъ данныхъ числахъ** (слагаемыхъ).

Выводъ правила. Разсмотримъ особо слѣдующіе 3 случая сложенія.

1) Пусть требуется сложить дроби съ одинаковыми знаменателями:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}$$

Очевидно, что 7 одиннадцатыхъ, да 3 одиннадцатыхъ, да 5 одиннадцатыхъ составляютъ 7+3+5 одиннадцатыхъ той же единицы:

$$\frac{7}{11}+\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=\frac{7+3+5}{11}=\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}$$

2) Пусть требуется сложить дроби съ разными знаменателями:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{10}+\frac{9}{16}$$

Приведемъ всѣ эти дроби къ общему знаменателю и сдѣлаемъ сложеніе, какъ въ первомъ случаѣ:

$$\frac{3}{4}^{\smile 20}+\frac{7}{10}^{\smile 8}+\frac{9}{16}^{\smile 5}=\frac{60+56+45}{80}=\frac{161}{80}=2\frac{1}{80}$$

Число, поставленное надъ каждою данною дробью, есть дополнительный множитель, на который должно умножить члены дроби, чтобы привести ее къ общему знаменателю.

Правило. Чтобы сложить нѣсколько дробей, ихъ предварительно приводятъ къ общему знаменателю, затѣмъ складываютъ числителей и подъ ихъ суммою подписываютъ общаго знаменателя.

3) Пусть, наконецъ, требуется сложить смѣшанныя числа:

$$4\frac{2}{15},\ 8\frac{9}{10}\ \text{и}\ 2\frac{5}{6}$$

Сначала сложимъ дроби:

$$\frac{2}{15}+\frac{9}{10}+\frac{5}{6}=\frac{4+27+25}{30}=\frac{56}{30}=1\frac{26}{30}=1\frac{13}{15}$$

Теперь сложимъ цѣлыя числа и къ суммѣ ихъ дабавимъ 1, получившуюся отъ сложенія дробей:

$$4+8+2+1=15$$

Значитъ, полная сумма равна $15\frac{13}{15}$.

Вычитаніе.

121. Что такое вычитаніе. **Вычитаніе есть арифметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго узнается, какое число останется, если отъ бо̀льшаго даннаго числа** (уменьшаемаго) **отнимемъ меньшее данное число** (вычитаемое); или **вычитаніе есть дѣйствіе, посредствомъ котораго по данной суммѣ** (уменьшаемому) **и одному слагаемому** (вычитаемому) **находится другое слагаемое** (остатокъ или разность).

Выводъ правила. Разсмотримъ особо слѣдующіе 3 случая вычитанія.

1) Пусть даны для вычитанія дроби съ одинаковыми знаменателями:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}$$

Послѣ вычитанія изъ 7 восьмыхъ 3-хъ восьмыхъ останется, очевидно, 7—3 восьмыхъ:

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=\frac{7-3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

2) Пусть данныя дроби имѣютъ разныхъ знаменателей, напр.:

$$\frac{11}{15}-\frac{3}{8}$$

Тогда, приведя эти дроби къ общему знаменателю, сдѣлаемъ вычитаніе, какъ было объяснено раньше:

$$\frac{11}{15}-\frac{3}{8}=\frac{88-45}{120}=\frac{43}{120}.$$

Правило. Чтобы вычесть дробь изъ дроби, ихъ предварительно приводятъ къ общему знаменателю, затѣмъ вычитаютъ числителя вычитаемаго изъ числителя уменьшаемаго и подъ ихъ разностью подписываютъ общаго знаменателя.

3) Если нужно вычесть смѣшанное число изъ другого смѣшаннаго числа, то, если можно, вычитаютъ дробь изъ дроби, а цѣлое изъ цѣлаго:

$$8\frac{9}{11}-5\frac{3}{4}=8\frac{36}{44}-5\frac{33}{44}=3\frac{3}{44}$$

Если же дробь вычитаемаго больше дроби уменьшаемаго, то берутъ одну единицу изъ цѣлаго числа уменьшаемаго, раздробляютъ ее въ надлежащія доли и прибавляютъ къ дроби уменьшаемаго:

$$10\frac{3}{11}-5\frac{5}{6}=10\frac{18}{66}-5\frac{55}{66}=9\frac{84}{66}-5\frac{55}{66}=4\frac{29}{66}$$

Такъ же производится вычитаніе дроби изъ цѣлаго числа:

$$7-2\frac{3}{5}=6\frac{5}{5}-2\frac{3}{5}=4\frac{2}{5};\quad 10-\frac{3}{17}=9\frac{17}{17}-\frac{3}{17}=9\frac{14}{17}$$

Умноженіе.

122. Что такое умноженіе. I) Умноженіе какого-нибудь числа (множимаго) **на цѣлое число** (множитель) **есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго мно-**

жимое повторяется слагаемымъ столько разъ, сколько единицъ во множителѣ.

Такъ, умножить $^7/_8$ на 5 значитъ найти такую сумму:

$$\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}+\frac{7}{8}$$

2) **Умноженіе какого-нибудь числа** (множимаго) **на дробь** (множитель) **есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго находится эта дробь множимаго.**

Такъ, умножить 5 на $^7/_8$ значитъ найти семь восьмыхъ пяти единицъ; умножить $2^1/_2$ на $^3/_4$ значитъ найти три четверти двухъ съ половиною, и т. д. Такимъ образомъ, то нахожденіе дроби даннаго числа, которое мы разсматривали прежде (см. § 103), мы будемъ теперь называть умноженіемъ даннаго числа на дробь.

Полезно теперь же замѣтить, что **отъ умноженія на правильную дробь число уменьшается, а отъ умноженія на неправильную дробь число увеличивается, если эта неправильная дробь больше 1, и остается безъ измѣненія, если она равна 1.** Напр., произведеніе $5 \,.\, ^7/_8$ должно быть меньше 5-и, потому что оно означаетъ только $^7/_8$ 5-и; наоборотъ, произведеніе $5 \,.\, ^9/_8$ должно быть больше 5-и, потому что оно означаетъ $^9/_8$ 5-и; и, наконецъ, произведеніе $5 \,.\, ^8/_8$, т.-е. $^8/_8$ пяти, равно 5.

123. Выводъ правилъ. При умноженіи дробныхъ чиселъ могутъ представиться слѣдующіе случаи:

1) Умноженіе дроби на цѣлое число, напр.: $^3/_{10}\times 5$. Это значитъ: повторить $^3/_{10}$ слагаемымъ 5 разъ, иначе сказать, увеличить $^3/_{10}$ въ 5 разъ. Чтобы увеличить дробь въ 5 разъ, достаточно увеличить ея числителя или уменьшить знаменателя въ 5 разъ. Поэтому:

$$\frac{3}{10}\times 5=\frac{3\,.\,5}{10}=\frac{15}{10}=\frac{3}{2} \text{ или } \frac{3}{10}\times 5=\frac{3}{10:5}=\frac{3}{2}$$

Правило 1-е. Чтобы умножить дробь на цѣлое число, умножаютъ на это цѣлое число числителя или дѣлятъ на него знаменателя дроби.

2) Умноженіе цѣлаго числа на дробь; напр.: $7 \times {}^4/_9$. Это значитъ найти ${}^4/_9$ числа 7.

Такъ какъ $\frac{1}{9}$ числа 7 составляетъ $\frac{7}{9}$,

а $\frac{4}{9}$ числа больше $\frac{1}{9}$ этого числа въ 4 раза,

то $\frac{4}{9}$ числа 7 составляютъ $\frac{7 \,.\, 4}{9}$.

Такимъ образомъ: $7 \times \frac{4}{9} = \frac{7 \,.\, 4}{9} = \frac{28}{9}$.

Правило 2-е. Чтобы умножить цѣлое число на дробь, умножаютъ цѣлое число на числителя дроби и это произведеніе дѣлаютъ числителемъ, а знаменателемъ подписываютъ знаменателя дроби.

3) Умноженіе дроби на дробь; напр.: ${}^3/_5 \times {}^7/_8$. Это значитъ: найти ${}^7/_8$ числа ${}^3/_5$.

Такъ какъ $\frac{1}{8}$ числа $\frac{3}{5}$ составляетъ $\frac{3}{5 \,.\, 8}$,

а $\frac{7}{8}$ числа больше $\frac{1}{8}$ этого числа въ 7 разъ,

то $\frac{7}{8}$ числа $\frac{3}{5}$ составляютъ $\frac{3 \,.\, 7}{5 \,.\, 8}$.

Такимъ образомъ: $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \,.\, 7}{5 \,.\, 8} = \frac{21}{40}$.

Правило 3-е. Чтобы умножить дробь на дробь, умножаютъ числителя на числителя и знаменателя на знаменателя и первое произведеніе дѣлаютъ числителемъ, а второе— знаменателемъ.

4) Умноженіе смѣшанныхъ чиселъ. Напр.:

$$7 \times 5\frac{3}{4} = 7 \times \frac{23}{4} = \frac{7 \,.\, 23}{4} = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4}$$

$$2\frac{3}{5} \times 4\frac{2}{3} = \frac{13}{5} \times \frac{14}{3} = \frac{13 \,.\, 14}{5 \,.\, 3} = \frac{182}{15} = 12\frac{2}{15}$$

Правило 4-е. Чтобы умножить смѣшанныя числа, ихъ предварительно обращаютъ въ неправильныя дроби и затѣмъ умножаютъ по правиламъ умноженія дробей.

124. Произведеніе нѣсколькихъ дробей.

Пусть дано перемножить три дроби: $\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} \times \frac{5}{6}$. Это значитъ, что требуется $^2/_3$ умножить на $^7/_8$ и полученное число умножить затѣмъ еще на $^5/_6$. Такъ какъ

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{2 \,.\, 7}{3 \,.\, 8} \quad \text{и} \quad \frac{2 \,.\, 7}{3 \,.\, 8} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \,.\, 7 \,.\, 5}{3 \,.\, 8 \,.\, 6} = \frac{70}{144}$$

то, значитъ: **чтобы перемножить нѣсколько дробей, перемножаютъ ихъ числителей между собой и знаменателей между собой и первое произведеніе дѣлаютъ числителемъ, а второе—знаменателемъ.**

Если въ числѣ множителей есть смѣшанныя числа, то ихъ обращаютъ въ неправильныя дроби.

Это правило можно примѣнять и къ такимъ произведеніямъ, въ которыхъ нѣкоторые множители числа цѣлыя, если только цѣлое число будемъ разсматривать, какъ дробь, у которой знаменатель есть 1. Напр.:

$$\frac{3}{4} \times 5 \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \,.\, 5 \,.\, 5}{4 \,.\, 1 \,.\, 6} = \frac{5 \,.\, 5}{4 \,.\, 2} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$

125. Перемѣстительное свойство произведенія.

Произведеніе не измѣняется отъ перестановки сомножителей.

Для цѣлыхъ чиселъ это перемѣстительное свойство было указано нами раньше (§ 45). Оно примѣнимо также и къ дробямъ. Напр., произведенія:

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4};\quad \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3};\quad \frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{2}{3};\ \text{и т. д.}$$

должны быть всѣ равны между собою, такъ какъ каждое изъ нихъ равно дроби ($^{30}/_{72}$), у которой числитель есть произведеніе всѣхъ отдѣльныхъ числителей и знаменатель—произведеніе всѣхъ отдѣльныхъ знаменателей, а произведеніе цѣлыхъ чиселъ не можетъ измѣниться отъ перестановки сомножителей.

Дѣленіе.

126. Что такое дѣленіе. Дѣленіе есть ариѳметическое дѣйствіе, посредствомъ котораго по данному произведенію и одному изъ сомножителей отыскивается другой сомножитель.

Напр., раздѣлить $^7/_8$ на $^3/_5$ значитъ: найти такое число, которое надо умножить на $^3/_5$, чтобы получить $^7/_8$; или найти такое число, на которое надо умножить $^3/_5$, чтобы получить $^7/_8$. Въ первомъ случаѣ частное представляетъ собою искомое множимое, во второмъ случаѣ—искомаго множителя. Такъ какъ множимое и множитель могутъ помѣняться мѣстами, то при данныхъ дѣлимомъ и дѣлителѣ **величина частнаго не зависитъ отъ того, означаетъ ли оно множимое или множителя.**

Изъ опредѣленія дѣйствія видно, что нахожденіе числа по данной его дроби, разсмотрѣнное нами раньше (§ 104), можно выполнять посредствомъ дѣленія на дробь. Такъ, если требуется найти число, котораго $^7/_8$ составляютъ 5, то это, другими словами, означаетъ: найти такое число, которое надо умножить на $^7/_8$, чтобы получить 5; значитъ,

5 есть произведеніе, $^7/_8$—множитель, а отыскивается множимое; а это дѣлается посредствомъ дѣленія 5 на $^7/_8$.

Полезно теперь же замѣтить, что отъ дѣленія на *правильную дробь число увеличивается, а отъ дѣленія на* неправильную дробь число уменьшается, если эта неправильная дробь больше 1, и остается безъ измѣненія, если она равна 1. Напр., частное 5 : $^7/_8$ должно быть больше 5-ти, потому что 5 составляетъ только $^7/_8$ этого частнаго; наоборотъ, частное 5 : $^9/_8$ должно быть меньше 5-ти, потому что 5 составляетъ $^9/_8$ его; наконецъ, частное 5 : $^8/_8$ должно быть равно 5.

127. Выводъ правилъ. При дѣленіи могутъ представиться слѣдующіе случаи:

1) Дѣленіе цѣлыхъ чиселъ. Этотъ случай былъ разсмотрѣнъ въ ариѳметикѣ цѣлыхъ чиселъ. Но тамъ дѣленіе не всегда было возможно, такъ какъ дѣлимое не всегда есть произведеніе дѣлителя на цѣлое число; поэтому приходилось разсматривать дѣленіе съ остаткомъ. Теперь же мы всякій случай дѣленія можемъ считать возможнымъ. Пусть, напр., требуется раздѣлить 5 на 7, т.-е. найти число, котораго произведеніе на 7 даетъ 5. Такое число есть дробь $^5/_7$, потому что $^5/_7 \,.\, 7 = {}^{35}/_7 = 5$. Точно такъ же $20 : 7 = {}^{20}/_7$, потому что $^{20}/_7 \,.\, 7 = {}^{140}/_7 = 20$.

Правило 1-е. Чтобы раздѣлить цѣлое число на цѣлое, достаточно дѣлимое взять числителемъ, а дѣлителя знаменателемъ.

2) Дѣленіе дроби на цѣлое число; напр.: $^8/_9 : 4$. Это значитъ найти число, которое надо умножить на 4, чтобы получить $^8/_9$. Но отъ умноженія на 4, всякое число увеличивается въ 4 раза; значитъ, искомое число, увеличенное въ 4 раза, должно составить $^8/_9$, и потому, чтобы найти его, надо $^8/_9$ уменьшить въ 4 раза. Чтобы умень-

шить дробь въ 4 раза, достаточно уменьшить въ 4 раза ея числителя или увеличить въ 4 раза ея знаменателя; поэтому:

$$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = \frac{2}{9};$$

или $$\frac{8}{9} : 4 = \frac{8}{9 \,.\, 4} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

Правило 2-е. Чтобы раздѣлить дробь на цѣлое число, дѣлятъ на это цѣлое число числителя дроби или умножаютъ на него знаменателя дроби.

3) Дѣленіе цѣлаго числа на дробь; напр.: $3 : {}^2/_5$. Это значитъ: найти такое число, которое надо умножить на ${}^2/_5$, чтобы получить 3. Но умножить какое-нибудь число на ${}^2/_5$ значитъ найти ${}^2/_5$ этого числа; поэтому:

$$\frac{2}{5} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = 3,$$

слѣд. $$\frac{1}{5} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{3}{2},$$

а $$\frac{5}{5} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{3}{2} \,.\, 5 = \frac{3 \,.\, 5}{2}.$$

Такимъ образомъ: $$3 : \frac{2}{5} = \frac{3 \,.\, 5}{2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}.$$

Правило 3-е. Чтобы раздѣлить цѣлое число на дробь, умножаютъ это цѣлое число на знаменателя дроби и полученное произведеніе дѣлятъ на числителя дроби.

4) Дѣленіе дроби на дробь; напр.: ${}^5/_6 : {}^7/_{11}$. Это значитъ: найти число, которое надо умножить на ${}^7/_{11}$, чтобы получить ${}^5/_6$. Но умножить какое-нибудь число на ${}^7/_{11}$, значитъ найти ${}^7/_{11}$ этого числа; поэтому:

$$\frac{7}{11} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{5}{6};$$

слѣд. $$\frac{1}{11} \text{ неизвѣстнаго частнаго} = \frac{5}{6 \,.\, 7},$$

а $\frac{11}{11}$ неизвѣстнаго частнаго $= \frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7}$.

Такимъ образомъ: $\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5 \cdot 11}{6 \cdot 7} = \frac{55}{42} = 1\frac{13}{42}$.

Правило 4-е. Чтобы раздѣлить дробь на дробь, умножаютъ числителя первой дроби на знаменателя второй, а знаменателя первой дроби на числителя второй и первое произведеніе дѣлятъ на второе.

5) Дѣленіе смѣшанныхъ чиселъ. Напр.:

$$8 : 3\frac{5}{6} = 8 : \frac{23}{6} = \frac{8 \cdot 6}{23} = \frac{48}{23} = 2\frac{2}{23};$$

$$7\frac{3}{4} : 5\frac{1}{2} = \frac{31}{4} : \frac{11}{2} = \frac{31 \cdot 2}{4 \cdot 11} = \frac{31}{22} = 1\frac{9}{22}.$$

Правило 5-е. Чтобы раздѣлить смѣшанныя числа, ихъ предварительно обращаютъ въ неправильныя дроби, и затѣмъ дѣлятъ по правиламъ дѣленія дробей.

Примѣры задачъ, рѣшаемыхъ дѣленіемъ.

128. Задача 1. Во сколько часовъ путешественникъ пройдетъ путь въ $34^7/_8$ версты, если каждый часъ онъ проходитъ по $4\ ^1/_2$ версты?

Для рѣшенія задачи надо узнать, сколько разъ $4^1/_2$ версты слѣдуетъ повторить слагаемымъ, чтобы получить $34^7/_8$ версты, т.-е. надо отыскать, на какое число слѣдуетъ умножить $4^1/_2$, чтобы получить въ произведеніи $34^7/_8$. Здѣсь $34^7/_8$ есть произведеніе, $4^1/_2$—множимое, а требуется найти множителя; это выполняется дѣленіемъ:

$$34\frac{7}{8} : 4\frac{1}{2} = \frac{279}{8} : \frac{9}{2} = \frac{279 \cdot 2}{8 \cdot 9} = \frac{31}{4} = 7\frac{3}{4}.$$

Частное показываетъ, что если $4^1/_2$ версты повторить слагаемымъ 7 разъ и добавить еще $^3/_4$ отъ $4^1/_2$ верстъ, то получится 34 $^7/_8$ версты; значитъ, $34^7/_8$ версты будутъ пройдены въ $7^3/_4$ часа.

Задача 2. Сколько аршинъ сукна можно купить на 6 руб., если каждый аршинъ стоитъ $7^1/_2$ рублей?

Очевидно, на 6 руб. нельзя купить ни одного аршина сукна, стоимостью въ $7^1/_2$ рубл.; но можно купить нѣкоторую часть аршина. Чтобы узнать, какую именно, достаточно опредѣлить, на какую дробь слѣдуетъ умножить $7^1/_2$, чтобы получить 6. Здѣсь 6 произведеніе, $7^1/_2$ множимое, а отыскивается множитель; это выполняется дѣленіемъ:

$$6 : 7\frac{1}{2} = 6 : \frac{15}{2} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

Частное показываетъ, что $^4/_5$ числа $7^1/_2$ составляютъ 6; значитъ, на 6 руб. можно купить $^4/_5$ арш., стоимостью въ $7^1/_2$ руб. за аршинъ.

Задача 3. За $7^3/_4$ фунта чаю заплачено $18^3/_5$ рубля; сколько стоитъ фунтъ чаю?

Для рѣшенія задачи надо найти такое число, которое, умноженное на $7^3/_4$, составитъ $18^3/_5$. Здѣсь $18^3/_5$ произведеніе, $7^3/_4$ множитель, а отыскивается множимое; значитъ, задача рѣшается дѣленіемъ:

$$18\frac{3}{5} : 7\frac{3}{4} = \frac{93}{5} : \frac{31}{4} = \frac{93 \,.\, 4}{5 \,.\, 31} \overset{31}{=} \frac{3 \,.\, 4}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Фунтъ чаю стоитъ $2^2/_5$ руб., т.-е. 2 руб. 40 коп.

Задача 4. За $^7/_8$ аршина матеріи заплачено 14 руб.; сколько стоитъ аршинъ этой матеріи?

Очевидно, что за аршинъ матеріи заплачено такое число, котораго $^7/_8$ составляютъ 14, т.-е. такое число, которое слѣдуетъ умножить на $^7/_8$, чтобы получить 14. Здѣсь 14

произведеніе, $^7/_8$ множитель, а отыскивается множимое; значитъ, задача рѣшается дѣленіемъ:

$$14 : \frac{7}{8} = \frac{14 \,.\, 8}{7} = 16.$$

Аршинъ матеріи стоитъ 16 рублей.

Дѣйствія надъ именованными дробями.

129. Раздробленіе. Раздробленіе дробнаго именованнаго числа производится такъ же, какъ и цѣлаго числа, т.-е. посредствомъ умноженія на единичное отношеніе.

Пусть, напр., требуется раздробить $^7/_9$ пуда въ золотники. Для этого раздробимъ $^7/_9$ пуда сначала въ фунты, а потомъ въ золотники:

$^7/_9$ пуда въ фунты. 1 пудъ имѣетъ 40 фунтовъ; слѣд., $^7/_9$ пуда содержатъ $^7/_9$ сорока фунтовъ; чтобы найти $^7/_9$ сорока, надо умножить 40 на $^7/_9$ (или, что все равно, $^7/_9$ на 40):

$$\frac{7}{9} \times 40 = \frac{280}{9} \text{ (фунта).}$$

$^{280}/_9$ фунта въ золотники. 1 фунтъ имѣетъ 96 золотн., слѣд. $^{280}/_9$ фунта содержатъ $^{280}/_9$ 96-и зол.; чтобы найти $^{280}/_9$ 96-и, надо 96 умножить на $^{280}/_9$ (или $^{280}/_9$ на 96):

$$\frac{280}{9} \times 96 = \frac{280 \,.\, 96}{3} = 2986\frac{2}{3} \text{ (золотн.).}$$

130. Превращеніе. Превращеніе дробнаго именованнаго числа производится такъ же, какъ и цѣлаго числа, т.-е. посредствомъ дѣленія на единичное отношеніе.

Пусть, напр., требуется превратить $^3/_4$ арш. въ версты, т.-е. узнать, какую часть версты составляютъ $^3/_4$ арш. Для этого превратимъ $^3/_4$ арш. сначала въ сажени, а потомъ— въ версты:

$^3/_4$ аршина въ сажени. Это значитъ узнать, какую часть сажени, т.-е. 3-хъ аршинъ, составляютъ $^3/_4$ аршина; другими словами: на какую дробь надо умножить 3, чтобы получить $^3/_4$. Это узнается дѣленіемъ:

$$\frac{3}{4} : 3 = \frac{1}{4}$$

Значитъ, $^3/_4$ арш. составляютъ $^1/_4$ часть сажени.

$^1/_4$ сажени въ версты, т.-е. узнаемъ, какую часть версты (500 саженей) составляетъ $^1/_4$ часть сажени; другими словами, на какую дробь надо умножить 500, чтобы получить $^1/_4$; это узнается дѣленіемъ:

$$\frac{1}{4} : 500 = \frac{1}{2000}$$

Слѣд., $^1/_4$ саж. составляетъ $^1/_{2000}$ версты.

130,а. Задача 1. Обратить въ составное именованное число $^7/_{800}$ версты.

Это значитъ: узнать, сколько въ $^7/_{800}$ вер. заключается саженей, аршинъ и т. д. Это дѣлается посредствомъ раздробленія:

$^7/_{800}$ версты раздробимъ въ сажени:

$$\frac{7}{800} \times 500 = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} \text{ (саж.)}.$$

Оставляя въ сторонѣ 4 сажени, раздробимъ:
$^3/_8$ саж. въ аршины: $^3/_8 \times 3 = {}^9/_8 = 1^1/_8$(арш.).
Оставляя въ сторонѣ 1 арш., раздробимъ:
$^1/_8$ арш. въ вершки: $^1/_8 \times 16 = 2$ (вершка).

Слѣдовательно, $\frac{7}{800}$ версты$=$4 саж. 1 арш. 2 верш.

Задача 2. Какую часть сутокъ составляютъ 3 часа $7^5/_8$ мин.?

Эта задача рѣшается посредствомъ превращенія:

$7^5/_8$ минуты превратимъ въ часы:

$$\frac{61}{8} : 60 = \frac{61}{480} \text{ часа.}$$

Прибавляемъ 3 часа: $\frac{61}{480} + 3 = \frac{1501}{480}$ (часовъ).

$^{1501}/_{480}$ часа превратимъ въ сутки:

$$\frac{1501}{480} : 24 = \frac{1501}{11520} \text{ (сутокъ).}$$

131. Примѣры на сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе дробныхъ именованныхъ чиселъ.

1) Сложить: $^3/_7$ версты+2 в. $15^3/_4$ саж.+101 саж. 1 арш. $2^1/_2$ вершка.

$^3/_7$ версты превратимъ въ составное именованное число:

$$\frac{3}{7} \times 500 = \frac{1500}{7} = 214\frac{2}{7} \text{ (саж.); } \frac{2}{7} \times 3 = \frac{6}{7} \text{ (арш.).}$$

$$\frac{6}{7} \times 16 = \frac{96}{7} = 13^5/_7 \text{ (вершк.).}$$

Слѣд., $^3/_7$ в.=214 саж. $13^5/_7$ вершк.

$^3/_4$ саж. превратимъ въ составное именованное число:

$$\frac{3}{4} \times 3 = {}^9/_4 = 2^1/_4 \text{ (арш.); } {}^1/_4 \times 16 = 4 \text{ (вершк.).}$$

Слѣд., $15^3/_4$ саж.=15 саж. 2 арш. 4 вершка.

Теперь сложимъ, какъ складываются цѣлыя составныя именованныя числа:

	214	саж.	. . . . .			$13^5/_7$	вершка.
+2 версты	15	»	2	арш.	. . . .	4	»
	101	»	1	»	. . . .	$2^1/_2$	»
2 версты	330	саж.	3	арш.	. . . .	$20^3/_{14}$	вершка.
2 версты	331	саж.	1	арш.	. . . .	$4^3/_{14}$	вершка.

Можно было бы выразить всѣ данныя въ вершкахъ или въ иныхъ мѣрахъ одного и того же названія и потомъ складывать, какъ дроби отвлеченныя. Полученное отъ сложенія простое именованное число можно было бы, въ случаѣ надобности, обратить въ составное.

2) Умножить 4 пуда $6^2/_3$ фунта на $^4/_7$.

Чтобы умножить на $^4/_7$, надо умножить на 4 и раздѣлить на 7:

$$\begin{array}{l|l}
4\ \text{п.}\ 6^2/_3\ \text{ф.} & \\
\quad\times\ 4 & \\
\hline
16\ \text{п.}\ 26^2/_3\ \text{ф.} & 7 \\
\hline
14 & \\
\hline
2 & \\
\times 40 & \\
\hline
80 & \\
+26^2/_3 & \\
\hline
106^2/_3 = \frac{320}{3} &
\end{array}$$

$$2.\ \text{п.}\ \frac{320}{21}\ \text{ф.} = 2\ \text{пуда}\ 15^5/_{21}\ \text{ф.}$$

3) Раздѣлить 2 стопы $12^1/_2$ дест. на $2^5/_8$ дести.

Обращаемъ оба данныя въ дести:

$2\times20=40$ (дест.); $40+12^1/_2=52^1/_2$ (дести).

$$52\frac{1}{2} : 2\frac{5}{8} = \frac{105}{2} : \frac{21}{8} = \frac{105\ .\ 8}{21\ .\ 2} = 20\ \text{(разъ)}.$$

4) Раздѣлить 5 боч. $7^3/_4$ ведра на $^2/_3$.

Чтобы раздѣлить на $^2/_3$, надо умнож. на 3 и раздѣлить на 2:

$$\begin{array}{l|l}
5\ \text{боч.}\ 7^3/_4\ \text{ведра} & \\
\quad\times\ 3 & \\
\hline
15\ \text{боч.}\ 23^1/_4\ \text{ведра} & 2 \\
\hline
1 & \\
\times 40 & \\
\hline
40 & \\
+23^1/_4 & \\
\hline
63^1/_4 = \frac{253}{4} &
\end{array}$$

$$7\ \text{боч.}\ \frac{253}{8}\ \text{в.} = 7\ \text{боч.}\ 31^5/_8\ \text{в.}$$

Главнѣйшія свойства десятичныхъ дробей.

132. Десятичныя доли. Доли, получаемыя отъ дѣленія единицы на 10, на 100, на 1000 и вообще на такое число равныхъ частей, которое выражается 1 съ однимъ или нѣсколькими нулями, называются **десятичными** долями.

Десятичныя доли, послѣдовательно уменьшающіяся, слѣдующія:

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, \frac{1}{1000000} \text{ и т. д.}$$

Изъ двухъ десятичныхъ долей бо̀льшая называется десятичною долею **высшаго разряда**, а меньшая—десятичною долею **низшаго разряда.** Каждая дес. доля содержитъ 10 дес. долей слѣдующаго низшаго разряда. Такъ:

$$\frac{1}{10} = \frac{10}{100}; \frac{1}{100} = \frac{10}{1000}; \frac{1}{1000} = \frac{10}{100000} \text{ и т. д.}$$

132,а. Десятичная дробь. Дробь, у которой знаменатель есть 1 съ однимъ или съ нѣсколькими нулями, наз. **десятичной;** таковы, напр. дроби:

$$\frac{3}{10}, \frac{27}{100}, \frac{27401}{1000}, 3\frac{1}{1000} \text{ и т. д.}$$

Въ отличіе отъ десятичныхъ тѣ дроби, которыя мы разсматривали до сего времени, т.-е. дроби, имѣющія какихъ-угодно знаменателей, наз. **обыкновенными.**

133. Десятичное число. Въ изображеніи цѣлаго числа изъ двухъ рядомъ стоящихъ цыфръ правая всегда означаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія, нежели лѣвая. Условимся распространить это значеніе мѣстъ и на тѣ цыфры, которыя могутъ быть написаны вправо отъ простыхъ единицъ. Положимъ, напр., что въ такомъ изображеніи:

6 3, 4 8 2 5 9...

цыфра 3 означаетъ простыя единицы. Тогда цыфра 4 означаетъ единицы, въ 10 разъ меньшія, т.-е. десятыя доли; 8 означаетъ сотыя доли, 2—тысячныя, 5—десятитысячныя, 9—стотысячныя и т. д. Чтобы не ошибиться въ значеніи мѣстъ, условимся отдѣлять запятою цѣлое число отъ десятичныхъ долей. На мѣста недостающихъ долей, а также и на мѣсто цѣлаго числа, когда его нѣтъ, будемъ ставить нули. Напр., при такихъ условіяхъ выраженіе 0,0203 означаетъ: 2 сотыхъ, 3 десятитысячныхъ.

Цыфры, стоящія направо отъ запятой, называются **десятичными знаками.**

Число, написанное при помощи десятичныхъ знаковъ, принято называть **десятичнымъ числомъ.**

133,а. Изображеніе десятичной дроби безъ знаменателя. Всякую десятичную дробь мы можемъ написать безъ знаменателя, въ видѣ десятичнаго числа. Пусть, напр., дана десятичная дробь $\frac{32736}{1000}$. Сначала исключимъ изъ нея цѣлое число; получимъ $32\frac{736}{1000}$. Теперь представимъ ее такъ:

$$\frac{32736}{1000} = 32 + \frac{700}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{6}{1000} = 32 + \frac{7}{10} + \frac{3}{100} + \frac{6}{1000}.$$

Значитъ, дробь эту можно изобразить такимъ образомъ:

$$\frac{32736}{1000} = 32,736.$$

Это легко повѣрить, раздробивъ въ десятичномъ числѣ 32,736 цѣлое число и всѣ десятичныя доли въ доли самыя мелкія (въ тысячныя), что можно сдѣлать такъ: такъ какъ цѣлая единица содержитъ въ себѣ 10 десятыхъ, то 32 цѣлыхъ составляютъ 320 десятыхъ; приложивъ къ нимъ 7 десятыхъ, получимъ 327 десятыхъ. Такъ какъ десятая доля

содержитъ въ себѣ 10 сотыхъ, то 327 десятыхъ составляютъ 3270 сотыхъ; приложивъ къ нимъ 3 сотыхъ, получимъ 3273 сотыхъ; такъ какъ 1 сотая=10 тысячныхъ, то 3273 сотыхъ = 32730 тысячныхъ; приложивъ къ этому числу еще 6 тысячныхъ, получимъ данную дробь 32736 тысячныхъ.

Пусть еще дана дробь $\frac{578}{100000}$, въ которой нѣтъ цѣлаго числа. Представимъ ее такъ:

$$\frac{578}{100000}=\frac{500}{100000}+\frac{70}{100000}+\frac{8}{100000}=$$
$$=\frac{5}{1000}+\frac{7}{10000}+\frac{8}{100000}.$$

Слѣд., дробь эта изобразится такимъ образомъ:

$$\frac{578}{100000}=0{,}00578.$$

Правило. Чтобы десятичную дробь написать безъ знаменателя, пишутъ ея числителя и отдѣляютъ въ немъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знаковъ, сколько есть нулей въ знаменателѣ.

Въ дальнѣйшемъ изложеніи мы, говоря о десятичной дроби, всегда будемъ предполагать, что она изображена безъ знаменателя, въ видѣ десятичнаго числа.

134. Какъ читается десятичная дробь. Сначала прочитываютъ цѣлое число (а когда его нѣтъ, то говорятъ: «нуль цѣлыхъ»); затѣмъ читаютъ число, написанное послѣ запятой, какъ бы оно было цѣлое, и прибавляютъ названіе тѣхъ долей, которыми дробь оканчивается; напр. 0,00378 читается: 0 цѣлыхъ 378 стотысячныхъ. Значитъ, десятичная дробь, написанная безъ знаменателя, прочитывается такъ, какъ если бы она была изображена при помощи числителя и знаменателя.

135. Приписываніе нулей справа или слѣва десятичной дроби не измѣняетъ ея величины. Напр., каждое изъ чиселъ:

7,05 7,0500 007,05

выражаетъ одну и ту же дробь: 7 цѣлыхъ, 5 сотыхъ, такъ какъ 500 десятитысячныхъ равно 5 сотымъ, а 007 выражаетъ просто 7.

136. Сравненіе десятичныхъ дробей. Пусть желаемъ узнать, какая изъ дробей больше:

0,735 и **0,7349987**

Для этого въ первой дроби припишемъ (хотя бы только мысленно) справа столько нулей, чтобы число десятичныхъ знаковъ въ обѣихъ дробяхъ было одно и то же:

0,7350000 0,7349987

Этимъ уравниваніемъ числа десятичныхъ знаковъ мы привели обѣ дроби къ общему знаменателю. Теперь, видимъ, что первая дробь содержитъ 7 350 000 десятимилліонныхъ, а вторая—7 349 987 десятимилліонныхъ; значитъ, первая дробь больше второй.

137. Перенесеніе запятой. Перенесемъ въ дроби 3,274 запятую на одинъ знакъ вправо; тогда получимъ 32,74. Въ первой дроби цыфра 3 означаетъ простыя единицы, а во второй—десятки; слѣд., значеніе ея увеличилось въ 10 разъ. Въ первой дроби цыфра 2 означаетъ десятыя доли, а во второй—простыя единицы; слѣд., ея значеніе тоже увеличилось въ 10 разъ. Такъ же увидимъ, что значеніе и прочихъ цыфръ увеличилось въ 10 разъ. Значитъ:

отъ перенесенія запятой вправо на одинъ знакъ десятичная дробь увеличивается въ 10 разъ;

слѣд., **отъ перенесенія запятой вправо на два знака она увеличивается въ десятью 10 разъ, т.-е. въ 100 разъ, на три знака—въ десятью 100 разъ, т.-е. въ 1000 разъ и т. д.**

Обратно: **отъ перенесенія запятой влѣво на одинъ знакъ десятичная дробь уменьшается въ 10 разъ, на два знака—въ 100 разъ, на три знака—въ 1000 разъ и т. д.**

138. Какъ увеличить или уменьшить десятичную дробь въ 10, въ 100, въ 1000 и т. д. разъ. Пусть требуется увеличить дробь 0,02 въ 10000 разъ. Для этого достаточно перенести въ ней запятую на 4 знака вправо. Но въ данной дроби всего два десятичные знака. Чтобы было 4 знака, припишемъ съ правой стороны 2 нуля, отчего величина дроби не измѣнится. Перенеся потомъ запятую на конецъ числа, получимъ цѣлое число 0200 или просто 200.

Пусть требуется уменьшить ту же дробь въ 100 разъ. Для этого достаточно перенести въ ней запятую на 2 знака влѣво. Но въ данной дроби влѣво отъ запятой только одинъ знакъ. Чтобы было два знака, припишемъ съ лѣвой стороны 2 нуля (одинъ для цѣлаго числа), отъ чего величина дроби не измѣнится. Перенеся потомъ запятую на два знака влѣво, получимъ 0,0002.

Всякое цѣлое число можно разсматривать, какъ десятичную дробь, у которой вправо отъ запятой стоитъ сколько угодно нулей; поэтому увеличеніе и уменьшеніе цѣлаго числа въ 10, 100, 1000 и т. д. разъ совершается такъ же, какъ и десятичной дроби. Напр., если уменьшимъ цѣлое число 567,000... въ 100 разъ, получимъ 5,67.

Дѣйствія надъ десятичными дробями.

139. Сложеніе. Сложеніе десятичныхъ дробей производится такъ же, какъ и сложеніе цѣлыхъ чиселъ. Пусть требуется сложить: 2,078+0,75+13,5602. Подпишемъ эти

дроби другъ подъ другомъ такъ, чтобы цѣлыя стояли подъ цѣлыми, десятыя подъ десятыми, сотыя подъ сотыми и т. д.

2,078	2,0780
+0,75	+ 0,7500
13,5602	13,5602
16,3882	16,3882

Начинаемъ сложеніе съ наименьшихъ долей. Отъ сложенія десятитысячныхъ получимъ 2; пишемъ эту цифру подъ чертою. Отъ сложенія тысячныхъ получимъ 8; пишемъ 8 подъ чертою. Отъ сложенія сотыхъ получимъ 18; но 18 сотыхъ=10 сотыхъ+8 сотыхъ; десять сотыхъ составляютъ одну десятую; запомнимъ ее, чтобы приложить къ десятымъ долямъ слагаемымъ, а 8 сотыхъ напишемъ подъ чертою. Продолжаемъ такъ дѣйствіе до конца.

Чтобы не ошибиться при подписываніи, полезно уравнять нулями числа десятичныхъ знаковъ во всѣхъ слагаемыхъ.

140. Вычитаніе. Вычитаніе десятичныхъ дробей производится такъ же, какъ и вычитаніе цѣлыхъ чиселъ. Возьмемъ слѣдующіе два примѣра:

5,709	3
—0,30785	—1,873
5,40115	1,127

Подпишемъ вычитаемое подъ уменьшаемымъ такъ, чтобы разряды одного названія стояли другъ подъ другомъ.

Въ первомъ примѣрѣ, чтобы вычесть послѣднія двѣ цыфры вычитаемаго, возьмемъ изъ 9 тысячныхъ одну и раздробимъ ее въ десятитысячныя; получимъ 10 десятитысячныхъ. Изъ нихъ возьмемъ одну и раздробимъ ее въ стотысячныя; тогда вмѣсто 10 десятитысячныхъ получимъ 9 десятитысячныхъ и 10 стотысячныхъ. Значитъ, цыфру 5 надо вычесть изъ 10, цыфру 8—изъ 9, а цыфру 7—изъ 8.

Во второмъ примѣрѣ отъ 3 единицъ беремъ одну и раздробляемъ ее въ десятыя; отъ нихъ беремъ одну десятую и раздробляемъ ее въ сотыя; отъ сотыхъ беремъ одну сотую и раздробляемъ ее въ тысячныя. Отъ этого вмѣсто 3 цѣлыхъ получимъ: 2 цѣлыхъ, 9 десятыхъ, 9 сотыхъ и 10 тысячныхъ. Значитъ, цыфру 3 придется вычесть изъ 10, цыфры 7 и 8—изъ 9, а цыфру 1—изъ 2.

Можно также предварительно уравнять нулями числа десятичныхъ знаковъ въ уменьшаемомъ и вычитаемомъ и затѣмъ производить вычитаніе:

$$\begin{array}{r} 5{,}70900 \\ -\ 0{,}30785 \\ \hline 5{,}40115 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}000 \\ 1{,}873 \\ \hline 1{,}127 \end{array}$$

141. Умноженіе. Разсмотримъ два примѣра: первый—когда **одинъ изъ сомножителей цѣлое число**, второй—когда **оба сомножители дроби.**

1) $3{,}085 \times 23$ 2) $8{,}375 \times 2{,}56$

Изобразимъ десятичныя дроби при помощи числителя и знаменателя и произведемъ дѣйствіе по правилу умноженія обыкновенныхъ дробей; тогда получимъ:

$$1)\ \frac{3085}{1000} \times 23 = \frac{3085 \times 23}{1000} = \frac{70955}{1000} = 70{,}955;$$

$$2)\ \frac{8375}{1000} \times \frac{256}{100} = \frac{8375 \times 256}{1000 \times 100} = \frac{2144000}{100000} = 21{,}44000 = 21{,}44.$$

Слѣд., для обоихъ случаевъ мы можемъ вывести одно слѣдующее общее правило.

Правило. Чтобы умножить десятичныя дроби, отбрасываютъ въ нихъ запятыя, перемножаютъ полученныя цѣлыя числа и въ произведеніи отдѣляютъ запятою съ правой стороны столько десятичныхъ знаковъ, сколько ихъ есть во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ.

Дѣйствіе лучше всего располагать такъ:

3,085	8,375
× 23	×2,56
9255	50250
6170	41875
70,955	16750
	21,44

При этомъ запятыя не отбрасываются, а на нихъ только не обращаютъ вниманія при умноженіи цѣлыхъ чиселъ.

142. Дѣленіе. При дѣленіи десятичныхъ дробей надо отдѣльно разсмотрѣть два случая: когда **дѣлитель—цѣлое число,** и когда **дѣлитель—десятичная дробь.** Разсмотримъ сначала первый случай.

Пусть требуется раздѣлить 39,47 на 8. Мы можемъ изобразить десятичную дробь въ видѣ обыкновенной и произвести дѣленіе по правилу дѣленія обыкновенной дроби на цѣлое число:

$$\frac{3947}{100} : 8 = \frac{3947}{800} = 4\frac{747}{800}$$

Тогда мы получимъ частное въ видѣ обыкновенной дроби. Если же желательно, чтобы частное было выражено десятичною дробью, то всего лучше производить дѣленіе такимъ образомъ:

39,47	8
74	4,93375
27	
30	
60	
40	
0	

Дѣлимъ 39 цѣлыхъ на 8; получимъ въ частномъ 4 цѣлыхъ и въ остаткѣ 7 цѣлыхъ. Раздробляемъ остатокъ въ десятыя доли и сносимъ 4 десятыхъ дѣлимаго; получимъ 74 десятыхъ. Дѣлимъ 74 десятыхъ на 8; получимъ въ частномъ 9 десятыхъ и въ остаткѣ 2 десятыхъ. Раздробляемъ остатокъ въ сотыя доли и сносимъ 7 сотыхъ дѣлимаго; получаемъ 27 сотыхъ. Раздѣливъ ихъ на 8, получимъ въ частномъ 3 сотыхъ и въ остаткѣ 3 сотыхъ.

Положимъ, что мы на этомъ прекратили дѣйствіе. Тогда получимъ **приближенное частное** 4,93. Чтобы узнать, на сколько оно разнится отъ **точнаго частнаго**, сравнимъ его съ этимъ частнымъ. Чтобы получить точное частное, достаточно къ числу 4,93 приложить дробь, которая получится отъ дѣленія остатка (3 сотыхъ) на 8. Отъ дѣленія 3 единицъ на 8 получимъ $^3/_8$ единицы, отъ дѣленія 3 сотыхъ на 8 получимъ $^3/_8$ сотой. Значитъ, точное частное равно суммѣ $4{,}93+^3/_8$ сотой. Отбросивъ $^3/_8$ сотой, мы сдѣлаемъ ошибку, меньшую одной сотой (потому что $^3/_8$ сотой меньше цѣлой сотой). Поэтому говорятъ, что 4,93 есть приближенное частное **съ точностью до** $^1/_{100}$.

Если станемъ продолжать дѣйствіе дальше, обращая остатки въ десятичныя доли, все болѣе и болѣе мелкія, то будемъ получать приближенныя частныя съ бо́льшею точностію. Такъ, если обратимъ остатокъ 3 сотыхъ въ тысячныя доли и раздѣлимъ 30 тысячныхъ на 8, то получимъ приближенное частное 4,933, при чемъ ошибка менѣе $^1/_{1000}$.

Продолжая дѣленіе далѣе, мы можемъ иногда дойти до остатка 0 (какъ въ нашемъ примѣрѣ); тогда получимъ точное частное. Въ противномъ случаѣ приходится довольствоваться приближеннымъ частнымъ, при чемъ ошибку можно сдѣлать какъ угодно малою. Если, напр., мы желаемъ найти приближенное частное съ точностью до одной милліонной, то прекращаемъ дѣленіе тогда, когда въ частномъ получилась цыфра милліонныхъ долей.

Правило. Дѣленіе десятичной дроби на цѣлое число производится такъ же, какъ и дѣленіе цѣлыхъ чиселъ, при чемъ остатки обращаютъ въ десятичныя доли, все болѣе и болѣе мелкія, и дѣйствіе продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока или не получится точное частное, или въ приближенномъ

частномъ не получится цыфра тѣхъ десятичныхъ долей, которыми хотятъ ограничиться.

Такъ же поступаютъ при дѣленіи цѣлаго числа на цѣлое, если желаютъ получить частное въ видѣ десятичнаго числа.

```
30 | 7
20   4,2857...
 60
  40
   50
    1
```

Напр., дѣля 30 на 7 и прекративъ дѣленіе на цыфрѣ десятитысячныхъ, мы получимъ приближенное частное 4,2857 съ точностью до $^1/_{10000}$.

143. Разсмотримъ теперь второй случай, **когда дѣлитель —десятичная дробь.** Этотъ случай сводятъ на первый слѣдующимъ образомъ. Пусть требуется раздѣлить 3,753 на 0,85. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на $^{85}/_{100}$, достаточно это число умножить на 100 и результатъ раздѣлить на 85. Умноживъ дѣлимое на 100 (т.-е. увеличивъ его въ 100 разъ), получимъ 375,3. Остается раздѣлить это число на 85:

$$375{,}3 : 85 = 4{,}415...$$

Точно такъ же поступаютъ при дѣленіи цѣлаго числа на десятичную дробь:

$$7 : 0{,}325 = 7000 : 325 = 21{,}538...$$

Правило. Чтобы раздѣлить какое-нибудь число на десятичную дробь, отбрасываютъ въ дѣлителѣ запятую и увеличиваютъ дѣлимое во столько разъ, во сколько увеличился дѣлитель; затѣмъ дѣлятъ по правилу дѣленія на цѣлое число.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

144. Объясненіе. Такъ какъ дѣйствія надъ дробями десятичными производятся проще, чѣмъ надъ обыкновен-

ными, то часто бываетъ полезно обратить обыкновенныя дроби въ десятичныя.

```
23   | 8
16     2,875
 70
 64
  60
  56
   40
   40
    0
```

Пусть требуется обратить обыкновенную дробь $^{23}/_{8}$ въ десятичную. Для этого примемъ во вниманіе, что дробь $^{23}/_{8}$ можно разсматривать, какъ частное отъ дѣленія 23 на 8 (§ 127, правило 1-е), а частное это мы можемъ найти въ видѣ десятичной дроби, какъ было указано при дѣленіи (§ 142). Раздѣливъ 23 на 8, найдемъ, что $^{23}/_{8} = 2,875$.

145. Десятичныя дроби точныя и приближенныя. Въ только что указанномъ примѣрѣ, продолжая дѣленіе числителя на знаменателя, мы дошли до остатка 0 и тогда получили въ частномъ **точную** десятичную дробь, т.-е. такую, которая въ точности равняется данной обыкновенной дроби. Но такъ бываетъ не всегда. Можетъ случиться, что, сколько бы мы не продолжали дѣленіе, никогда не дойдемъ до остатка 0. Въ такомъ случаѣ данную обыкновенную дробь нельзя обратить въ точную десятичную, но можно найти приближенную десятичную дробь, которая отличается отъ обыкновенной дроби такъ мало, какъ угодно. Положимъ, напр., мы обращаемъ обыкновенную дробь $^{3}/_{14}$ въ десятичную. Дробь $^{3}/_{14}$ пред-

```
30   | 14
28     0,214...
 20
 14
  60
  56
   4
```

ставляетъ собою частное отъ дѣленія 3 на 14. Дѣля 3 на 14, мы не получимъ въ частномъ цѣлыхъ единицъ; поэтому ставимъ въ частномъ 0 на мѣсто цѣлыхъ и обращаемъ 3 въ десятыя доли, для чего къ 3 приписываемъ 0. Продолжая дѣленіе далѣе, мы въ

этомъ примѣрѣ никогда не дойдемъ до остатка 0, т.-е. дѣленіе никогда не окончится. Положимъ, что мы прекратили дѣленіе тогда, когда въ частномъ получили 0,214 и въ остаткѣ 4 тысячныхъ. Тогда это частное, т.-е. 0,214, разнится отъ $^3/_{14}$ менѣе, чѣмъ на 1 тысячную, такъ какъ мы отбрасываемъ въ частномъ то, что должно было бы получиться отъ дѣленія 4 тысячныхъ на 14, что, конечно, менѣе одной тысячной. Если бы мы прекратили дѣленіе тогда, когда въ частномъ послѣдняя цыфра означаетъ сотыя доли, то ошибка была бы менѣе одной сотой; вообще **ошибка менѣе одной доли того разряда, какимъ оканчивается приближенная десятичная дробь, полученная въ частномъ.**

146. Какія обыкновенныя дроби могутъ обратиться въ точныя десятичныя и какія не могутъ. Отвѣтомъ на этотъ вопросъ служатъ слѣдующія два предложенія:

1) Если въ обыкновенной дроби знаменатель, разложенный на простыхъ множителей, не содержитъ никакихъ множителей, отличающихся отъ 2 и 5, то такая дробь обращается въ точную десятичную.

2) Если въ обыкновенной дроби знаменатель, разложенный на простыхъ множителей, содержитъ какого-либо множителя, отличающагося отъ 2 и 5, и этотъ множитель не сокращается съ числителемъ, то такая дробь не можетъ обратиться въ точную десятичную.

Напр., дробь $^7/_{20}$, знаменатель которой, разложенный на простыхъ множителей (20=2.2.5), не содержитъ никакого множителя, отличающагося отъ 2 и 5, обращается въ точную десятичную, тогда какъ дробь $^3/_{14}$, знаменатель которой, разложенный на простыхъ множителей (14=2.7), содержитъ множителя 7, отличающагося отъ 2 и 5, и не сокращающагося съ числителемъ, не можетъ обратиться въ

точную десятичную (и, слѣд., обращается только въ приближенную десятичную дробь):

```
70 | 20          30 | 14
60   0,35         28   0,214...
---               --
100                20
100                14
---                --
 0                  60
                    56
                    --
                     4
```

$$\frac{7}{20} = 0{,}35 \qquad \frac{3}{14} = 0{,}214...$$

Объясненіе. Когда мы обращаемъ обыкновенныя дроби въ десятичныя, мы дѣлимъ числителя на знаменателя, приписывая къ каждому остатку по нулю. Но приписывать къ каждому остатку по нулю—это все равно, что къ дѣлимому (т.-е. къ числителю) приписывать сразу нѣсколько нулей. Поэтому при обращеніи обыкновенныхъ дробей въ десятичныя, мы тогда дойдемъ до остатка 0, когда, приписавъ къ числителямъ по нѣсколько нулей, мы можемъ получить числа, которыя раздѣляются на знаменателей безъ остатка. Значитъ, вопросъ о томъ, могутъ ли дроби $^7/_{20}$ и $^3/_{14}$ обратиться въ точныя десятичныя, зависитъ отъ того, могутъ ли числа:

70000 . . . . и 30000 . . . .

при нѣкоторомъ числѣ нулей на концѣ ихъ раздѣлиться безъ остатка: первое на 20, второе на 14. Числа эти можно написать такъ:

7 . 10 . 10 . 10.... и 3 . 10 . 10 . 10....

или 7 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5.... и 3 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5...

Чтобы эти произведенія раздѣлились на знаменателей, необходимо, чтобъ они содержали въ себѣ всѣхъ простыхъ множителей, входящихъ въ составъ знаменателей. Знаменатель 20=2 . 2 . 5 содержитъ только множителей 2 и 5. Эти

множители входятъ въ число 7 . 2 . 5 . 2 . 5...; значитъ, это число раздѣлится на 20 (а именно тогда, когда къ 7 припишемъ 2 нуля). Знаменатель 14=2 . 7 содержитъ, между прочимъ, множителя 7; этотъ множитель не входитъ въ число 3 . 2 . 5 . 2 . 5...; значитъ, число это никогда не раздѣлится на 14. Такимъ образомъ, дробь $^7/_{20}$ можетъ обратиться въ точную десятичную, а дробь $^3/_{14}$ не можетъ.

Подобно этому можно объяснить, что дробь $^4/_{125}$ обращается въ точную десятичную, такъ какъ всѣ множители ея знаменателя (125=5 . 5 . 5) сократятся съ числителемъ послѣ того, какъ къ нему припишемъ 3 нуля (4000=4 . 10 . . 10 . 10=4 . 2 . 5 . 2 . 5 . 2 . 5). Дробь $^{15}/_{24}$ тоже обратится въ точную десятичную, потому что, хотя въ ея знаменателя и входитъ множитель 3, но этотъ множитель сокращается съ числителемъ 15 ($^{15}/_{24}=^5/_8$). Дробь $^8/_{13}$ не обратится въ точную десятичную, а только въ приближенную, такъ какъ простое число 13 не сокращается ни съ числителемъ 8, ни съ множителями 2 и 5, на которые умножится числитель 8, когда къ нему припишемъ сколько угодно нулей.

147. Конечныя и безконечныя десятичныя дроби. Десятичная дробь, у которой число десятичныхъ знаковъ можетъ быть какъ угодно велико, наз. б е з к о н е ч н о ю, а та, у которой число десятичныхъ знаковъ опредѣленное,—к о н е ч н о ю. Можно сказать, что обыкновенная дробь, которая не обращается въ конечную десятичную, обращается въ безконечную десятичную.

148. Періодическія дроби. Безконечная десятичная дробь, у которой одна или нѣсколько цыфръ неизмѣнно повторяются въ одной и той же послѣдовательности, называется періодическою, а рядъ повторяющихся цыфръ называется **періодомъ**.

Періодическія дроби бываютъ **чистыя и смѣшанныя.** Чистою періодическою дробью называется такая, у которой періодъ

начинается тотчасъ послѣ запятой, напр., 2, 36 36 36...; смѣшанною—такая, у которой послѣ запятой есть одна или нѣсколько цыфръ, не повторяющихся, напр.: 0,5 23 23 23..... Періодическія дроби изображаютъ сокращенно такъ:

вмѣсто 2,36 36 . . . . пишутъ: 2,(36)
» 0,5 23 23 . . . » 0,5(23)

Если отъ обращенія обыкновенной дроби въ десятичную получается безконечная десятичная дробь, то эта безконечная дробь должна быть періодической.

Убѣдимся въ этомъ на какомъ-нибудь примѣрѣ. Пусть желаемъ обратить въ десятичную дробь $^{19}/_{7}$. Такъ какъ знаменатель 7 не составленъ изъ множителей 2 и 5 и эта дробь не сокращается на 7, то она не можетъ обратиться въ конечную десятичную. Слѣд., она обратится въ безконечную десятичную. Чтобы получить нѣсколько ея знаковъ, станемъ дѣлить 19 на 7. Такъ какъ дѣленіе не можетъ окончиться, то всевозможныхъ остатковъ должно быть безконечно много. Но остатки всегда меньше дѣлителя; поэтому различныхъ остатковъ не можетъ быть больше 6 слѣдующихъ: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Изъ этого слѣдуетъ, что при достаточномъ продолженіи дѣленія остатки начнутъ повторяться. Дѣйствительно, 7-й остатокъ оказался такой же, какъ и первый. Но если повторился остатокъ, то, приписавъ къ нему 0, мы получаемъ такое же дѣлимое, какое было раньше (50); значитъ, въ частномъ начнутъ получаться тѣ же цыфры, какія были раньше, т.-е. въ частномъ получится періодическая дробь.

```
19     |7
 50     2,71428571
  10
   30
    20
     60
      40
       50
        10
         3
```

Всякую періодическую дробь можно **обратить въ обыкновенную**, т.-е. можно найти такую обыкновенную дробь, отъ обращенія которой въ десятичную получается данная періодическая дробь. Для этого существуютъ два правила, которыя мы приводимъ безъ доказательства:

Правило 1-е. Чтобы обратить чистую періодическую дробь въ обыкновенную, берутъ ея періодъ числителемъ, а знаменателемъ пишутъ цыфру 9 столько разъ, сколько цыфръ въ періодѣ.

Примѣры: $0,(7) = \frac{7}{9}$; $2,(05) = 2\frac{5}{99}$; $0,(063) = \frac{63}{999} = \frac{7}{111}$.

Правило 2-е. Чтобы обратить смѣшанную періодическую дробь въ обыкновенную, изъ числа, стоящаго до второго періода, вычитаютъ число, стоящее до перваго періода, и полученную разность берутъ числителемъ, а знаменателемъ пишутъ цыфру 9 столько разъ, сколько цыфръ въ періодѣ, со столькими нулями на концѣ, сколько цыфръ между запятой и періодомъ.

Примѣры: 1) $0,35252... = \frac{352-3}{990} = \frac{349}{990}$

2) $0,26444... = \frac{264-26}{900} = \frac{238}{900} = \frac{119}{450}$

3) $5,7888... = 5\frac{78-7}{90} = 5\frac{71}{90}$

или $5,7888... = \frac{578-57}{90} = \frac{521}{90} = 5\frac{71}{90}$

Метрическая система мѣръ.

149. Описаніе. Изъ системъ именованныхъ мѣръ, употребляемыхъ въ другихъ государствахъ, особенно замѣчательна своею простотою французская или **метрическая** система мѣръ, принятая во многихъ странахъ.

За единицу длины въ этой системѣ принята одна десятимилліонная часть четверти земного меридіана; эта единица называется «**метръ**». Метръ раздѣляется на 10 равныхъ частей, $^1/_{10}$ часть метра—еще на 10 равныхъ частей, $^1/_{100}$ метра, въ свою очередь, на 10 равныхъ частей. Съ другой стороны, употребляются мѣры въ 10 метровъ, въ 100 метровъ и т. д. Чтобы назвать подраздѣленія метра, присоединяютъ къ слову «метръ» латинскія слова: **деци** (для обозначенія $^1/_{10}$), **центи** ($^1/_{100}$), **милли** ($^1/_{1000}$); такъ, дециметръ означаетъ $^1/_{10}$ часть метра, центиметръ—$^1/_{100}$ часть метра, миллиметръ—$^1/_{1000}$ часть метра. Впрочемъ, слово «центиметръ» чаще замѣняется французскимъ названіемъ «сантиметръ».

Мѣры, кратныя метра, называются при помощи греческихъ словъ: **дека** (10), **гекто** (100), **кило** (1000) и **миріа** (10000); такъ, декаметръ означаетъ 10 метровъ, гектометръ— 100 метровъ, километръ—1000 метровъ (около версты).

1 дециметръ, раздѣленный на сантиметры и миллиметры (въ натуральную величину).

Полезно замѣтить слѣдующія приблизительныя соотношенія метрическихъ мѣръ съ русскими:

1 метръ=$22^1/_2$ вершка=1,4 аршина=$3^1/_4$ фута;

1 дюймъ=$2^1/_2$ сант.; 1 вершокъ=$4^1/_2$ сант.;

1 футъ=$30^1/_2$ сант.; 1 километръ почти $^{15}/_{16}$ версты.

Названія метрическихъ мѣръ принято сокращенно обозначать такъ: метръ (м.), дециметръ (дцм.), сантиметръ (см.), миллиметръ (мм.), километръ (км).

Для измѣренія поверхностей употребляются квадратныя мѣры: кв. метръ, кв. декаметръ и т. п. Каждая изъ такихъ мѣръ содержитъ въ себѣ 100 мѣръ слѣдующаго низшаго разряда; такъ, кв. дециметръ содержитъ 100 кв. сантиметровъ.

Для измѣренія площади полей употребляется **аръ** и **гектаръ**. Аръ есть **квадратный декаметръ**; гектаръ равенъ 100 арамъ. Гектаръ приблизительно равенъ 0,9 нашей десятины.

Для измѣренія объемовъ служатъ кубическія мѣры: куб. метръ, куб. дециметръ и т. д. Каждая изъ этихъ мѣръ содержитъ въ себѣ 1000 мѣръ слѣдующаго низшаго разряда; такъ, кубическій метръ содержитъ 1000 куб. дециметровъ. Объемъ, равный куб. метру, называется **«стеръ»**, если онъ служитъ для измѣренія количества дровъ, угля и т. п.

Для измѣренія вмѣстимости сосудовъ (и объемовъ жидкихъ и сыпучихъ тѣлъ) употребляется **«литръ»**. Литръ

есть объемъ, равный одному **кубическому дециметру.** На наши мѣры онъ приблизительно равенъ 0,3 гарнца. Употребительны также децилитръ и сантилитръ, декалитръ и гектолитръ.

Единицею вѣса служитъ **«граммъ»**. Это есть **вѣсъ одного кубическаго сантиметра чистой воды.** Граммъ подраздѣляется на дециграммы, центиграммы (или сантиграммы) и миллиграммы; вѣса, кратные грамма, суть: декаграммъ, гектограммъ и килограммъ. На наши мѣры эти единицы приблизительно составляютъ:

1 граммъ=22½ доли=около ¼ золотн.;

1 килограммъ=2½ фунта (точнѣе 2,44 фунта);

1 пудъ=16,38 килогр.; 1 фунтъ=409½ грам.

Употребительна еще мѣра **«тонна»**, равная 1000 килограмм. (около **61 пуда**).

Монетною единицею служитъ **«франкъ»**. Это есть серебряная монета, вѣсящая ровно 5 граммовъ и содержащая на 9 частей чистаго серебра 1 часть мѣди. Сотая часть франка называется **«сантимъ»**. На наши деньги **1 франкъ приблизительно равенъ 37½ коп.**

150. Раздробленіе и превращеніе. Вслѣдствіе того, что единичное отношеніе мѣръ метрической системы равно 10, всѣ дѣйствія надъ именованными числами, выраженными по этой системѣ, выполняются проще, чѣмъ по какой-либо другой системѣ.

Пусть, напр., требуется **раздробить** въ метры 2 килом. 5 гектом. 7 декам. 3 метра 8 децим. 4 центим. и 6 миллим. Такъ какъ километры—это тысячи метровъ, гектометры—сотни метровъ и т. д., то, очевидно, данное составное именов. число выразится въ метрахъ такъ: 2573,846 метровъ. Перенося въ этой десятичной дроби запятую вправо или влѣво, найдемъ, что: 2573,846 мет.=257,3846 декам.=25,73846

гектом.=2,573846 килом.=25738,46 дециим.=257384,6 сантим.=2573846 миллим.

Пусть еще требуется 2380746 миллиграммовъ **превратить** въ мѣры высшихъ разрядовъ. Такъ какъ граммъ=1000 миллигр., то 2380746 миллигр.=2380,746 грам.=2 килогр. 3 гектогр. 8 декагр. 7 дециг. 4 сантигр. 6 миллигр.

Дѣйствія надъ метрическими именованными числами совершаются такъ, какъ надъ десятичными дробями.

Отношеніе и пропорція.

152. Что такое отношеніе. Отношеніемъ двухъ однородныхъ величинъ наз. отвлеченное число, на которое надо умножить вторую величину, чтобы получить первую.

Такъ, отношеніе вѣса въ 2 пуда къ вѣсу въ 10 фунтовъ равно отвлеченному числу 8, такъ какъ 10 фунт. надо умножить на 8, чтобы получить 2 пуда; отношеніе вѣса въ 10 фунтовъ къ вѣсу въ 2 пуда есть отвлеченное число $^1/_8$, такъ какъ 10 ф.=2 п.$\times^1/_8$; отношеніе отвлеченнаго числа 25 къ отвлеченному числу 100 равно $^1/_4$, такъ какъ 25= =100$\times^1/_4$.

Величины (или числа), между которыми разсматривается отношеніе, называются **членами** отношенія; первая величина наз. **предыдущимъ** членомъ, вторая величина— **послѣдующимъ** членомъ.

Когда отношеніе есть цѣлое число, то оно показываетъ, сколько разъ предыдущій членъ содержитъ въ себѣ послѣдующій; такъ, отношеніе 2 пудовъ къ 10 фунтамъ равно цѣлому числу 8 (т.-е. 2 пуда=10 ф.$\times$8); это значитъ, что 2 пуда содержатъ въ себѣ 10 фунтовъ 8 разъ.

Когда отношеніе есть дробь, то оно означаетъ, какую дробь послѣдующаго члена составляетъ предыдущій членъ; такъ, отношеніе 10 фунтовъ къ 2 пудамъ равно дроби $^1/_8$

(т.-е. 10 ф.=2 п.×$^1/_8$); это значитъ, что 10 ф. составляютъ $^1/_8$ часть 2-хъ пудовъ.

Изъ того, что предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе, слѣдуетъ, что предыдущій членъ можно разсматривать, какъ дѣлимое, послѣдующій членъ, какъ дѣлителя, а отношеніе—какъ частное. Поэтому нахожденіе отношенія обозначается знакомъ дѣленія; такъ, отношеніе 2 пудовъ къ 10 фунтамъ можно выразить такъ:

$$2 \text{ пуда} : 10 \text{ фунт.} \quad \text{или} \quad \frac{2 \text{ пуда.}}{10 \text{ фунт.}}$$

Отношеніе именованныхъ чиселъ всегда можно замѣнить отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ. Для этого стоитъ только выразить именованныя числа въ одинаковыхъ мѣрахъ и взять отношеніе получившихся отъ этого чиселъ. Напр. отношеніе 10 фун. 16 л.: 3 л. равно отношенію 336 л. : 3 л., а это отношеніе можно замѣнить отношеніемъ отвлеченныхъ чиселъ 336 : 3.

Въ послѣдующемъ изложеніи мы будемъ говорить объ отношеніи отвлеченныхъ чиселъ.

153. Зависимость между членами отношенія и самимъ отношеніемъ та же самая, какая существуетъ между дѣлимымъ, дѣлителемъ и частнымъ. Такъ:

1) Предыдущій членъ равенъ послѣдующему, умноженному на отношеніе (дѣлимое равно дѣлителю, умноженному на частное).

2) Послѣдующій членъ равенъ предыдущему, дѣленному на отношеніе (дѣлитель равенъ дѣлимому, раздѣленному на частное).

3) Отношеніе увеличивается (или уменьшается) во столько разъ, во сколько увеличивается (или уменьшается) предыдущій членъ.

4) Отношеніе уменьшается (или увеличивается) во столько разъ, во сколько увеличивается (или уменьшается) послѣдующій членъ.

5) Отношеніе не измѣняется, если оба члена его увеличены или уменьшены въ одинаковое число разъ.

154. Нахожденіе неизвѣстнаго члена. Если въ отношеніи неизвѣстенъ предыдущій членъ, то онъ находится умноженіемъ (зависимость 1); если же неизвѣстенъ послѣдующій, то онъ получается дѣленіемъ (завис. 2); напр. (неизвѣстный членъ обозначенъ буквой x):

1) $x : 7^1/_2 = 2$; отсюда: $x = 7^1/_2 \times 2 = 15$

2) $15 : x = 2$; » $x = 15 : 2 = 7^1/_2$

155. Сокращеніе отношенія. Если оба члена отношенія дѣлятся на одно и то же число, то мы можемъ сократить ихъ на это число, отчего отношеніе не измѣняется (завис. 5); напр.:

отношеніе 42 : 12 равно отношенію 7 : 2.

156. Уничтоженіе дробныхъ членовъ. Если умножимъ оба члена отношенія на одно и то же число, то отношеніе не измѣнится (завис. 4). Пользуясь этимъ свойствомъ, мы можемъ всякое отношеніе, у котораго одинъ или оба члена дробные, замѣнить отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ. Пусть, напр., дано отношеніе $^7/_3 : 5$. Умножимъ оба члена этого отношенія на 3; тогда оно замѣнится отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ 7 : 15.

Если оба члена отношенія—дроби, то достаточно привести ихъ къ общему знаменателю и затѣмъ его отбросить; напр.: отношеніе $^5/_{14} : {}^{10}/_{21}$, послѣ приведенія дробей къ общему знаменателю, обратится въ такое: $^{15}/_{42} : {}^{20}/_{42}$. Откинувъ знаменателей, мы увеличимъ оба члена въ 42 раза, отчего отношеніе не измѣнится; тогда получимъ отношеніе цѣлыхъ чиселъ 15 : 20 или 3 : 4.

157. Обратныя отношенія. Два отношенія называются обратными, если предыдущій членъ одного изъ нихъ служитъ послѣдующимъ членомъ другого и обратно. Таковы напр., отношенія: 2 пуда : 10 фунт. и 10 фунт. : 2 пуда.

158. Что такое пропорція. Равенство, выражающее, что одно отношеніе равно другому отношенію, наз. пропорціей. Таковы, напр., два равенства:

$$8 : 4 = 20 : 10 \qquad \frac{15}{5} = \frac{27}{9}$$

Пропорція читается различно; напр., первую изъ написанныхъ выше пропорцій можно читать такъ:

отношеніе 8 къ 4 равно отношенію 20 къ 10;

или 8 относится къ 4 такъ, какъ 20 относится къ 10.

Изъ 4 чиселъ, составляющихъ пропорцію, первое и послѣднее называются **крайними**, второе и третье—**средними членами** пропорціи.

159. Свойство пропорціи. Въ пропорціи произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ.

Такъ, въ пропорціи 8 : 4=20 : 10 произведеніе крайнихъ членовъ есть 80 и произведеніе среднихъ членовъ также 80.

Чтобы доказать это свойство для всякой пропорціи, обозначимъ члены пропорціи такъ:

1 чл. : 2 чл.=3 чл. : 4 чл.

По свойству отношеній должно быть:

1 членъ=2 чл.×отношеніе
3 членъ=4 чл.×отношеніе,

при чемъ оба отношенія, входящія въ эти равенства, равны.

Умножимъ обѣ части перваго равенства на 4-й членъ, а обѣ части второго равенства—на 2-й членъ, отчего равенства

не нарушатся (если равныя числа умножимъ на равныя, то и получимъ равныя):

1 чл. × 4 чл. = 2 чл. × отн. × 4 чл.

3 чл. × 2 чл. = 4 чл. × отн. × 2 чл.

Правыя части этихъ равенствъ состоятъ изъ одинаковыхъ множителей и потому равны другъ другу; значитъ, равны и лѣвыя части равенствъ. Но 1-й и 4-й члены суть крайніе, а 3-й и 2-й средніе; значитъ, произведеніе крайнихъ равно произведенію среднихъ.

160. Обратное предложеніе. Если произведеніе двухъ какихъ-нибудь чиселъ равно произведенію двухъ другихъ чиселъ, то изъ этихъ 4-хъ чиселъ можно составить пропорціи, беря сомножителей одного произведенія за крайніе, а сомножителей другого произведенія—за средніе члены пропорцій.

Возьмемъ, напр., двѣ пары чиселъ: 4 и 21, 7 и 12, такія, что произведеніе первой пары равно произведенію второй пары:

$$4 \times 21 = 7 \times 12.$$

Раздѣлимъ оба эти равныя произведенія на каждое изъ слѣдующихъ 4-хъ произведеній: 4×7, 4×12, 21×7, 21×12, т.-е. на каждое изъ такихъ произведеній, въ которыхъ одинъ сомножитель взятъ изъ перваго произведенія (4×21), а другой—изъ второго произведенія (7×12). Очевидно, что если мы равныя числа раздѣлимъ на равныя числа, то получимъ равныя частныя; значитъ:

$$\frac{4 \times 21}{4 \times 7} = \frac{7 \times 12}{4 \times 7}; \quad \frac{4 \times 21}{4 \times 12} = \frac{7 \times 12}{4 \times 12}; \quad \frac{4 \times 21}{21 \times 7} = \frac{7 \times 12}{21 \times 7}; \quad \frac{4 \times 21}{21 \times 12} = \frac{7 \times 12}{21 \times 12}.$$

Сокративъ эти равенства, получимъ пропорціи:

$$\frac{21}{7} = \frac{12}{4}; \quad \frac{21}{12} = \frac{7}{4}; \quad \frac{4}{7} = \frac{12}{21}; \quad \frac{4}{12} = \frac{7}{21},$$

въ которыхъ крайніе члены суть сомножители одного изъ данныхъ произведеній, а средніе члены—сомножители другого даннаго произведенія.

160,а. Повѣрка пропорціи. Пропорцію можно повѣрять, убѣждаясь въ равенствѣ между произведеніемъ крайнихъ и среднихъ членовъ; напр., пропорція $4 : 7 = 868 : 1519$ вѣрна, такъ какъ въ ней произведеніе крайнихъ равно 6076 и произведеніе среднихъ равно 6076.

161. Нахожденіе неизвѣстнаго члена пропорціи. Возьмемъ пропорцію: $8 : 0{,}6 = x : {}^3/_4$, въ которой неизвѣстенъ одинъ изъ среднихъ членовъ, обозначенный буквой x. Въ ней произведеніе крайнихъ членовъ $= 8 \times {}^3/_4 = 6$; значитъ, произведеніе ея среднихъ членовъ тоже должно быть 6; но одинъ изъ среднихъ членовъ есть 0,6; значитъ, другой средній получится, если 6 раздѣлимъ на 0,6:

$$x = 6 : 0{,}6 = 60 : 6 = 10$$

Такимъ образомъ, **средній членъ пропорціи равенъ произведенію крайнихъ, дѣленному на другой средній.**

Подобно этому, **крайній членъ пропорціи равенъ произведенію среднихъ, дѣленному на другой крайній.**

162. Перестановки членовъ пропорціи. Въ каждой пропорціи можно переставить: 1) крайніе члены, 2) средніе члены и 3) крайніе на мѣсто среднихъ, а средніе на мѣсто крайнихъ. Отъ такихъ перестановокъ пропорція не нарушится, потому что не нарушится равенство между произведеніемъ крайнихъ и произведеніемъ среднихъ членовъ. Возьмемъ, напр., пропорцію:

$$1)\ 4 : 7 = 12 : 21$$

Переставивъ въ ней средніе члены, получимъ:

$$2)\ 4 : 12 = 7 : 21$$

Переставимъ въ каждой изъ этихъ пропорцій крайніе члены; тогда получимъ еще двѣ пропорціи:

$$3)\ 21 : 7 = 12 : 4 \qquad 4)\ 21 : 12 = 7 : 4$$

Наконецъ, переставимъ въ каждой изъ полученныхъ 4-хъ пропорцій средніе члены на мѣсто крайнихъ и наоборотъ; тогда получимъ еще 4 пропорціи:

5) 7 : 4=21 : 12 7) 7 : 21=4 : 12
6) 12 : 4=21 : 7 8) 12 : 21=4 : 7

Замѣчаніе. Пропорція, очевидно, не нарушится, если мы переставимъ ея отношенія, т.-е. первое отношеніе поставимъ вторымъ, а второе первымъ.

163. Непрерывная пропорція. Пропорція называется непрерывной, если у нея оба средніе или оба крайніе члена равны другъ другу. Таковы, напр., пропорціи:

32 : 16=16 : 8 20 : 5=80 : 20

Если въ послѣдней пропорціи переставимъ второе отношеніе съ первымъ, то получимъ: 80 : 20=20 : 5; отсюда видно, что непрерывную пропорцію всегда можно представить такъ, что одинаковы будутъ оба средніе ея члена.

163,а. Среднее геометрическое. Повторяющійся членъ непрерывной пропорціи называется **среднимъ геометрическимъ числомъ** двухъ другихъ членовъ пропорціи. Такъ, 16 есть среднее геометрическое 32 и 8.

164. Среднее ариѳметическое. **Среднимъ ариѳметическимъ нѣсколькихъ чиселъ называется частное отъ дѣленія суммы этихъ чиселъ на число ихъ.**

Такъ, среднее ариѳметическое 5-ти чиселъ: 10, 2, 18, 4 и 6 равно:

$$\frac{10+2+18+4+6}{5}=8.$$

165. Сложныя пропорціи. Изъ двухъ или болѣе пропорцій можно составить новыя пропорціи, называемыя сложными, основываясь на слѣдующихъ истинахъ:

1) **Если соотвѣтственные члены нѣсколькихъ пропорцій перемножимъ, то получимъ новую пропорцію.**

Пусть, напр., имѣемъ двѣ пропорціи:

$$40 : 10 = 100 : 25 \text{ (отношеніе}=4)$$
$$4 : 2 = 10 : 5 \text{ (отношеніе}=2)$$

Перемноживъ соотвѣтственные члены этихъ пропорцій, получимъ такую сложную пропорцію:

$$(40 \,.\, 4) : (10 \,.\, 2) = (100 \,.\, 10) : (25 \,.\, 5),$$

т.-е. $160 : 20 = 1000 : 125$ (отношеніе$=8$)

У такой пропорціи каждое отношеніе равно произведенію отношеній данныхъ пропорцій.

2) **Если члены одной пропорціи раздѣлимъ на соотвѣтственные члены другой пропорціи, то получимъ новую пропорцію.**

Напр., если раздѣлимъ соотвѣтственные члены взятыхъ выше пропорцій, то получимъ сложную пропорцію:

$\frac{40}{8} : \frac{10}{4} = \frac{100}{10} : \frac{25}{5}$, т.-е. $5 : 2^1/_2 = 10 : 5$ (отношеніе$=2$).

У такой пропорціи каждое отношеніе равно частному отъ дѣленія отношеній данныхъ пропорцій.

166. Производныя пропорціи. Изъ одной пропорціи можно получить нѣсколько другихъ пропорцій, называемыхъ производными, основываясь на слѣдующихъ соображеніяхъ:

Возьмемъ какое-нибудь отношеніе, напр., $21 : 7$. Если къ предыдущему его члену приложимъ послѣдующій, то получимъ новое отношеніе: $(21+7) : 7$, которое больше прежняго на одну единицу. Если же изъ предыдущаго члена вычтемъ послѣдующій, то получимъ новое отношеніе: $(21-7) : 7$, которое меньше прежняго на одну единицу.

Замѣтивъ это, возьмемъ какую-нибудь пропорцію:

$$21 : 7 = 30 : 10$$

и составимъ изъ нея новую пропорцію такимъ образомъ:

$$(21+7) : 7=(30+10) : 10 \qquad (1)$$

Эта пропорція вѣрна, потому что каждое отношеніе въ ней больше отношеній данной пропорціи на одно и то же число, именно на 1. Составленную нами производную пропорцію можно высказать такъ:

сумма членовъ перваго отношенія относится къ его послѣдующему члену, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ его послѣдующему члену.

Составимъ теперь изъ данной пропорціи такую:

$$(21-7) : 7=(30-10) : 10 \qquad (2)$$

Эта пропорція вѣрна, потому что каждое отношеніе въ ней меньше отношеній данной пропорціи на одно и то же число, именно на 1. Составленную нами вторую производную пропорцію можно высказать такъ:

разность членовъ перваго отношенія относится къ его послѣдующему члену, какъ разность членовъ второго отношенія относится къ его послѣдующему члену.

Переставимъ средніе члены въ первой производной пропорціи и въ данной:

$$(21+7) : (30+10)=7 : 10$$
$$21 : 30=7 : 10$$

Въ этихъ двухъ пропорціяхъ вторыя отношенія равны; значитъ, равны и первыя:

$$(21+7) : (30+10)=21 : 30$$

или (переставивъ средніе члены):

$$(21+7) : 21=(30+10) : 30 \qquad (3)$$

Эту 3-ю производную пропорцію можно высказать такъ: **сумма членовъ перваго отношенія относится къ его предыдущему члену, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ его предыдущему члену.**

Переставимъ средніе члены во второй производной пропорціи и въ данной:

$$(21-7) : (30-10)=7 : 10$$

$$21 : 30=7 : 10$$

Откуда: $(21-7) : (30-10)=21 : 30$

или $(21-7) : 21=(30-10) : 30$ (4)

т.-е. **разность членовъ перваго отношенія относится къ его предыдущему члену, какъ разность членовъ второго отношенія относится къ его предыдущему члену.**

Переставимъ средніе члены въ первой и второй производныхъ пропорціяхъ:

$$(21+7) : (30+10)=7 : 10$$

$$(21-7) : (30-10)=7 : 10$$

Откуда: $(21+7) : (30+10)=(21-7) : (30-10)$

или $(21+7) : (21-7)=(30+10) : (30-10)$ (5)

т.-е. **сумма членовъ перваго отношенія относится къ ихъ разности, какъ сумма членовъ второго отношенія относится къ ихъ разности.**

Задачи на пропорціональныя величины.

Простое тройное правило.

167. Простымъ тройнымъ правиломъ называется способъ рѣшать такія задачи, въ которыхъ по даннымъ 3 числамъ отыскивается 4-ое пропорціональное, т.-е. отыскивается такое число, которое вмѣстѣ съ тремя данными могло бы составить пропорцію.

Всѣ задачи на тройное правило могутъ быть раздѣлены на 2 группы; различіе между этими группами будетъ видно изъ двухъ слѣдующихъ задачъ.

Задача 1-я. 8 арш. сукна стоятъ 30 руб.; сколько стоятъ 15 арш. этого сукна?

Назовемъ буквою x стоимость 15-и арш. сукна и расположимъ данныя и искомое числа такъ:

8 арш..... 30 руб.
15 » ..... x »

Прежде чѣмъ рѣшать задачу, разсмотримъ, какая зависимость существуетъ между данными числами и искомымъ.

Въ этой задачѣ говорится о двухъ величинахъ: о числѣ аршинъ сукна и о стоимости ихъ. Эти двѣ величины зависятъ одна отъ другой, потому что если измѣнится число аршинъ, то измѣнится и стоимость ихъ; а именно:

если **увеличится** число аршинъ, то **увеличится** и стоимость ихъ, и притомъ **въ одинаковое число разъ;**

если **уменьшится** число аршинъ, то **уменьшится** и стоимость ихъ, и притомъ **въ одинаковое число разъ.**

Величины, находящіяся въ такой зависимости, называются **пропорціональными.**

Уяснивъ зависимость двухъ величинъ нашей задачи, выразимъ ходъ рѣшенія ея слѣдующими строчками:

Такъ какъ 8 арш. стоятъ 30 руб.
и стоимость сукна пропорціональна числу аршинъ его,

то 1 арш. стоитъ $\frac{30}{8}$ руб.

слѣд., 15 арш. стоятъ $\frac{30}{8} \cdot 15 = 56^1/_4$ руб.

Задача 2-я. 6 человѣкъ рабочихъ оканчиваютъ нѣкоторую работу въ 18 дней; во сколько дней окончатъ ту же работу 9 человѣкъ, работая такъ же успѣшно, какъ и первые?

Пусть 9 человѣкъ оканчиваютъ работу въ x дней:

6 чел..... 18 дней.
9 чел..... x »

Въ этой задачѣ говорится о двухъ величинахъ: о числѣ рабочихъ и о числѣ дней, въ теченіе которыхъ исполняется работа. Эти величины зависятъ одна отъ другой, а именно:

если **увеличится** число рабочихъ, то **уменьшится** число дней (потребное для окончанія той же работы), и притомъ **въ одинаковое число разъ;**

если **уменьшится** число рабочихъ, то **увеличится** число дней (потребное для окончанія той же работы), и притомъ **въ одинаковое число разъ.**

Величины, находящіяся въ такой зависимости, называются **обратно пропорціональными.** Въ противоположность обратной пропорціональности, обыкновенная пропорціональность, о которой говорилось въ первой задачѣ, называется прямою.

Уяснивъ зависимость между двумя величинами нашей задачи, выразимъ ходъ ея рѣшенія слѣдующими строчками:

Такъ какъ 6 человѣкъ оканчиваютъ работу въ 18 дней, и число дней обратно пропорціонально числу рабочихъ,

то 1 чел. окончитъ работу въ 18 . 6 дней;

слѣд., 9 чел. окончатъ работу въ $\frac{18 \cdot 6}{9} = 12$ дней.

Способъ, которымъ мы рѣшили эти двѣ задачи, извѣстенъ подъ названіемъ **«приведеніе къ единицѣ»,** такъ какъ одно изъ данныхъ чиселъ приводится при этомъ къ 1.

167,а. Замѣчаніе. Задачи на простое тройное правило можно рѣшать **посредствомъ пропорціи.** Напр., при рѣшеніи 1-й задачи можно разсуждать такъ: стоимость сукна пропорціональна числу аршинъ его; поэтому 15 арш. стоятъ болѣе 8-и арш. во столько разъ, во сколько 15 болѣе 8; значитъ, обозначивъ искомую стоимость черезъ x, получимъ пропорцію: $x : 30 = 15 : 8$, откуда:

$$x = (30 \times 15) : 8 = 56\ ^1/_4 \text{ руб.}$$

Для рѣшенія второй задачи можно разсуждать такъ: число дней работы обратно пропорціонально числу рабочихъ; поэтому 9 чел. окончатъ работу въ меньшее число дней, чѣмъ 6 чел., и во столько разъ, во сколько 6 меньше 9; значитъ, искомое число x дней должно удовлетворять пропорціи: $x : 18 = 6 : 9$, откуда: $x = (18 \times 6) : 9 = 12$ дней.

Сложное тройное правило.

168. Сложнымъ тройнымъ правиломъ наз. способъ рѣшать такія задачи, которыя приводятся къ нѣсколькимъ задачамъ на простое тройное правило.

Задача. Для освѣщенія 18 комнатъ въ 48 дней издержано 120 фун. керосину, при чемъ въ каждой комнатѣ горѣло по 4 лампы. На сколько дней достанетъ 125 фун. керосину, если освѣщать 20 комнатъ и въ каждой комнатѣ будетъ горѣть по 3 лампы?

Расположимъ данныя этой задачи въ двѣ такія строчки (неизвѣстное число поставимъ въ послѣднемъ столбцѣ):

18 ком.—120 фун.—4 лам.—48 дней
20 » —125 » —3 » — x »

Искомое число дней было бы 48, если бы число комнатъ было 18, число фунтовъ керосину было 120 и число лампъ въ каждой комнатѣ было 4. Но всѣ эти числа замѣнены въ вопросѣ задачи новыми, отчего, вѣроятно, измѣнится и число дней изъ 48 въ какое-нибудь иное. Чтобы удобнѣе узнать, какъ именно измѣнится число дней, предположимъ, что сначала одно число верхней строчки замѣнено новымъ числомъ, а потомъ и другое, и третье. Такъ, допустимъ, что сначала число комнатъ измѣнено изъ 18 въ 20, потомъ число фунтовъ измѣнено изъ 120 въ 125 и, наконецъ, число лампъ измѣнено изъ 4 въ 3.

Когда измѣнимъ число комнатъ изъ 18 въ 20, а прочія числа оставимъ тѣ же самыя, то мы получимъ упрощенную задачу, которую можно высказать такъ:

для освѣщенія 18 комнатъ керосину достаетъ на 48 дней; на сколько дней достанетъ керосину для освѣщенія 20 комн. (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ, т.-е. если керосину идетъ 120 фун. и въ каждой комнатѣ будетъ горѣть по 4 лампы)?

Эта задача на простое тройное правило. Рѣшимъ ее приведеніемъ къ 1.

Число дней обратно пропорціонально числу комнатъ; поэтому если при освѣщеніи 18 комнатъ керосину достаетъ на 48 дней, то при освѣщеніи только одной комнаты его достанетъ на 48 . 18 дней, а при освѣщеніи 20 комнатъ число дней окажется $\frac{48 \,.\, 18}{20}$ (что равно $43^1/_5$ дня, но вычислять эту формулу теперь безполезно).

Замѣнимъ теперь 120 фун. керосину 125-ю фун. Тогда получится такая задача на простое тройное правило:

120 фун. керосину сгораетъ въ $\frac{48 \,.\, 18}{20}$ дней; во сколько дней сгоритъ 125 фун. керосину (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ)?

Число дней прямо пропорціонально числу фунтовъ; поэтому 1 фунтъ керосину сгоритъ въ $\frac{48 \,.\, 18}{20 \,.\, 120}$ дней, а 125 фун. сгорятъ въ $\frac{48 \,.\, 18 \,.\, 125}{20 \,.\, 120}$ дней.

Наконецъ, замѣнимъ 4 лампы 3-мя лампами. Тогда получится такая задача на простое тройное правило:

если въ каждой комнатѣ горятъ 4 лампы, то керосину достанетъ на $\frac{48 \,.\, 18 \,.\, 125}{20 \,.\, 120}$ дней; на сколько дней доста-

нетъ керосину, если въ комнатѣ будетъ горѣть по 3 лампы (при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ)?

Число дней обратно пропорціонально числу лампъ; поэтому если будетъ горѣть 1 лампа, то дней окажется $\frac{48 \cdot 18 \cdot 125 \cdot 4}{20 \cdot 120}$, а при горѣніи 3-хъ лампъ ихъ должно быть:

$$x = \frac{48 \cdot 18 \cdot 125 \cdot 4}{20 \cdot 120 \cdot 3}.$$

Теперь приняты во вниманіе всѣ условія вопроса; остается сократить и вычислить полученную формулу; окончательно найдемъ: $x=60$ дней.

Задачи на проценты.

169. Что называется процентомъ. «Процентомъ» какого-либо числа называется одна сотая часть этого числа; слѣд., два, три... процента какого-нибудь числа означаютъ двѣ, три... сотыхъ этого числа.

Такъ, если говорятъ, что въ учебномъ заведеніи число успѣвающихъ учениковъ составляетъ 75 процентовъ всего числа учащихся, то это значитъ, что первое число составляетъ 75 сотыхъ второго числа (или, что все равно, на каждыхъ 100 учениковъ приходится 75 успѣвающихъ и 25 не успѣвающихъ). Если, напр., число всѣхъ учениковъ будетъ 360, то число успѣвающихъ окажется:

$$360 \cdot \frac{75}{100} = 360 \cdot \frac{3}{4} = 270.$$

Процентъ обозначается знакомъ %; напр., 5% означаетъ 5 процентовъ. Такимъ образомъ:

50% обозначаютъ $\frac{50}{100}$, т.-е. $\frac{1}{2}$;

25% » $\frac{25}{100}$, т.-е. $\frac{1}{4}$;

75% обозначаютъ $\frac{75}{100}$, т.-е. $\frac{3}{4}$;

10% » $\frac{10}{100}$, т.-е. $\frac{1}{10}$;

5% » $\frac{5}{100}$, т.-е. $\frac{1}{20}$;

4% » $\frac{4}{100}$, т.-е. $\frac{1}{25}$; и т. д.

Чаще всего слово «процентъ» употребляется въ коммерческихъ вопросахъ, когда рѣчь идетъ о прибыли или убыткѣ. Напр., говорятъ, что торговецъ получилъ 20 процентовъ прибыли на затраченный имъ капиталъ. Это надо понимать такъ, что онъ получилъ прибыли 20 сотыхъ капитала, иначе сказать, 20 рублей на каждые 100 рублей, или 20 коп. на каждыя 100 коп. капитала.

169,а. Нѣкоторыя названія, встрѣчающіяся въ задачахъ на проценты. Условимся относительно смысла нѣкоторыхъ словъ.

Когда одно лицо занимаетъ у другого деньги, то при этомъ часто ставится условіе, чтобы **должникъ** уплачивалъ **заимодавцу** (**кредитору**) опредѣленные ежегодные проценты. Если, напр., говорятъ, что нѣкто занялъ 500 руб. по 7% годовыхъ, то это значитъ, что должникъ обязался, во-1, уплатить по истеченіи условленнаго срока эти 500 руб., а во-2, сверхъ этой суммы уплачивать заимодавцу ежегодно до конца срока по 7 руб. за каждые занятые 100 руб. или по 7 коп. за каждый рубль (т.-е. по 35 руб. за занятые 500 р.).

Случается, что лица, имѣющія свободныя деньги, отдаютъ ихъ въ банкъ. Въ такомъ случаѣ банкъ уплачиваетъ этимъ лицамъ за пользованіе ихъ деньгами опредѣленные ежегодные проценты. Въ свою очередь банкъ выдаетъ ссуды за извѣстные ежегодные проценты.

Капиталъ, отданный на проценты, называется **начальнымъ капиталомъ**; прибыль, получаемая въ теченіе одного года и выраженная въ сотыхъ доляхъ начальнаго капитала, называется **процентною таксою** (или просто процентомъ); прибыль на весь капиталъ—**процентными деньгами** (или просто процентами); начальный капиталъ, сложенный съ процентными деньгами, называется **наращеннымъ** капиталомъ. Если, напр., 200 руб. отданы въ **ростъ** *) на 1 годъ по 5%, то начальный капиталъ—это 200 руб., процентная такса—5, процентныя деньги за годъ—10 р., наращенный капиталъ—210 руб.

170. Простые и сложные проценты. Проценты бываютъ простые и сложные. Чтобы показать разницу между тѣми и другими, возьмемъ примѣръ. Положимъ, что кто-нибудь отдалъ въ банкъ 100 руб. по 5%. Если это лицо по прошествіи года не возьметъ своихъ 5-и руб. процентныхъ денегъ, то его капиталъ обратится въ 105 руб. Можетъ быть поставлено условіе, чтобы въ теченіе второго года процентныя деньги наростали не только на начальный капиталъ, т.-е. на 100 руб., но еще и на тѣ 5 руб., которые наросли въ теченіе перваго года; также и въ слѣдующіе года. Или же можетъ быть условлено, чтобы въ теченіе второго и слѣдующихъ годовъ проценты считались только на начальный капиталъ, т.-е. на 100 руб., хотя бы лицо, положившее капиталъ, и не брало ежегодно процентныхъ денегъ.

Когда процентныя деньги считаются не только на начальный капиталъ, но и на проценты, образовавшіеся отъ прошлыхъ лѣтъ и не взятые лицомъ, которому принадлежитъ капиталъ, то проценты называются сложными;

*) Т.-е. отданы въ банкъ или частному лицу на проценты.

если же процентныя деньги считаются только на начальный капиталъ, то проценты называются простыми.

Во всѣхъ задачахъ, которыя будутъ приведены ниже, предполагаются простые проценты; это всего чаще бываетъ въ дѣйствительности.

Замѣчаніе. Когда разсчетъ идетъ на простые проценты, то **процентныя деньги пропорціональны времени и капиталу**, при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ. Если, напр., капиталъ 100 р. и процентная такса 5%, то процентныя деньги за 1 годъ будутъ 5 р., за 2 года—10 р., за 3 года—15 руб. и т. д., т.-е. онѣ возрастаютъ пропорціонально времени, а если время 1 годъ и процентная такса 5%, то процентныя деньги со 100 руб. будутъ 5 руб., съ съ 200 р.—10 руб., съ 300 руб.—15 руб. и т. д., т.-е. онѣ возрастаютъ пропорціонально капиталу.

Полезно замѣтить, что **наращенный капиталъ не пропорціоналенъ времени.** Если, напр., капиталъ 100 руб. и процентная такса 5%, то черезъ 1 годъ наращенный капиталъ будетъ 105 руб., а черезъ 2 года 110 руб., а не 210 руб.

171. Примѣры задачъ на проценты.

Задача 1. Найти процентныя деньги съ капитала 7285 р., отданнаго въ ростъ по 8% на $3^1/_2$% года.

Процентныя деньги за 1 годъ составляютъ, по условію, $^3/_{100}$ капитала; чтобы найти $^8/_{100}$ капитала, достаточно капиталъ умножить на $^8/_{100}$; значитъ, процентныя деньги за 1 годъ составляютъ ($7285 \cdot {}^8/_{100}$) руб., а за $3^1/_2$ года онѣ будутъ $7285 \cdot {}^8/_{100} \cdot {}^7/_2$, что составляетъ 2039 р. 80 коп.

Замѣчаніе. Если время содержитъ мѣсяцы или дни, то надо найти процентныя деньги за 1 мѣсяцъ или за 1 день, а потомъ и за данное число мѣсяцевъ или дней. При этомъ надо имѣть въ виду, что **въ коммерческихъ во-**

просахъ, для удобства вычисленій, принято считать годъ въ 360 дней, а мѣсяцъ въ 30 дней.

Задача 2. Какой капиталъ, отданный въ ростъ по $6^3/_4\%$, принесетъ въ 6 лѣтъ 8 мѣсяцевъ 3330 руб. доходу?

Проценты за 1 годъ составляютъ $6^3/_4$ (т.-е. $^{27}/_4$) **сотыхъ** капитала; за 6 л. и 8 мѣс. (т.-е. за 80 мѣс.) онѣ составляютъ $\frac{27 \,.\, 80}{4 \,.\, 12}$ **сотыхъ** капитала, что, по сокращеніи, равно 45 **сотымъ** капитала; по условію, эти $^{45}/_{100}$ капитала должны равняться 3330 руб.; значитъ, здѣсь дана дробь неизвѣстнаго числа (капитала), а требуется найти цѣлое неизвѣстное число; это находится дѣленіемъ:

$$\text{Иском. капиталъ} = 3330 : \frac{45}{100} = 7400 \text{ р.}$$

Задача 3. Какой капиталъ, отданный по 5%, обратится черезъ 6 лѣтъ въ 455 руб. (если процентныя деньги не берутся въ теченіе этихъ 6 лѣтъ)?

Въ 455 руб. заключаются начальный капиталъ и процентныя деньги съ него за 6 лѣтъ. За 1 годъ процент. деньги составляютъ $^5/_{100}$ капитала, слѣд., за 6 лѣтъ онѣ составятъ $^5/_{100} \,.\, 6 = {}^{30}/_{100} = {}^3/_{10}$ капитала. Такимъ образомъ, въ 455 руб. заключаются начальный капиталъ и еще $^3/_{10}$ его, т.-е. $^{13}/_{10}$ начальнаго капитала; значитъ:

$$\text{нач. капиталъ} = 455 : \frac{13}{10} = \frac{4550}{13} = 350 \text{ (руб.).}$$

Задача 4. По скольку процентовъ (по какой таксѣ) надо отдать капиталъ 15108 руб., чтобы въ 2 года 8 мѣсяцевъ получить 2417 руб. 28 коп. процентныхъ денегъ?

Чтобы узнать таксу процентовъ, достаточно опредѣлить, сколько копеекъ въ теченіе года получается съ каждаго рубля начальнаго капитала.

Такъ какъ 15108 руб. въ 32 мѣс. приносятъ 241728 коп., то 1 руб. въ 12 мѣс. приноситъ $\frac{241728 \,.\, 12}{15108 \,.\, 32} = 6$ коп.; значитъ, капиталъ отданъ по 6%.

Замѣчаніе. Если въ задачахъ подобнаго рода вмѣсто процентныхъ денегъ данъ наращенный капиталъ, то слѣдуетъ изъ него вычесть начальный капиталъ; тогда получимъ процентныя деньги.

Задача 5. На сколько времени надо отдать 2485 руб. по 7%, чтобы получить 139 руб. 16 коп. процентовъ?

Такъ какъ въ 1 годъ 2485 руб. приносятъ $(2485 \,.\, {}^{7}/_{100})$ руб., то неизвѣстное время равно

$$139{,}16 : \left(2485 \,.\, \frac{7}{100}\right) = \frac{13916}{2485 \,.\, 7} = \frac{4}{5} \text{ (года)} = 288 \text{ дней.}$$

Задачи на учетъ векселей.

172. **Что такое вексель и учетъ его.** Когда одно лицо занимаетъ у другого деньги подъ проценты, то обыкновенно должникъ выдаетъ своему кредитору письменное обязательство въ томъ, что онъ къ извѣстному сроку уплатитъ занятую сумму вмѣстѣ съ причитающимися на нее процентами. Такое обязательство, написанное на гербовой бумагѣ и по установленной формѣ, называется **векселемъ.** Положимъ, напр., что должникъ занялъ у кредитора 1000 руб. на 1 годъ по 10%, и заемъ былъ сдѣланъ 1-го января 1914 года. Тогда, разсчитавъ, что черезъ годъ 1000 руб. должны обратиться въ 1100 руб., должникъ выдаетъ кредитору, примѣрно, такой вексель:

Москва (названіе города). *1-го января 1915 года. Вексель на 1100 руб. Отъ сего 1-го января 1915 года черезъ двѣнадцать мѣсяцевъ по сему моему векселю повиненъ я заплатить* (такому-то), *или кому онъ прикажетъ, тысячу сто рублей, которые я отъ него получилъ наличными деньгами.* (Слѣдуетъ подпись должника).

Въ векселѣ не пишется ни сумма, занятая въ дѣйствительности, ни процентъ, по которому сдѣланъ былъ заемъ, но выставляется сумма денегъ, которую надо уплатить, и срокъ,

въ который должна быть сдѣлана уплата. Сумма, записанная въ векселѣ, называется вексельною суммою или **валютою векселя.** Валюта есть занятый капиталъ вмѣстѣ съ причитающимися на него процентами за время, на которое былъ сдѣланъ заемъ.

Кредиторъ, имѣющій вексель, не можетъ требовать отъ должника уплаты ранѣе срока, назначеннаго въ векселѣ. Однако можетъ случиться, что самъ должникъ пожелаетъ уплатить по векселю ранѣе срока. Положимъ, напр., что должникъ желаетъ заплатить за полгода до срока по своему векселю въ 1100 руб. Ему нѣтъ разсчета платить теперь же 1100 руб., потому что онъ могъ бы пользоваться въ теченіе полугода процентными деньгами съ тѣхъ денегъ, которыя онъ теперь предлагаетъ къ уплатѣ. Между кредиторомъ и должникомъ въ такихъ случаяхъ происходитъ соглашеніе, по которому кредиторъ долженъ получить нѣсколько менѣе вексельной суммы. Это соглашеніе выражается въ формѣ нѣкотораго числа процентовъ вексельной суммы, которое кредиторъ предоставляетъ должнику удержать изъ нея; условленные проценты обыкновенно относятъ къ году. Если, напр., между кредиторомъ и должникомъ произошло соглашеніе, по которому должникъ, уплачивая по векселю ранѣе срока, имѣетъ право удержать 8%, то это значитъ, что если онъ платитъ за годъ до срока, то можетъ удержать въ свою пользу $^{8}/_{100}$ вексельной суммы (значитъ, 8 коп. съ каждаго рубля валюты); если же онъ платитъ за $^{1}/_{2}$ года до срока, то можетъ изъ каждаго рубля валюты удержать только 4 коп.; платя за 1 мѣсяцъ до срока удерживаетъ изъ каждаго рубля только $^{8}/_{12}$ или $^{2}/_{3}$ коп. и т. п.

Сумма, вычитаемая изъ валюты, когда по векселю уплачивается ранѣе срока, называется **учетомъ** или **дисконтомъ** векселя; опредѣлить учетъ за данное время по данному проценту значитъ **учесть** или **дисконтировать** вексель.

Учитывать вексель приходится еще и тогда, когда кредиторъ продаетъ вексель своего должника постороннему лицу (или банку); въ этомъ случаѣ покупатель удерживаетъ въ свою пользу ту сумму, которая придется по условленному годовому % за все время, остающееся до вексельнаго срока.

173. Примѣры задачъ на учетъ векселей. Такъ какъ учетъ векселя составляетъ процентныя деньги, причитающіяся съ ва-

люты по условленной годовой таксѣ за время, недостающее до срока векселя, то задачи на учетъ векселей не отличаются отъ соотвѣтственныхъ задачъ на проценты.

Задача 1. Вексель въ 5600 руб. уплатили за 5 мѣсяцевъ до срока съ учетомъ по 6%. Какой былъ сдѣланъ учетъ по этому векселю и сколько по нему заплатили?

Искомый учетъ составляетъ процентныя деньги, причитающіяся съ 5600 руб. за 5 мѣсяцевъ, считая по 6% годовыхъ.

Проц. деньги съ 5600 р. за 12 мѣс. составляютъ $5600 \cdot \frac{6}{100}$;

Проц. деньги съ 5600 р. за 5 мѣс. составляютъ $\frac{5}{12}$ этой суммы.

Слѣд., искомый учетъ $= \frac{5600 \cdot 6 \cdot 5}{100 \cdot 12} = 140$ руб. и за вексель уплатили $5600 - 140 = 5460$ руб.

Задача 2. За два мѣсяца до срока продали вексель съ учетомъ 148 рублей. Опредѣлить валюту векселя, если учетъ былъ сдѣланъ по 8%.

Задача эта равносильна такой задачѣ на проценты: опредѣлить начальный капиталъ, съ котораго процентныя деньги за 2 мѣсяца, считая по 8% годовыхъ, составляютъ 148 руб. Слѣд., задачу можно рѣшить такъ:

Проц. деньги за 1 годъ составляютъ $^8/_{100}$ валюты;
Проц. деньги за 2 мѣсяца » $^8/_{600} = {}^1/_{75}$ валюты.
Эта $^1/_{75}$ валюты должна быть равна 148 руб.
Слѣд., валюта $= 148 \cdot 75 = 11100$ руб.

Задача 3. За 3 мѣсяца до срока уплатили по векселю 5580 р. Найти валюту этого векселя, если извѣстно, что учетъ былъ сдѣланъ по 8%.

Эта задача равносильна такой задачѣ на проценты: какъ великъ начальный капиталъ, если, вычтя отъ него процентныя деньги, причитающіяся съ этого капитала за 3 мѣсяца, считая по 8% годовыхъ, мы получимъ 5880 р.

За 3 мѣсяца процентныя деньги составляютъ $^8/_{100} \cdot {}^3/_{12} = {}^2/_{100}$ начальнаго капитала; значитъ, если ихъ вычтемъ изъ него, то останется $^{98}/_{100}$ капитала; эти $^{98}/_{100}$ капитала должны равняться 5880 руб.; слѣд., искомый капиталъ $= 5880 : {}^{98}/_{100} = 6000$ р.

Задачи на пропорціональное дѣленіе.

174. Задача 1. Раздѣлить число 84 на три части пропорціонально числамъ 7, 5 и 2.

Это надо понимать такъ: раздѣлить число 84 на такія три части, чтобы первая относилась ко второй, какъ 7 къ 5, а вторая къ третьей, какъ 5 къ 2. Назовемъ искомыя части буквами x_1, x_2 и x_3. Въ задачѣ требуется, чтобы эти части могли удовлетворить слѣдующимъ двумъ пропорціямъ:

$$x_1 : x_2 = 7 : 5 \quad (1) \qquad x_2 : x_3 = 5 : 2 \quad (2)$$

Изъ этихъ пропорцій можно вывести такое заключеніе, если число x_1 разобьемъ на 7 равныхъ долей, то такихъ долей въ x_2 должно быть 5, потому что только при этомъ условіи отношеніи x_1 къ x_2 равно отношенію 7 : 5; такихъ же долей въ x_3 должно быть 2, потому что только при этомъ условіи отношеніе x_2 къ x_3 равно отношенію 5 : 2. Отсюда слѣдуетъ, что седьмая доля x_1 въ суммѣ: $x_1+x_2+x_3$ содержится $7+5+2$ раза, т.-е. 14 разъ. Но сумма $x_1+x_2+x_3$ должна составлять 84; значитъ, седьмая доля x_1 равна $84 : 14 = 6$. Такихъ долей заключается 7 въ x_1, 5 въ x_2 и 2 въ x_3; слѣд.:

$$x_1 = 6 \,.\, 7 = 42; \; x_2 = 6 \,.\, 5 = 30; \; x_3 = 6 \,.\, 2 = 12$$

Правило. Чтобы раздѣлить число на части пропорціонально нѣсколькимъ даннымъ числамъ, дѣлятъ его на сумму этихъ чиселъ и частное умножаютъ на каждое изъ этихъ чиселъ.

Замѣчаніе. Изъ пропрціи (1) и (2) можно вывести такую третью пропорцію:

$$x_1 : x_3 = 7 : 2 \qquad (3).$$

Дѣйствительно, мы видѣли, что если x_1 разбить на 7 равныхъ долей, то такихъ долей въ x_3 должно быть 2; поэтому отношеніе x_1 къ x_3 равно отношенію 7 : 2.

Три написанныя выше пропорціи можно написать сокращенно, въ одинъ рядъ, такъ:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 7 : 5 : 2.$$

175. Задача 2. Раздѣлить число 968 на 4 части пропорціонально числамъ:

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{2}{5} : \frac{3}{8}$$

Прежде всего замѣнимъ данный рядъ дробныхъ чиселъ рядомъ цѣлыхъ чиселъ. Для этого приведемъ всѣ дроби къ общему знаменателю и обратимъ смѣшанную дробь въ неправильную:

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = \frac{60}{40} : \frac{30}{40} : \frac{16}{40} : \frac{15}{40}$$

Если откинемъ общаго знаменателя, то увеличимъ каждую дробь въ одинаковое число разъ (именно въ 40 разъ); отъ этого отношенія между ними не измѣнятся: слѣд.:

$$1\frac{1}{2} : \frac{3}{4} : \frac{2}{5} : \frac{3}{8} = 60 : 30 : 16 : 15$$

Теперь задачу можно выразить такъ: раздѣлить число 968 на 4 части пропорціонально числамъ 60 : 30 : 16 : 15. Эта задача рѣшается такъ, какъ и 1-я.

176. Задача 3. Раздѣлить число 125 на такія 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 2 : 3, вторая къ третьей, какъ 3 : 5, а третья къ четвертой, какъ 5 : 6.

Задача 4. Раздѣлить число 125 на такія 4 части, чтобы первая часть относилась ко второй, какъ 2 : 3, вторая къ третьей, какъ 4 : 5, а третья къ четвертой, какъ 6 : 11.

Въ каждой изъ этихъ задачъ даны отношенія между частями и сумма частей, а отыскиваются самыя части. Но въ первой задачѣ отношенія:

2 : 3, 3 : 5 и 5 : 6

таковы, что послѣдующій членъ перваго отношенія равенъ предыдущему члену второго, а послѣдующій членъ второго отношенія равенъ предыдущему члену третьяго. Вслѣдствіе этого можно сказать, что въ первой задачѣ требуется 125 раздѣлить на 4 части пропорціонально ряду чиселъ: 2 : 3 : 5 : 6. Значитъ, эта задача рѣшается такъ, какъ и задача 1-я.

Во второй же задачѣ отношенія между частями

2 : 3, 4 : 5 и 6 : 11

таковы, что послѣдующій членъ одного отношенія не равенъ предыдущему члену слѣдующаго отношенія.

Однако, этотъ случай легко привести къ первому, напр., такимъ разсужденіемъ:

Обозначивъ искомыя части буквами x_1, x_2, x_3 и x_4, мы можемъ написать три пропорціи:

$x_1 : x_2 = 2 : 3$ Изъ первой пропорціи видимъ, что если
$x_2 : x_3 = 4 : 5$ x_1 разобьемъ на двѣ равныя доли, то такихъ
$x_3 : x_4 = 6 : 11$ долей въ x_2 должно быть 3. Узнаемъ теперь, сколько такихъ же долей должно содержаться въ x_3 и въ x_4. Изъ второй пропорціи видимъ, что x_3 составляетъ $^5/_4$ x_2; но въ x_2 заключается 3 равныя доли; значитъ, въ x_3 такихъ долей будетъ $3 \times {}^5/_4$, т.-е. $^{15}/_4$. Изъ третьей пропорціи видимъ, что x_4 составляетъ $^{11}/_6$ x_3; но въ x_3 заключается равныхъ долей $^{15}/_4$; значитъ, въ x_4 такихъ долей будетъ $^{15}/_4 \times {}^{11}/_6$, т.-е. $^{55}/_8$. Итакъ, въ x_4 содержится $^{55}/_8$ такихъ равныхъ долей, какихъ въ x_3 содержится $^{15}/_4$, въ x_2 сод. 3, а въ x_3 сод. 2. Значитъ, для рѣшенія задачи достаточно число 125 раздѣлить на 4 части пропорціонально числамъ:

$$2 : 3 : \frac{15}{4} : \frac{55}{8}$$

или (умноживъ всѣ ихъ на 8): 16 : 24 : 30 : 55

Такимъ образомъ, и эта задача приводится къ задачѣ 1-й.

177. Задача 5. Три купца составили товарищество для веденія нѣкотораго торговаго дѣла Первый купецъ внесъ для этой цѣли 15000 руб., второй—10000 руб., третій—12500 руб. По окончаніи торговаго дѣла они получили общей прибыли 7500 р. Спрашивается: сколько изъ этой прибыли придется получить каждому купцу?

Такъ какъ прибыль на каждый внесенный рубль должна получиться одинаковая, то прибыль каждаго участника въ товариществѣ пропорціональна капиталу, внесенному имъ. Поэтому задача сводится на такую: раздѣлить 7500 на три части пропорціонально ряду чиселъ: 15000, 10000 и 12500; а это есть задача на пропорціональное дѣленіе. Чтобы рѣшить ее, прежде всего замѣтимъ, что числа этого ряда можно сократить на 2500; отъ этого не измѣнятся отношенія между ними. Сокративъ, получимъ 6 : 4 : 5. Теперь раздѣлимъ 7500 на три части пропорціонально 6 : 4 : 5. Разсуждая такъ, какъ было объяснено въ задачѣ 1, найдемъ:

$$x_1 = \frac{7500}{15} \cdot 6 = 3000; \quad x_2 = \frac{7500}{15} \cdot 4 = 2000; \quad x_3 = \frac{7500}{15} \cdot 5 = 2500.$$

Правило пропорціональнаго дѣленія называется иногда **правиломъ товарищества**, потому что помощью этого правила рѣшаются, между прочимъ, такія задачи, въ которыхъ, подобно сейчасъ рѣшенной, требуется раздѣлить общую прибыль между нѣсколькими лицами, составившими товарищество для общаго коммерческаго предпріятія.

178. Задача 6. На желѣзной дорогѣ работало 3 артели рабочихъ; въ первой артели было 27 рабочихъ, во второй 32, а въ третьей 15; первая артель работала 20 дней, вторая 18, третья 16; всѣ три артели получили за работу 4068 р. Сколько рублей придется получить каждой артели?

Если бы каждая артель работала одинаковое количество дней, то плата каждой артели была бы пропорціональна

числу рабочихъ въ ней; поэтому преобразуемъ условія нашей задачи такимъ образомъ, чтобы число дней работы для каждой артели было одинаково. Напр., предположимъ, что каждая артель работала бы по одному дню; тогда, конечно, уменьшилась бы плата каждой артели; для того, чтобы эта плата не измѣнилась, надо, чтобы число рабочихъ въ каждой артели увеличилось во столько разъ, во сколько число дней уменьшилось. Такъ, чтобы первой артели получить за 1 день ту же плату, какую она получаетъ за 20 дней, надо, чтобы въ этой артели рабочихъ было не 27, а 27×20; также во второй артели должно быть рабочихъ не 32, а 32×18, чтобы эта артель получила за 1 день такую же плату, какъ и за 18 дней; въ третьей артели должно быть рабочихъ 15×16, чтобы и эта артель получила ту же плату за день, какъ и за 16 дней. Теперь получаемъ такіе два ряда чиселъ:

числа рабочихъ	(27×20) :	(32×18) :	(15×16)
» дней	1	1	1

Остается раздѣлить 4068 на части пропорціональныя числамъ рабочихъ. Сокративъ предварительно эти числа (на 3 и на 4), найдемъ, что 4068 надо раздѣлить пропорціонально 45 : 48 : 20. Обозначивъ искомыя части буквами x_1, x_2 и x_3, получимъ, какъ было прежде объяснено:

$$x_1 = \frac{4068 \,.\, 45}{45+48+20} = \frac{4068 \,.\, 45}{113} = 36 \,.\, 45 = 1620 \text{ (руб.)}.$$

$$x_2 = \frac{4068 \,.\, 48}{113} = 36 \,.\, 48 = 1728 \text{ (руб.)}.$$

$$x_3 = \frac{4068 \,.\, 20}{113} = 36 \,.\, 20 = 720 \text{ (руб.)}.$$

Задачи на смѣшеніе и сплавы.

179. Задача 1. Смѣшано 3 сорта муки: 15 фунт. по 8 коп., 20 фунт. по 7 к. и 25 фун. по 4 коп. за фунтъ. Что стоитъ фунтъ смѣси?

Узнаемъ сначала, что стоятъ всѣ фунты 1-го сорта, всѣ фунты 2-го сорта и всѣ фунты 3-го сорта; потомъ — что стоитъ вся смѣсь; затѣмъ—сколько фунтовъ во всей смѣси; наконецъ, цѣну одного фунта смѣси:

15 ф. по 8 коп.	стоятъ	8 . 15=120	коп.
20 ф. по 7 коп.	»	7 . 20=140	»
25 ф. по 4 коп.	»	4 . 25=100	»
Вся смѣсь стоитъ		360	коп.

Всѣхъ фунтовъ въ смѣси: 15+20+25=60.

Цѣна одного фунта смѣси: 360 : 60=6 коп.

Подобнымъ образомъ рѣшаются такія задачи, въ которыхъ даны: цѣна и количество каждаго сорта смѣшиваемыхъ веществъ, а отыскивается цѣна единицы смѣси. Такія задачи называются **задачами на смѣшеніе 1-го рода.**

180. Задача 2-я. Изъ двухъ сортовъ чаю составлено 32 фунта смѣси; фунтъ перваго рода стоитъ 3 руб., фунтъ второго сорта 2 р. 40 к. Сколько фунтовъ взято отъ того и другого сорта, если фунтъ смѣшаннаго чаю стоитъ 2 р. 85 к. (безъ прибыли и убытка)?

Продавая дорогой сортъ по 2 р. 85 к., продавецъ будетъ получать убытка на каждомъ фунтѣ 15 коп. (3 р.—2 р. 85 к.); продавая дешевый сортъ по 2 р. 85 к., продавецъ будетъ получать прибыли на каждомъ фунтѣ 45 к. (285—240). Если бы убытокъ отъ фунта дорогого сорта былъ равенъ прибыли отъ фунта дешеваго сорта, тогда, чтобы убытокъ покрылся прибылью, надо было бы взять дорогого сорта столько же, сколько и дешеваго. Но въ нашей задачѣ убытокъ отъ фунта дорогого сорта меньше прибыли отъ фунта дешеваго сорта; изъ этого надо заключить, что для покрытія убытка прибылью, дорогого сорта должно взять болѣе, чѣмъ дешеваго, и во столько разъ, во сколько разъ 45 больше 15. Значитъ, 32 фунта надо раздѣлить на двѣ части пропор-

ціонально 45 : 15 (или 3 : 1); первая часть покажетъ, сколько фунтовъ должно взять отъ дорогого сорта, а вторая—сколько фунтовъ должно взять отъ дешеваго сорта. Обозначивъ число фунтовъ дорогого сорта черезъ x_1, а число фунтовъ дешеваго сорта черезъ x_2, будемъ имѣть, по правилу пропорціональнаго дѣленія:

$$x_1 = \frac{32}{3+1} \cdot 3 = 8 \,.\, 3 = 24; \; x_2 = 8 \,.\, 1 = 8$$

Подобныя задачи, въ которыхъ даны: цѣна единицы каждаго изъ смѣшиваемыхъ веществъ, цѣна единицы смѣси и количество смѣси, а отыскивается количество смѣшиваемыхъ веществъ, называются **задачами на смѣшеніе 2-го рода.**

Замѣтимъ, что задачи на смѣшеніе 2-го рода возможны только тогда, когда цѣна единицы смѣси заключается между *цѣною единицы 1-го рода и цѣною единицы 2-го рода.* Напр., было бы невозможно составить смѣсь чаю, безъ прибыли и убытка, цѣною по 3 р. 20 к. за фунтъ изъ двухъ сортовъ чаю цѣною по 3 р. и по 2 р. 40 к. за фунтъ.

181. Задачи на смѣшеніе жидкостей. Если говорятъ: «вино въ 48 градусовъ», то это надо понимать такъ, что въ каждыхъ 100 объемныхъ частяхъ этого вина содержится 48 частей спирта, а остальныя 52 части составляетъ вода; значитъ, **число градусовъ означаетъ процентное объемное содержаніе чистаго спирта;** иначе сказать, означаетъ, сколько сотыхъ долей объема смѣси приходится на чистый спиртъ. Задачи на смѣшеніе такихъ жидкостей, которыхъ качество выражается числомъ градусовъ, можно подраздѣлить тоже на 2 рода, подобно задачамъ, разсмотрѣннымъ выше. Приведемъ примѣры.

Задача 1. 30 ведеръ вина въ 48 градусовъ смѣшано съ 24 ведрами вина въ 36 градусовъ. Сколько градусовъ въ смѣси?

Въ каждомъ ведрѣ 1-го сорта заключается 48 сотыхъ ведра чистаго спирта. Значитъ, въ 30 ведрахъ 1-го сорта чистаго спирта содержится 48×30, т.-е. 1440 сотыхъ ведра. Въ 24 ведрахъ 2-го сорта чистаго спирта заключается 36×24, т.-е. 864 сотыхъ ведра. Во всей смѣси чистаго спирта будетъ $1440+864$, т.-е. 2304 сотыхъ ведра. Такъ какъ всѣхъ ведеръ въ смѣси $30+24$, т.-е. 54 ведра, то въ каждомъ ведрѣ смѣси чистаго спирта будетъ $2304 : 54$, т.-е. $42^2/_3$ сотыхъ ведра. Значитъ, смѣсь окажется въ $42^2/_3$ градуса.

Задача 2. Желаютъ составить смѣсь изъ вина двухъ сортовъ: въ 48 град. и 36 град. Сколько надо взять того и другого, чтобы составить 10 ведеръ вина въ 45 град.?

Такъ какъ ведро 1-го сорта содержитъ спирта на 3 сотыхъ ведра болѣе, а ведро 2-го сорта на 9 сотыхъ менѣе, чѣмъ требуется, то 1-го сорта должно взять болѣе, чѣмъ 2-го, во столько разъ, во сколько 9 болѣе 3. Значитъ, 10 ведеръ надо раздѣлить на 2 части пропорціонально числамъ $9 : 3$ или $3 : 1$. 1-го сорта будетъ:

$\frac{10}{3+1} \cdot 3 = 7\frac{1}{2}$, 2-го сорта будетъ: $\frac{10}{3+1} \cdot 1 = 2\frac{1}{2}$.

182. Задачи на сплавы металловъ. Золото и серебро, по причинѣ своей мягкости, не употребляются на издѣлія въ чистомъ видѣ, *но сплавляются съ какими-либо другими болѣе твердыми металлами* (чаще всего съ мѣдью). Сплавленные съ золотомъ или серебромъ посторонніе металлы называются **лигатурой.** Количество чистаго золота или чистаго серебра выражается **пробой.**

Проба означаетъ, сколько вѣсовыхъ частей чистаго металла содержится въ 96 вѣсовыхъ частяхъ сплава.

Напр., золото 56-й пробы есть такой сплавъ, въ которомъ на 96 вѣсовыхъ частей приходится 56 частей чистаго

золота, а остальныя части—лигатура. Такъ какъ въ фунтѣ 96 золотниковъ, а въ золотникѣ 96 долей, то можно сказать, что проба означаетъ, сколько золотниковъ чистаго металла содержится въ фунтѣ сплава, или сколько долей—въ одномъ золотникѣ.

Задачи на сплавы металловъ, которыхъ качество выражается пробой, можно подраздѣлить на 2 рода, подобно задачамъ на смѣшеніе, разсмотрѣннымъ выше. Приведемъ примѣры.

Задача 1. 25 фунтовъ серебра 84-й пробы сплавлены съ $12^1/_2$ фунт. серебра 72-й пробы. Какой пробы сплавъ?

Въ каждомъ фунтѣ 1-го сорта заключается 84 золотн. чистаго серебра. Въ 25 фунтахъ того же сорта содержится 24×25, т.-е. 2100 зол. чистаго серебра. Въ $12^1/_2$ фунтахъ 2-го сорта чистаго серебра заключается $72 \times 12^1/_2$, т.-е. 900 зол. Значитъ, во всемъ сплавѣ чистаго серебра будетъ $2100+900$, т.-е. 3000 зол. Такъ какъ всѣхъ фунтовъ въ сплавѣ $25+12^1/_2$, т.-е. $37^1/_2$, то въ каждомъ фунтѣ сплава чистаго серебра будетъ $3000 : 37^1/_2$, т.-е. 80 золотниковъ. Слѣд., сплавъ окажется 80-й пробы.

Задача 2. Сколько нужно взять золота 91-й и $87^1/_2$ пробы, чтобы составить слитокъ въ 2 фун. 8 золотн. 88,9 пробы?

Такъ какъ 1 золотникъ 1-го сорта содержитъ чистаго золота болѣе, чѣмъ требуется, на 2,1 доли, а 1 золотникъ 2-го сорта содержитъ менѣе на 1,4 доли, то 1-го сорта надо взять меньше 2-го въ отношеніи $1,4 : 2,1$. Значитъ, 200 золотниковъ надо раздѣлить на 2 части пропорціонально $1,4 : 2,1$, или $14 : 21$, или $2 : 3$.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Цыфры означаютъ нумера страницъ.