В. Беллюстинъ,
Директоръ Поливановской учит. семинаріи.

ОЧЕРКИ

по

МЕТОДИКѢ ГЕОМЕТРІИ.

(Въ предѣлахъ начальнаго курса геометріи.

СКЛАДЪ ИЗДАНІЯ
ВЪ КНИЖНОМЪ МАГАЗИНѢ
М. Д. НАУМОВА
въ москвѣ,
Большая Лубянка, д. Страхового Общества „Россія“.

МОСКВА.
Типографія Г. Лисснера и Д. Собко.
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. 9.
1912.

ОЧЕРКИ ПО МЕТОДИКѢ ГЕОМЕТРІИ.

(Въ предѣлахъ начальнаго курса геометріи.)

I. Краткія историческія свѣдѣнія.

1. Начало геометріи. Слово «геометрія» въ буквальномъ переводѣ значитъ землемѣріе. Такое названіе этотъ предметъ получилъ потому, что зачатки геометріи совпадаютъ съ элементарнымъ землемѣріемъ. Именно, по словамъ Геродота, историка греческаго, первый народъ, обратившій вниманіе на геометрію, были египтяне, и заставило ихъ обратить вниманіе на нее такое обстоятельство. По берегамъ благодѣтельнаго Нила расположены были плодороднѣйшіе земельные участки, которые обрабатывались владѣльцами тщательно и давали имъ богатую жатву, а въ то же время обязывали ихъ платить налогъ. Однако Нилъ, выступая каждый годъ изъ береговъ смывалъ канавы и межи и заставлялъ сосѣдей по многу разъ отграничиваться. Жалко было потерять даже и небольшой кусокъ плодоносной земли, а въ то же время хлопотно было вести мелкія измѣренія. Приходилось напрячь все вниманіе, чтобы землемѣріе шло легко и вѣрно. Простѣйшіе пріемы землемѣрія и основныя свойства геометріи стали постепенно и незамѣтно связываться другъ съ другомъ и оказывать взаимную поддержку. Такимъ образомъ положено было начало наукѣ, впослѣдствіи развившейся и извѣстной и въ наше время и давно уже подъ именемъ геометріи.

Многочисленныя сооруженія, оставшіяся послѣ древнихъ египтянъ, напримѣръ извѣстныя всѣмъ пирамиды, а также оросительные каналы, доказываютъ, что египтянамъ хорошо были извѣстны начальныя основанія геометріи. И дѣйствительно, одинъ папирусъ, сохранившійся до нашего времени отъ эпохи за 1700 лѣтъ до Рождества Христова, содержитъ въ себѣ правила, какъ опредѣлять площадь прямоугольника, круга, объемъ прямоугольнаго параллепипеда[1]). Здѣсь также встрѣчаемъ мы площадь прямоугольнаго треугольника, равнобедреннаго треугольника и равнобедренной трапеціи. Всѣ формулы даются въ томъ же приблизительно видѣ, какъ и у насъ сейчасъ. Есть нѣкоторая неточность въ кругѣ $\left(\pi=3\frac{13}{81}\right)$ и ошибка въ равнобедренномъ треугольникѣ и равнобедренной трапеціи: именно, въ нихъ вмѣсто высоты берется боковая сторона, отчего результатъ долженъ получиться увеличенный.

Начальнаго періода геометріи, идущаго изъ такой глубокой древности, касаемся мы потому, что вопросъ о связи геометріи съ землемѣріемъ можетъ быть поставленъ и въ наше время въ нашей странѣ. Несомнѣнно, что геометрія, какъ предметъ народной школы, не должна чуждаться землемѣрія. Запросы народа въ этомъ отношеніи довольно ясны. Въ странѣ, гдѣ масса населенія занимается землей, естественъ запросъ на землемѣріе, и школа должна откликнуться на него. И если школа, желая сдѣлать ученье продуктивнымъ, снисходитъ къ уровню развитія и потребностей дѣтей, то какъ же ей не снизойти къ запросамъ народной массы? Въ такомъ лишь случаѣ ученье можетъ снискать расположеніе родителей, а черезъ нихъ расположеніе дѣтей. Землемѣріе даетъ для геометріи и подготовительный матеріалъ, т.-е. рядъ фактовъ и примѣровъ, изъ которыхъ должны быть построены выводы и получены общія свойства. Кромѣ того, землемѣріе даетъ хорошія упражненія для примѣненія геометрическихъ знаній; а между тѣмъ какъ важно, чтобы знанія имѣли примѣненіе: знаніе безъ примѣненія — мертвый капиталъ.

Землемѣріе, въ своей нѣсколько расширенной формѣ и распространенной, т.-е. въ формѣ вообще измѣренія и построенія, имѣетъ важное значеніе и въ техникѣ. Вотъ это-то обобщенное измѣреніе и слѣдуетъ ставить въ основу преподаванія геометріи въ народной школѣ, такъ какъ безъ знанія начатковъ измѣренія и построенія никакое образованіе нельзя считать достаточнымъ и не лишеннымъ односторонности.

2. Въ дальнѣйшемъ развитіи геометріи особенная заслуга принадлежитъ древнимъ грекамъ. На ихъ долю выпало открытіе

---

[1]) A. Genau. Geschichte und Methodik der Raumlehre, 1905.

цѣлаго ряда теоремъ и приведенiе отдѣльныхъ теоремъ въ систему. Установленъ тотъ фактъ, что греческiе философы и геометры доходили до теоремъ не чисто логическимъ путемъ, а при помощи попытокъ, въ которыхъ извѣстныя свойства доказывались сперва для частныхъ случаевъ. Нерѣдко также бывало, что теорема дѣлалась извѣстной сперва на практикѣ, въ примѣненiи, а затѣмъ уже доказывалась логически. Такъ напримѣръ, теорема о томъ, что квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ, долгое время доказывалась только для частныхъ случаевъ, напримѣръ для равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника или же для треугольника со сторонами 3, 4 и 5, и лишь Пиѳагору удалось найти доказательство въ общемъ видѣ, т.-е. для всякаго прямоугольнаго треугольника.

Пиѳагоръ, жившiй за 550 лѣтъ до Р. Хр., открываетъ собой рядъ знаменитыхъ греческихъ геометровъ. Онъ долгое время жилъ въ Египтѣ и имѣлъ случай воспользоваться всей ученостью древнихъ египтянъ. Онъ излагалъ своимъ ученикамъ уже многiя геометрическiя свойства и доказывалъ логически то, что до него, въ большинствѣ случаевъ, было извѣстно только въ практическихъ примѣненiяхъ или же для частныхъ случаевъ.

Кромѣ извѣстной теоремы Пиѳагора ему принадлежитъ, напримѣръ, доказательство того, что изъ всѣхъ плоскихъ фигуръ одинаковаго периметра кругъ имѣетъ наибольшую площадь. Какъ видимъ, геометрiя уже за 500 лѣтъ до Р. Хр. была не бѣдна матерiаломъ.

Знаменитый греческiй философъ Платонъ (за 400 л. до Р. Хр.), творецъ идеалистической философiи, питалъ особенное уваженiе къ геометрiи. Онъ цѣнилъ геометрiю, конечно, не съ прикладной ея стороны, но за то, что она лучше другихъ предметовъ изощряетъ правильное мышленiе. Надъ дверьми зданiя, въ которомъ собирались ученики Платона, имѣлась надпись: «Пусть не входитъ сюда тотъ, кто не знаетъ геометрiи».

За 300 лѣтъ до Р. Хр. жилъ въ Александрiи Эвклидъ. Ему греческая геометрiя обязана приведенiемъ въ систему и завершенiемъ. Надо признать, что система Эвклида безукоризненна[1]).

[1]) Съ логической точки зрѣнiя, но отнюдь не педагогической: курсъ геометрiи въ среднихъ учебныхъ заведенiяхъ строится по системѣ Эвклида, но въ настоящее время высказывается много возраженiй противъ этого курса съ педагогической точки зрѣнiя.

Расположенie теоремъ и составъ теоремъ удерживается со временъ Эвклида до нашего времени. И дѣйствительно, та стройная и неразрывная цѣпь логическихъ выводовъ, въ которой послѣдующiя теоремы основываются на предыдущихъ, а предшествующiя сами собой наталкиваютъ на послѣдующiя, скована такъ крѣпко и тщательно, что частныя измѣненiя и поправки въ ней едва ли возможны, и остается или цѣликомъ слѣдовать Эвклиду или перестраивать геометрiю заново.

Архимедъ Сиракузскiй, ученикъ Эвклида (за 250 лѣтъ до Р. Хр.), занимался, главнымъ образомъ, фигурами криволинейными. Онъ опредѣлилъ величину π, т.-е. отношенiе длины окружности къ дiаметру. Для доказательства онъ бралъ правильный вписанный шестиугольникъ и такой же описанный. Отсюда онъ вывелъ вычисленiемъ, что π заключается между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$. Ранѣе Архимеда геометры, конечно, знали приблизительную величину π, но они ее знали практически; Архимеду же принадлежитъ теоретическiй выводъ.

Имена Пиѳагора, Платона, Эвклида и Архимеда знамениты еще и въ наше время. Это творцы элементарной геометрiи. Ученые новаго времени распространили геометрiю и разработали лишь высшiе ея отдѣлы, напримѣръ они разработали аналитическую геометрiю.

Исторiя греческой геометрiи даетъ намъ нѣсколько указанiй, относящихся къ методической сторонѣ. Прежде всего, мы видимъ, что та логическая цѣпь доказательствъ, которая составляетъ въ настоящее время содержанiе курса геометрiи, явилась не сразу въ сознанiи людей, а установлена трудами многихъ выдающихся умовъ. Геометрiя, какъ собранiе теоремъ, расположенныхъ въ стройной системѣ, берущихъ начало отъ аксiомъ и основныхъ опредѣленiй, представляетъ собою вполнѣ совершенный, разработанный матерiалъ, а ни въ коемъ случаѣ не начатки ученiя.

Поэтому геометрiя въ системѣ Эвклида едва ли можетъ служить матерiаломъ для начальной школы. Ея мѣсто тамъ, гдѣ ученики подготовлены для воспринятiя цѣпи логическихъ выводовъ, гдѣ они уже имѣютъ матерiалъ для отвлеченнаго мышленiя. Не надо забывать, что въ Грецiи, давшей намъ геометрiю, эта наука стояла въ связи съ философiей или, точнѣе, логикой, и занимались ею не малолѣтнiе, а юноши. Повторяемъ: геометрія, какъ систематическое собраніе теоремъ, требующихъ доказательства, должна составлять учебный предметъ не начальной школы, а послѣдующихъ учебныхъ заведеній. Что же отдѣлить для геометріи въ начальной школѣ? Исторія греческой геометріи даетъ на это хорошій отвѣтъ. Тотъ фактическій матеріалъ, изъ котораго въ концѣ концовъ строятся теоремы; тѣ частные случаи, для которыхъ теоремы являются обобщеніемъ; тѣ попытки доказательствъ, которыхъ не лишены были и греческіе философы, — вотъ это все гораздо болѣе подходитъ для курса начальной школы (подразумѣваемъ здѣсь, конечно, не трехгодичную школу, а болѣе повышенный типъ).

3. Ко времени Рождества Христова и въ послѣдующія столѣтія мы встрѣчаемся съ упадкомъ греческой учености. Великое переселеніе народовъ разрушило строй древняго міра, и долго, очень долго, болѣе тысячи лѣтъ, научное образованіе находилось въ упадкѣ. Жалкіе остатки образованности нашли себѣ пріютъ въ монастыряхъ и затѣмъ понемногу стали развиваться въ городскихъ школахъ. Ко времени изобрѣтенія книгопечатанія мы встрѣчаемъ въ школахъ того времени геометрію, но все еще не достигшую былого значенія, какимъ она пользовалась у грековъ. Эвклидъ былъ во многомъ забытъ, и сочиненія древнихъ авторовъ въ значительной части утеряны. Такъ называемое схоластическое преподаваніе изучало геометрію въ такомъ порядкѣ: начинали съ того, что излагали ученикамъ опредѣленіе геометріи. Затѣмъ сообщалось раздѣленіе ея на планиметрію и стереометрію, вводились геометрическіе термины и опредѣленія. Послѣ нѣкоторыхъ аксіомъ переходили къ теоремамъ: учитель ихъ доказывалъ, ученики слушали и запоминали. Схоластическое преподаваніе вело ученье для ученья, оно не хотѣло считаться ни съ жизнью, ни съ природой ученика. Отъ этого случалось, что ученикъ по многу лѣтъ занимался геометріей и все-таки не понималъ, къ чему эти занятія нужны. Еще бывало, что ученики въ теоріи разучивали различныя геометрическія построенія, при помощи циркуля и линейки, но на дѣлѣ они оказывались неумѣющими примѣнить циркуль и линейку. Нѣчто подобное встрѣчаемъ мы теперь въ преподаваніи физики: иногда ученикъ описываетъ подробно какой-нибудь сложный физическій опытъ и даже чертитъ аппараты, но если ему предложить произвести самому, то едва ли онъ возьметъ на себя.

Средневѣковая школа, не хотѣвшая считаться ни съ жизнью, ни съ природой учащихся, допускала въ преподаванiи геометрiи еще такую несообразность. Положимъ, практическая жизнь требовала землемѣрiя. Тогда учащiйся, прошедшiй уже геометрiю, долженъ былъ обращаться къ землемѣру-практику, который и давалъ ему рядъ правилъ и практическихъ способовъ, при чемъ вовсе не считалъ нужнымъ ссылаться на геометрiю. Здѣсь видна рознь между учебнымъ предметомъ и его примѣненiемъ, характерная для средневѣковой школы.

Наша школа любитъ иногда превознести себя въ сравненiи со старинной. Однако и въ нашей школѣ есть тѣневыя стороны, ведущiя свое начало издалека. И къ ихъ числу принадлежитъ нѣкоторая схоластичность въ преподаванiи начальной геометрiи. Учителя въ такихъ случаяхъ приводятъ въ оправданiе, что такова программа, таковы учебники. Но, вѣроятно, здѣсь болѣе глубокая причина, именно, что начальный курсъ геометрiи недостаточно сообразованъ съ требованiями жизни и съ силами и запросами учащихся.

4. Лучъ свѣта въ схоластическое преподаванiе геометрiи внесъ знаменитый чешскiй педагогъ Амосъ Коменскiй трудившiйся въ XVII столѣтiи. Онъ справедливо указалъ, что геометрiю нельзя учить съ дѣтьми, какъ отвлеченную логическую систему, но что необходимо основывать ее на томъ наглядномъ матерiалѣ, который у дѣтей подъ руками. Четырехлѣтнiя дѣти, — говоритъ Коменскiй, — интересуются прямыми и кривыми фигурами, кружками и т. п. Они не прочь примѣрить одну вещь къ другой; они знаютъ, что высоко и что низко, что коротко и что длинно. Вотъ съ такихъ-то доступныхъ дѣтямъ фактовъ и надо начинать геометрiю, а не прямо съ опредѣленiй и раздѣленiй.

Мысли Коменскаго не упали на безплодную почву. Его послѣдователи даютъ уже такiе совѣты относительно преподаванiя геометрiи: «Начинающихъ учите сперва распознавать фигуры, называть ихъ и отличать, затѣмъ переходите къ черченiю; въ теоремахъ и задачахъ надо сперва дѣлать чертежъ, соотвѣтствующiй условiю, потомъ провѣрять этотъ чертежъ инструментами, дѣйствительно ли онъ соотвѣтствуетъ условiю; далѣе должны итти попытки къ доказательству при помощи инструментовъ и черченiя; и только послѣ доказательствъ механическаго характера должны итти доказательства логическiя, т.-е. тѣ, какiя даются въ учебникахъ геометріи; доказательства лучше всего вести въ видѣ вопросовъ и отвѣтовъ, образующихъ непрерывную цѣпь».

Въ другомъ мѣстѣ говорится: «Мѣру, напримѣръ дюймъ, недостаточно только упомянуть и начертить, но надо указать ее еще на линейкѣ, представляющей собою футъ. Наставники должны научить проводить линіи, называть ихъ, чертить имъ равныя; они должны показать учащимся, какъ прикладывается ватерпасъ не только къ прямой линіи, начерченной на бумагѣ, но также и къ линіямъ въ натурѣ, напр. на окнахъ, на полу; ватерпасъ надо давать въ руки дѣтямъ, чтобъ и они учились прикладывать его и пользоваться, а не только смотрѣли на учителя. Какое-нибудь свойство круга, напр. что радіусъ откладывается 6 разъ по окружности, можно показать не только на точномъ геометрическомъ чертежѣ, но и на шляпѣ дѣтей и на колесѣ. Когда учащіеся будутъ удовлетворительно чертить фигуру на бумагѣ и приводить ее къ виду, удобному для вычисленія площади, тогда наставники должны пойти въ садъ или въ поле, отмѣрить тамъ сперва квадратный кусокъ и опредѣлить его площадь, затѣмъ прямоугольный, треугольный и т. д. и поступать съ ними такъ же. Полезно еще вводить въ упражненія фигуры разныхъ размѣровъ и сравнивать ихъ при помощи масштаба. У каждаго изъ учениковъ долженъ быть на рукахъ, по крайней мѣрѣ, деревянный или картонный масштабъ. Желательно имѣть краткій учебникъ по геометріи, но только для повторенія того, что разъясняется учителемъ».

Примѣчательное теченіе въ области педагогики XVIII вѣка, которое шло въ школахъ такъ наз. «филантропистовъ», стремилось приспособить школу къ дѣтскому разуму и дѣтскимъ стремленіямъ, т. е. сдѣлать ученье доступнымъ и пріятнымъ. Филантрописты особенно любили преподавать геометрію на свѣжемъ воздухѣ, среди природы, и избѣгали тѣсной классной комнаты. Естественно, что они геометрію основывали на землемѣріи. Они измѣряли и строили не на классной доскѣ и не на бумагѣ, а на поверхности земли, на пескѣ. Они опредѣляли объемы стѣнъ и обрубковъ дерева. Вычисленіе площадей начиналось съ квадрата, затѣмъ переходило къ прямоугольнику, который также расчленялся на квадраты; далѣе приступали къ треугольнымъ фигурамъ, и высоту въ этомъ случаѣ проводили при помощи плотничьяго ватерпаса — двигали его горизонтальную сторону по основанію и наблюдали, когда отвѣсная линія будетъ обращена на вершину треугольника, здѣсь и надо отмѣчать начальную точку высоты. Итакъ, начиная съ Коменскаго и кончая филантропистами, педагогика стремится снять съ преподаванія схоластическія тягости, сдѣлать его доступнымъ и пріятнымъ; въ частности для геометріи усилія клонятся къ тому, чтобы путь чисто-логическихъ доказательствъ проходить уже послѣ того, какъ собранъ будетъ фактическій матеріалъ при помощи землемѣрія или же фигуръ и тѣлъ, находящихся подъ руками.

Трезвыя мысли Коменскаго и его послѣдователей сохраняютъ всю свою силу и для нашего времени, въ особенности для начальной школы, для первоначальнаго курса геометріи, такъ какъ именно здѣсь собирается тотъ наглядный матеріалъ, который затѣмъ въ средней школѣ подвергается логической обработкѣ.

5. Ко временамъ Песталоцци ~~знаменитаго швейцарскаго~~ педагога, умершаго въ 1827 году, геометрія получила уже опредѣленное мѣсто среди предметовъ курса народной школы. Песталоцци, выдвинувшій на первый планъ вообще въ педагогикѣ принципъ всесторонняго развитія душевныхъ силъ дѣтей, смотрѣлъ на геометрію, какъ на одно изъ лучшихъ средствъ развитія. Онъ утверждалъ, что главныхъ образовательныхъ элементовъ три: слово, число и форма. Съ его временъ геометрія, по крайней мѣрѣ въ программахъ народной школы, стала называться ученіемъ о формѣ (нѣмецкій терминъ Formenlehre).

Песталоцци былъ горячимъ поборникомъ нормальнаго и всесторонняго развитія дѣтей. Поэтому геометрію онъ начиналъ съ дѣтьми довольно рано и притомъ изучалъ ее практически на фигурахъ. Самой употребительной фигурой у него былъ квадратъ. Различныя комбинаціи квадрата и его частей давали Песталоцци массу матеріала для первоначальныхъ упражненій въ геометріи. Черченіе практиковалось, главнымъ образомъ, отъ руки съ цѣлью развить глазомѣръ и, кромѣ того, сдѣлать переходъ къ рисованію. Затѣмъ къ квадрату присоединялся кругъ, и шли опять различныя комбинаціи ихъ частей.

Песталоцци необыкновенно мастерски пользовался наглядностью; онъ велъ занятія такъ, что ученики незамѣтно, но неуклонно шли впередъ въ пріобрѣтеніи знанія и развитія. Онъ, наконецъ, обладалъ искусствомъ возбуждать и поддерживать безъ перерывовъ душевную дѣятельность учениковъ.

Однако, при всѣхъ своихъ истинно-педагогическихъ талантахъ, Песталоцци опустилъ изъ виду практическія примѣненія геометріи, придалъ ей нѣсколько сухой тонъ; отъ этого система Песталоцци въ рукахъ обыкновенныхъ педагоговъ не можетъ похвастаться ни пользой, ни доступностью.

Во всякомъ случаѣ, мы должны заимствовать отъ Песталоцци его, безспорно, полезныя указанія о томъ, что первоначальное преподаваніе геометріи надо строить на наглядности и что изученію ея надо придать развивающій характеръ.

Послѣдователи Песталоцци ввели нѣкоторыя поправки въ его систему и старались примѣнять геометрію, во-первыхъ, къ черченію при помощи циркуля и линейки, а во-вторыхъ, къ различнаго рода измѣреніямъ. Наглядное изученіе они начинали съ геометрическихъ тѣлъ: куба, параллелепипеда, призмы, цилиндра, пирамиды, конуса, шара. Изъ разсмотрѣнія тѣлъ они выводили основныя геометрическія понятія, т.-е. о поверхностяхъ, линіяхъ, углахъ и фигурахъ.

Такой путь начальнаго преподаванія геометріи примѣняется во многихъ учебникахъ и въ наши дни. Вѣроятно, читатель знакомъ съ краткимъ курсомъ геометріи Вулиха или съ учебникомъ для городскихъ училищъ А. Малинина и Ѳ. Егорова.

Печать Песталоцци легла на введеніяхъ въ эти учебники, знакомыхъ намъ. Нѣкоторое однообразіе въ разсмотрѣніи указанныхъ тѣлъ, ощущаемая сухость въ изученіи ихъ проистекаютъ оттого, что ученикъ, усвоивая матеріалъ, не видитъ его примѣненія; изучая комбинаціи, довольно однообразныя, не сознаетъ, къ чему бы онѣ могли послужить. Онъ считаетъ у треугольной призмы 9 двугранныхъ угловъ, 6 трегранныхъ; линейныхъ угловъ 18, изъ коихъ 6 въ основаніяхъ и 12 въ боковыхъ граняхъ. Такой же счетъ идетъ для шестиугольной призмы и для всякой прямой призмы. Къ чему весь этотъ счетъ? Кто въ жизни считаетъ количество угловъ и реберъ у разныхъ призмъ и пирамидъ? Есть ли у дѣтей склонность къ такимъ систематичнымъ и сухимъ расчетамъ?

6. Изъ педагоговъ, близкихъ къ нашему времени, слѣдуетъ остановиться на Дистервегѣ, жившемъ и дѣйствовавшемъ въ срединѣ XIX вѣка. Онъ близокъ былъ геометріи, и его учебникъ

по начальной геометріи, переработанный для нашихъ школъ проф. Давидовымъ (Геометрія для уѣздныхъ училищъ), пользуется распространеніемъ. Свои методическіе взгляды на преподаваніе геометріи Дистервегъ выражаетъ такъ: «Геометрія въ народной школѣ должна болѣе всего преслѣдовать цѣль развитія. Изучая ее, ученикъ долженъ прежде всего мыслить и мысли свои представлять ясно, опредѣленно и отчетливо. Неважно то, какія теоремы проходитъ онъ для упражненія своего мышленія, лишь бы онѣ годились, какъ логическій матеріалъ. Надо такъ подобрать геометрическія предложенія, чтобы цѣпь ихъ наилучшимъ образомъ содѣйствовала развитію душевныхъ силъ, и чтобъ они, не нуждаясь въ пространныхъ введеніяхъ, допускали по нѣскольку путей доказательства».

Дистервегъ былъ поклонникомъ эвристическаго метода обученія. Геометрію онъ считалъ наиболѣе удобнымъ предметомъ для этого. Онъ горячо и неуклонно рекомендуетъ прорабатывать съ учениками теоремы не въ излагательной формѣ, а въ формѣ вопросо-отвѣтной, такъ какъ при ней геометрія дѣйствуетъ болѣе развивающимъ образомъ. Эвристическая разработка теоремы должна по Дистервегу, дать ученикамъ весь тотъ матеріалъ, который нуженъ для доказательства, и поставить ихъ на ту ступень, на которой они могутъ самостоятельно изыскать доказательство теоремы и формулировать его. Учитель не долженъ давать дѣтямъ полнаго доказательства теоремы: достаточно установить опредѣленно, что требуется доказать, и какимъ путемъ надо итти къ желаемому. Опредѣленнаго хода построенія ученику не дается, онъ долженъ его придумать. Если же учитель самъ сдѣлаетъ построеніе и самъ проведетъ доказательство, а ученики имъ воспользуются, то истинная цѣна геометріи отъ этого теряется, и развивающее значеніе ея пропадаетъ. По убѣжденію Дистервега, для учениковъ имѣютъ значеніе не заглавія теоремъ, т. е. не результаты выводовъ и доказательствъ, а самый процессъ вывода, обдумываніе, изобрѣтеніе, такъ какъ упражненіямъ въ выводахъ и доказательствахъ принадлежитъ настоящее развивающее значеніе.

Нельзя согласиться съ Дистервегомъ, что практическія приложенія геометріи не заслуживаютъ вниманія и что вся ея польза состоитъ въ логическихъ упражненіяхъ. Примѣненія геометріи нужны и до доказательства теоремъ, такъ какъ они сообщаютъ тотъ фактическій матеріалъ, изъ котораго вытекаютъ основныя геометрическія понятія; они нужны и послѣ доказательства теоремъ, такъ какъ для человѣка нѣтъ ничего естественнѣе, какъ проявлять свою душевную дѣятельность во внѣ. Сказанное особенно приложимо къ питомцамъ начальной школы, которые не доросли еще до чистыхъ логическихъ упражненій.

Односторонніе взгляды Дистервега на то, что геометрія имѣетъ цѣну только какъ рядъ упражненій въ логикѣ, возбудили противъ себя многихъ дѣятелей начальной школы и заставили во 2-й половинѣ XIX столѣтія поставить вопросъ ребромъ, годится ли вообще геометрія для начальной школы (рѣчь идетъ преимущественно о 5—6-годичномъ курсѣ). Нѣкоторые предлагали ограничить ея содержаніе черченіемъ и рѣшеніемъ числовыхъ задачъ. Однако спорный вопросъ рѣшенъ былъ въ пользу геометріи, и въ различныхъ государствахъ она признана была учебнымъ предметомъ въ тѣхъ школахъ, гдѣ обученіе ведется не менѣе 5 лѣтъ. Въ настоящее время есть типы школъ, гдѣ начальныя свѣдѣнія по геометріи даются уже на 2-мъ году обученія. Такъ, въ программѣ женевскихъ народныхъ училищъ (съ шестилѣтнимъ курсомъ) для второго года указано: «Свойства прямой линіи. Пересѣченія линій. Ломаная и кривая линія. Прямой уголъ. Треугольникъ (опредѣленія необязательны)».

7. Самый конецъ XIX столѣтія принесъ для методики геометріи двѣ подробности, довольно интересныхъ и небезполезныхъ. Въ Германіи обращено было вниманіе на нѣкоторую сухость преподаванія, допущенную въ системахъ Песталоцци и Дистервега. Въ противовѣсъ ей предложено какъ можно болѣе сближать геометрическій матеріалъ съ тѣми данными, которыя имѣются на глазахъ учениковъ въ классной комнатѣ, дома и на улицѣ. Кромѣ моделей тѣлъ и чертежей фигуръ рекомендуется находить тѣла и фигуры въ домашней обстановкѣ. При производствѣ измѣреній и рѣшеніи задачъ пользоваться опять-таки данными повседневной жизни. Всѣмъ этимъ изощряется наблюдательность дѣтей, пополняется матеріалъ для ихъ умственной дѣятельности, и вообще ученье сближается съ жизнью. Изъ авторовъ, слѣдующихъ этому направленію, можемъ указать на Мартига и Шмидта, которые всю начальную геометрію раздѣляютъ на 3 части, съ тѣмъ, чтобы первую часть разрабатывать въ комнатѣ и около дома, вторую — въ полѣ, на лугу и въ лѣсу, и третью, наконецъ,

на основаніи матеріала, имѣющагося въ мастерской или магазинѣ.

Другая подробность принадлежитъ школѣ англійской и американской. Тамъ обращено вниманіе на принципъ старинный, но въ то же время вѣчно новый, потому что его постоянно забываютъ и вспоминаютъ. Это извѣстное латинское изреченіе, что учиться мы должны не для школы, а для жизни, и слѣдовательно всякое правильное образованіе должно черпать свои основанія изъ жизни и проявлять себя въ жизни Знаніе есть сила, и человѣкъ знающій, человѣкъ ученый, несомнѣнно, обладаетъ запасомъ силы. Но, какъ учитъ механика, въ силѣ кромѣ величины важно еще направленіе дѣйствія; такъ и въ знаніи, чтобъ оно не оставалось мертвымъ и безплоднымъ, необходима дѣятельность воли, характера, чтобы проявить знаніе, примѣнить его. Англійская и американская школа не считаетъ умственное развитіе человѣка единственной, главной цѣлью школы. Она требуетъ воспитанія характера. А такъ какъ характеръ вырабатывается въ дѣятельности, то заботой школы является упражненіе учениковъ въ дѣятельности. Какая же дѣятельность можетъ соотвѣтствовать изученію геометріи? Очевидно, проявленіе тѣхъ образовъ и представленій, какіе накапливаются въ геометріи, и приложеніе тѣхъ выводовъ, какіе въ ней дѣлаются. Ученики вырѣзываютъ изъ бумаги и выпиливаютъ тѣ фигуры и тѣла, о которыхъ они проходятъ въ геометріи. Они производятъ измѣренія въ мастерской и на полѣ. Въ извѣстномъ проектѣ Демолена, касающемся реформы французской школы и составленномъ подъ вліяніемъ англійской педагогики, авторъ съ особеннымъ удареніемъ останавливается на томъ, что геометрія должна быть не только теоретической, но и практической, что она должна сопровождаться практическими примѣненіями въ техникѣ и землемѣріи.

Итакъ, вотъ окончательный выводъ, къ которому насъ приводитъ это, хотя и бѣглое, разсмотрѣніе развитія методики геометріи. Геометрія ни въ коемъ случаѣ не можетъ быть въ народной школѣ и вообще въ начальномъ курсѣ предметомъ отвлеченныхъ, чисто-логическихъ упражненій. Она должна черпать свой матеріалъ изъ жизни, такъ какъ безъ этого даже и логическая система не будетъ покоиться на твердыхъ устояхъ. Сверхъ того, она должна прилагать свои выводы къ рѣшенію житейскихъ вопросовъ, потому что психологія человѣка требуетъ проявленія его энергіи во внѣшнихъ дѣйствіяхъ, и если только накапливать знанія безъ ихъ проявленія, то развитіе ума получитъ ненормальный перевѣсъ надъ развитіемъ воли, и насильственная задержка энергіи въ человѣкѣ приведетъ къ нарушенію нормъ психической жизни.

II. Сообразность съ природой учащихся дѣтей.

Первымъ, руководящимъ принципомъ, котораго долженъ держаться преподаватель начальной геометріи, является сообразность съ природой дѣтей.

Золотыя слова встрѣчаемъ мы въ статьѣ В. И. Фармаковскаго[1]), написанной по поводу работъ извѣстнаго экспериментатора проф. Меймана: «Изученіе дѣтской души и дѣтскаго міра составляетъ непремѣнную обязанность воспитателя Нужно проникнуть въ дѣтскій кругозоръ, понять истинныя потребности пробуждающагося сознанія. Новѣйшая экспериментальная наука прилагаетъ всѣ усилія, чтобы пролить свѣтъ на явленія психической жизни дѣтей и такимъ образомъ открыть путь къ природосообразному направленію обученія».

Вопросъ о природосообразности не новъ. Сообразоваться съ природой дѣтей рекомендовали, и притомъ энергично, усиленно, многіе педагоги, начиная еще съ Амоса Коменскаго. Однако это дидактическое положеніе все еще никакъ не можетъ войти въ свои права. Оно испытываетъ участь многихъ азбучныхъ истинъ, которыя у всѣхъ на языкѣ и почти ни у кого не проводятся на дѣлѣ. Въ параллель приведемъ слова Ушинскаго относительно другой азбучной истины, что праздность есть мать всѣхъ пороковъ: «Развѣ эта азбучная истина, которую въ первый разъ высказалъ какой-нибудь греческій мудрецъ, глубоко вдумавшійся въ жизнь человѣка, не превратилась для насъ въ пустую, непонятную фразу? Изъ чего же видно, что эта азбучная фраза, напоѣвшая намъ на прописяхъ, понята нами, какъ глубокая и вѣчная, къ каждому изъ насъ приложимая, истина? Не показываемъ ли мы во всѣхъ нашихъ же-

[1]) В. И. Фармаковскій, Опытъ педагогической мнемоники. («Извѣстія по нар. образ.», іюнь 1910, стран. 266.)

ланіяхъ, что эта истина не проникла до нашего сердца, что мы не вѣримъ тому, что она истина?»

Итакъ, повторяемъ: первымъ требованіемъ обученія начальной геометріи является сообразность съ природой дѣтей. Это требованіе испытываетъ въ щколѣ въ настоящее время массу нарушеній и отступленій. Еще знаменитый французъ Тюрго сказалъ: «Наше воспитаніе есть не что иное, какъ педантизмъ: насъ учатъ совершенно наперекоръ природѣ. Въ голову дѣтей вбиваютъ кучу отвлеченныхъ идей, которыхъ они не могутъ охватить». Дѣтямъ въ настоящее время преподаютъ ту геометрію и въ той же системѣ, какія были во времена Пиѳагора и Платона предназначены для юношей и даже взрослыхъ мужей. Дѣтей обращаютъ въ маленькихъ философовъ. Ихъ заставляютъ мыслить строго логически, ничего не принимать безъ доказательства, а между тѣмъ авторитетное свидѣтельство свящ. Писанія удостовѣряетъ, что дѣтямъ свойственно имѣть вѣру сильную и чистую, какой не встрѣчается у взрослыхъ. Дѣтей хотятъ снабдить сразу научными геометрическими свѣдѣніями и вмѣсто того мучатъ ихъ запоминаніемъ отвлеченныхъ и малопонятныхъ фразъ. Дѣти склонны жить активной жизнью, и ихъ энергія погашается, когда съ нихъ требуютъ жить чистымъ мышленіемъ.

Всѣ недостатки преподаванія начальной геометріи происходятъ отъ нарущенія принципа природосообразности, и всѣ улучшенія явственно вытекаютъ изъ этого же принципа. Онъ приводитъ прежде всего къ правилу, довольно извѣстному въ дидактикѣ: начинать обученіе съ той ступени, на которой стоитъ ученикъ. Какъ прекрасно сказано въ той же статьѣ Фармаковскаго, со ссылкой на Штерна, въ семилѣтнемъ возрастѣ вниманіе дѣтей сосредоточивается исключительно на предметахъ; въ дальнѣйшемъ возрастѣ, примѣрно до 10 лѣтъ, оно устремляется на дѣйствія лицъ; затѣмъ мало-по-малу переносится на простѣйшія отношенія, напримѣръ, пространственныя; такъ продолжается лѣтъ до 12—14; лѣтъ въ 14 наступаетъ новый періодъ развитія, въ которомъ наблюдаются и уже анализируются свойства вещей.

И вотъ преподаватель геометріи, какъ опытный и терпѣливый садовникъ, внимательно долженъ усматривать, на какой тупени развитія стоитъ ученикъ, и съ чего можно начать съ нимъ изученіе геометріи: съ предметовъ ли, съ дѣйствій надъ предметами, съ простѣйшихъ отношеній или съ анализа свойствъ. У насъ педагоги часто грѣшатъ тѣмъ, что начинаютъ съ конца, съ послѣдняго, т.-е. съ анализа свойствъ, вмѣсто того, чтобы начинать съ предметовъ, дѣйствій и простѣйшихъ отношеній.

Сообразуясь съ возрастомъ и развитіемъ учениковъ, учитель долженъ еще сообразоваться съ принадлежностью ихъ къ извѣстной средѣ. Всякій ученикъ представляетъ собою и личность, и часть цѣлаго, т.-е. часть среды, къ которой онъ принадлежитъ. Сельскій школьникъ замѣтно отличается отъ городского тѣмъ запасомъ свѣдѣній, съ какимъ онъ является въ училище. Русскіе ученики не вполнѣ равны англійскимъ и нѣмецкимъ по характеру развитія и по результатамъ вліянія на нихъ окружающей среды. Поэтому начинать обученіе нельзя съ одного и того же во всѣхъ странахъ, во всевозможныхъ условіяхъ, но надо непремѣнно учесть всѣ вліянія, которымъ подвергались и подвергаются учащіяся дѣти.

Противъ этого положенія грѣшитъ, напримѣръ, «Наглядная геометрія» В. Кемпбеля[1]). Она отправляется отъ такихъ данныхъ, которыя чужды нашимъ школьникамъ, не только сельскимъ, но и городскимъ. Если же эти данныя разъяснять, напримѣръ «Гребцы на Темзѣ», «Колокольня въ Бостонѣ» и т. п., то вниманіе учениковъ раздвоится, и, кромѣ того, нарушится дидактическое правило, по которому слѣдуетъ отъ близкаго переходить къ отдаленному.

То же можно сказать про «Начальчую элементарную геометрію для дѣтей» Г. Алексѣева[2]). Всѣ эти цирковые паяцы и разукрашенныя дѣти на рисункахъ Г. Алексѣева будутъ только разсѣивать, по своей новизнѣ, начинающихъ учиться геометріи и во всякомъ случаѣ не дадутъ твердыхъ представленій, такъ какъ рисунки не соотвѣтствуютъ уровню свѣдѣній подавляющаго большинства нашихъ учащихся мальчиковъ и дѣвочекъ.

Въ журналѣ «Русскій Начальный Учитель» про геометрію Рашевскаго[3]) сказано (январь 1911) такъ: «Въ этомъ курсѣ

---

[1]) Кемпбель, Наглядная геометрія Перевелъ съ англійскаго Е. Поповъ. 1908.

[2]) Начальная элементарная геометрія въ картинахъ. Сост. и рисовалъ кл. художникъ Г. Алексѣевъ.

[3]) Рашевскій, К Н., Краткій курсъ геометріи. М. 1910.

дано только сжатое изложеніе матеріала; такой краткій курсъ еще труднѣе усвоить: онъ дастъ не краткія знанія, а просто слабыя. Авторъ заботится о краткости, но не о выборѣ матеріала и способѣ его изложенія. Геометрія затрудняетъ дѣтей, начинающихъ ею заниматься, отвлеченностью работы мысли, методомъ мышленія, непривычнаго для начинающаго, но котораго требуютъ геометрическіе выводы». Съ этимъ отзывомъ о геометріи Рашевскаго нельзя не согласиться: этотъ учебникъ не согласованъ съ природой дѣтей, такъ какъ примѣняетъ методъ, не подходящій для нихъ.

То же можно сказать и про учебникъ Казмина[1]). Самъ авторъ въ предисловіи сознается, что «первое время ученики не освоятся съ геометріей, будутъ отвѣчать невпопадъ, смѣшивать данныя и вопросъ теоремы, но потомъ они быстро наверстаютъ время». Спрашивается: не лучше ли было бы, если бы дѣти уже и въ первое время отвѣчали впопадъ? Вѣдь отвѣчаютъ же они на первыхъ урокахъ ариѳметики охотно и разумно, не сбиваясь, если учитель примѣняетъ вѣрный методъ. Такъ и въ геометріи, единственно неискусствомъ учителя, т.-е. неправильностью метода, можно объяснить нелѣпые отвѣты учениковъ, будь то въ началѣ или въ концѣ обученія.

Какъ расположить и обработать геометрическій матеріалъ сообразно природѣ дѣтей,— это прежде всего разъясняется данными психологіи, изслѣдующей душевную природу человѣка, и дидактикой, дающей общія правила обученія. Обо всемъ этомъ будетъ рѣчь впереди. Теперь же мы обратимъ вниманіе на третій источникъ методическихъ свѣдѣній, именно — на историческія данныя.

Общеизвѣстно въ наукѣ утвержденіе, что развитіе отдѣльнаго лица проходитъ въ общемъ по тѣмъ же ступенямъ, что и развитіе цѣлаго народа. Въ виду этого, желая опредѣлить нормальный ходъ развитія геометрическихъ знаній въ отдѣльномъ человѣкѣ, мы можемъ взять на справку ходъ развитія тѣхъ же знаній во всемъ человѣчествѣ. При этомъ, разумѣется, отождествлять одинъ ходъ съ другимъ во всѣхъ подробностяхъ невозможно. Историческія справки не могутъ давать безусловно

---

[1]) Казминъ Н. Геометрія для двухклассныхъ и другихъ начальныхъ училищъ.

вѣрныхъ указаній, но онѣ являются хорошимъ толчкомъ къ тому, чтобы подумать надъ вопросомъ; провѣренныя съ точки зрѣнія психологіи и опыта, историческія параллели пріобрѣтаютъ, несомнѣнно, цѣнный характеръ.

Что же намъ даютъ справки по исторіи геометріи? Онѣ съ ясной очевидностью показываютъ, что геометрія должна начинаться съ измѣренія протяженій. Такъ было дѣло съ египтянами, такъ оно обстояло и въ массѣ другихъ народовъ (индусы), такъ же оно должно итти и въ случаѣ отдѣльнаго человѣка. Психологія и наблюденія надъ начинающими изучать геометрію дѣтьми вполнѣ подтверждаютъ фактъ, что природѣ человѣка свойственно пріобрѣтать геометрическія свѣдѣнія первоначально изъ опыта. Знаменитый математикъ Лагранжъ говоритъ совершенно опредѣленно, что, по его убѣжденію, для математика очень важна способность наблюдать. Извѣстный авторитетъ въ математикѣ Гауссъ называлъ математику наукой глаза. И дѣйствительно, большая часть великихъ идей современныхъ математиковъ, не говоря уже о древнихъ, получила свое начало въ наблюденіи. Изъ новѣйшихъ математиковъ Риманнъ въ особой диссертаціи доказываетъ, что основаніе нашего понятія о пространствѣ — чисто эмпирическое, что наше знаніе законовъ пространства есть результатъ наблюденія, и что можно представить себѣ существованіе пространствъ другого рода, подчиненныхъ законамъ, несходнымъ съ управляющими дѣйствительнымъ пространствомъ, въ которомъ мы живемъ[1]).

Начиная изученіе геометріи съ наблюденія и измѣренія, человѣчество не могло прійти сразу, безъ продолжительной подготовительной работы къ системѣ геометрическихъ знаній. Согласно съ этимъ, и отдѣльные учащіеся никоимъ образомъ не могутъ усвоивать прямо систематическаго курса геометріи, во всей полнотѣ его обработки. Гораздо болѣе сообразно съ природой человѣка изучать сперва частные случаи и потомъ уже постепенно доходить до общихъ свойствъ, до общихъ теоремъ. Напр., спеціалистъ по исторіи математики Канторъ считаетъ вѣроятнымъ, что первоначальное доказательство Пиѳагоровой

---

[1]) Выписка взята изъ «Проф. Кэджори. Исторія элементарной математики». Перев съ англійскаго. Изд. Mathesis. (стран. 305).

теоремы заключало въ себѣ разсмотрѣніе частныхъ случаевъ первымъ изъ которыхъ былъ, скорѣе всего, случай равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника. Точно такъ же сумма угловъ треугольника первоначально выводилась отдѣльно для каждаго изъ 3 видовъ треугольника: равносторонняго, равнобедреннаго и разносторонняго треугольника.

Изъ приведенныхъ примѣровъ и соображеній ясно вытекаетъ, что исторія геометріи можетъ въ значительной степени освѣтить путь, котораго слѣдуетъ держаться въ преподаваніи, чтобы оно соотвѣтствовало природѣ учащихся.

III. Наглядность.

Геометрія, подобно другимъ учебнымъ предметамъ, не можетъ обходиться безъ наглядности. Въ настоящее время твердо установлено психологіей и педагогикой, что никакое отвлеченное мышленіе невозможно, если ему не предшествуетъ обогащеніе сознанія нужными представленіями. Уже со временъ Коменскаго извѣстно въ педагогикѣ положеніе: «Что не входитъ въ насъ внѣшними чувствами, того вообще не бываетъ и въ духѣ». Въ виду этого наглядность необходима во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда ученикъ не имѣетъ соотвѣтствующихъ представленій, или же хотя и имѣетъ ихъ, но не обладаетъ достаточной силой воспроизведенія.

Можно бы и съ дѣтьми пройти курсъ геометріи отвлеченно, словесно. Такъ, по крайней мѣрѣ, учили въ средневѣковыхъ школахъ. Тогда начинали прямо съ изложенія, что такое пространство; давали раздѣленіе пространства, объясняли словесно важнѣйшія геометрическія понятія, присоединяли сюда нѣкоторыя аксіомы и теоремы; доказательства излагалъ ученикамъ самъ учитель, и роль ученика все время была пассивная, но не активная. Голова ученика являлась копилкой, въ которую складывались перлы мудрости учителя. Ученіе при этомъ такъ далеко отстояло отъ жизни, что ученику даже и поводовъ не давалось задуматься, къ чему все это ученіе можетъ повести. Многіе средневѣковые ученые сами держались того убѣжденія, что преподаваніе геометріи не имѣетъ смысла и цѣли.

Такъ было въ средніе вѣка, и кое-какіе слѣды такой постановки замѣчаемъ мы еще нынѣ. И тѣмъ болѣе надо настаивать на положеніи, что природа человѣка не допускаетъ отвлеченнаго мышленія съ самыхъ первыхъ ступеней, что она требуетъ предварительнаго пополненія сознанія представленіями. По аналогіи, если мы лошадь не кормимъ овсомъ, то мы не можемъ требовать отъ нея и бѣга. Точно такъ же, не снабдивши дѣтей нужными для нихъ представленіями, мы не въ правѣ разсчитывать на здоровое геометрическое мышленіе. Голодная лошадь не бѣжитъ, а ученикъ, лишенный необходимой наглядности, становится слабымъ, переходитъ въ разрядъ неуспѣвающихъ, испытываетъ отвращеніе къ предмету. Наоборотъ, умѣлое примѣненіе наглядности вызываетъ самодѣятельность дѣтей и интересъ ихъ къ дѣлу, вообще является однимъ изъ важныхъ условій успѣха.

Сама исторія геометріи учитъ насъ тому, что изученіе геометріи, естественно, испытывало переходъ отъ опыта и наблюденія къ выводамъ, т.-е. отъ фактовъ къ системѣ. Та система, которая проводится въ настоящее время въ учебникахъ по геометріи, принадлежитъ почти вполнѣ Эвклиду[1]). Но еще до Эвклида

---

[1]) Эвклидъ, жившій за 300 лѣтъ до Р. Х., составилъ знаменитые «Элементы» — греческое ихъ заглавіе *στοιχεια*. Они раздѣляются на 13 книгъ. Въ I книгѣ говорится объ основныхъ частяхъ прямолинейныхъ фигуръ на плоскости, о прямыхъ линіяхъ пересѣкающихся и непересѣкающихся. При этомъ 3 пересѣкающіяся линіи образуютъ треугольникъ; здѣсь указывается, чѣмъ треугольникъ опредѣляется, и когда треугольники равны между собою. За пересѣкающимися линіями разсматриваются параллельныя линіи и при нихъ также параллелограммы. Книга заканчивается понятіемъ о равновеликихъ фигурахъ и превращеніемъ прямолинейныхъ фигуръ въ параллелограммы. II книга болѣе всего посвящена Пиѳагоровой теоремѣ и ея примѣненіямъ. Здѣсь же рѣшается задача о дѣленіи линіи въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. III книга содержитъ ученіе объ окружности и объ измѣреніи угловъ дугами. Въ IV книгѣ вписанные и описанные многоугольники, въ особенности правильные. Въ V книгѣ объясняются пропорціи на примѣрѣ прямыхъ линій. Въ VI книгѣ подобіе фигуръ. Въ VII, VIII и IX кн. Эвклидъ помѣщаетъ нѣкоторыя свѣдѣнія изъ ариѳметики, которыя необходимы для пониманія геометріи; болѣе всего говорится о дѣлимости чиселъ, о наименьшемъ кратномъ и общемъ наибольшемъ дѣлителѣ. Въ X книгѣ говорится о несоизмѣримыхъ количествахъ. XI кн. — въ ней начинается стереометрія, почти въ той самой формѣ, какая принята сейчасъ въ систематическихъ курсахъ геометріи. XII кн. содержитъ измѣреніе объема пирамиды, призмы, конуса, цилиндра и наконецъ шара. Дѣйствительнаго вычисленія Эвклидъ никогда не даетъ, ни въ опредѣленіи площадей, ни въ объемахъ; въ частности при такихъ протяженіяхъ, которыя

многіе греческіе геометры старались дать свою систематизацію предмета, правда, менѣе удачную, менѣе полную. Такъ, Ѳалесъ за 300 лѣтъ до Эвклида положилъ основаніе геометріи линій и угловъ, имѣющей по самому существу своему отвлеченный характеръ. Но въ то же время про Ѳалеса существуетъ сказаніе, что онъ своими геометрическими свѣдѣніями обязанъ египетскимъ жрецамъ; египетская же геометрія разрабатывала преимущественно матеріалъ, представляемый поверхностями и тѣлами, и имѣла такимъ образомъ, несомнѣнно, эмпирическій характеръ. Слѣдовательно, мы ясно видимъ тотъ порядокъ, въ которомъ шло совершенствованіе предмета геометріи: преобразованіе опытовъ и наблюденій въ систему, сначала менѣе совершенную и полную, а потомъ болѣе строгую. Такъ какъ эта историческая параллель вполнѣ согласуется съ выводами психологіи и положеніями дидактики, то мы въ правѣ формулировать требованіе: чтобъ обученіе геометріи основывалось на наглядности.

Самъ Эвклидъ, несмотря на явную склонность къ тому, чтобы представить геометрію въ видѣ системы идей, не чуждался наглядности: теоремы и задачи сопровождаются чертежами. Но этой наглядности, конечно, мало для начинающихъ; прежде чѣмъ перейти къ условному представленію фигуръ и формъ, имъ надо запастись представленіями непосредственными. Они имѣютъ значеніе даже для самой доказательности свойствъ. Что человѣкъ самъ испыталъ, въ томъ онъ убѣжденъ гораздо больше, чѣмъ въ положеніи, которое логически доказываетъ ему другой человѣкъ, но въ которомъ онъ самъ не имѣлъ случая убѣдиться чрезъ посредство собственныхъ чувствъ. «Рус-

включаютъ въ себѣ кругъ, нигдѣ не объясняется, какъ собственно вести вычисленіе. Очевидно, Эвклидъ раздѣляетъ взглядъ Аристотеля, что «доказывать ничего нельзя, исходя изъ чуждыхъ основаній», напр., ничего нельзя доказывать геометрическаго при помощи ариѳметики. XIII книга разбираетъ вопросъ о правильныхъ многогранникахъ.

Та форма, въ которой Эвклидъ излагаетъ свои статьи, т.-е. сперва даетъ формулировку теоремы, потомъ дѣлаетъ чертежъ и отмѣчаетъ на немъ данныя и искомыя протяженія, затѣмъ ведетъ доказательство и заканчиваетъ его словами: «что и требовалось доказать» (*ὅπερ ἔδει δεῖξαι*), скорѣе всего заимствована Эвклидомъ изъ египетской геометріи. (Свѣдѣнія объ «Элементахъ» Эвклида смотри у «Kantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. *Zweite Auflage. 1894. S. 244—263.*

скій человѣкъ глазамъ не вѣритъ», но онъ желаетъ провѣрить еще другимъ чувствомъ, хотя бы осязаніемъ; чисто словесному доказательству онъ повѣритъ еще менѣе, чѣмъ глазамъ. Нѣчто подобное и съ дѣтьми. Логическія доказательства принимаются ими постольку, поскольку они согласуются съ данными опыта. Такимъ образомъ наглядность имѣетъ значеніе и для доказательности.

Какіе же геометрическіе элементы наиболѣе нуждаются въ наглядномъ представленіи? Песталоцци категорически отвѣчалъ на этотъ вопросъ указаніемъ формы. Онъ считалъ форму, наравнѣ со словомъ и числомъ, глубоко-образовательнымъ элементомъ, и представленія формы начиналъ съ квадрата. Одному изъ его послѣдователей, Гарнишу (1821 г.), принадлежитъ мысль начинать элементарный курсъ геометріи съ разсмотрѣнія геометрическихъ тѣлъ. Этимъ онъ давалъ наглядное основаніе для усвоенія поверхностей, линій и угловъ. Основанный на наглядности, курсъ Гарниша въ дальнѣйшемъ своемъ развитіи пользуется способностью сужденія. Гарнишъ требовалъ отъ учениковъ чистыхъ чертежей, исполненныхъ при помощи циркуля и линейки. Также онъ требовалъ приготовленія моделей и рѣшенія задачъ практическаго характера на мѣстности или на чертежѣ.

Мнѣніе Гарниша о необходимости начинать элементарный курсъ геометріи съ изученія геометрическихъ тѣлъ сохраняетъ силу авторитета еще до нашихъ дней. И въ программахъ и во многихъ учебникахъ разсмотрѣніе геометрическихъ тѣлъ кладетъ начало занятіямъ по геометріи.

Гербартъ и его послѣдователи рекомендуютъ начинать работу не съ моделей геометрическихъ тѣлъ, а съ предметовъ окружающей обстановки. Для перваго урока они даютъ хотя бы ящикъ изъ-подъ сигаръ. Гербартъ желалъ, чтобы всѣ предметы школьнаго курса, и между ними геометрія, вели къ общей цѣли воспитанія — къ укрѣпленію нравственнаго характера. Въ виду этого имъ были выставлены слѣдующія требованія: a) чтобы математика отказалась отъ своей обособленности и вошла въ связь съ естествовѣдѣніемъ, b) чтобы основныя геометрическія понятія получались не на моделяхъ и искусственныхъ наглядныхъ пособіяхъ, но на предметахъ окружающаго міра. Согласно принципамъ Гербарта, составлены были нѣсколькими авторами учебники по геометріи, гдѣ геометрическія протяженія сгруппированы, такъ сказать, по семействамъ, напр.: домъ, церковь, поле, лугъ, лѣсъ, мастерская, пути сообщенія и т. п.

Съ мнѣніемъ Гербарта согласиться трудно, несмотря на то, что оно принимается и нѣкоторыми английскими авторами. Несомнѣнно, что модели гораздо лучше служатъ цѣлямъ наглядности, чѣмъ предметы природы и окружающей обстановки. Модели проще, и геометрическія свойства выдѣляются на нихъ яснѣе, при чемъ вниманіе дѣтей не раздваивается. Съ моделей лучше начинать преподаваніе; однако, проведши работу на моделяхъ, необходимо вслѣдъ за тѣмъ перейти и къ окружающимъ предметамъ, предложить ученикамъ всмотрѣться въ нихъ и найти подходящіе примѣры съ тѣмъ, чтобы повторить разобранныя свойства.

Выше замѣчено, что самъ Эвклидъ допускалъ наглядность въ видѣ чертежей. Они являются общераспространеннымъ, признаваемымъ всѣми, пособіемъ при изученіи геометріи. Здѣсь является вопросъ такой: слѣдуетъ ли отъ чертежа требовать точности и изящества? Или же его можно исполнять отъ руки, безъ особенной заботы о правильности, лишь бы онъ только выражалъ идею извѣстнаго геометрическаго соотношенія? Мы стоимъ за первое, по крайней мѣрѣ въ предѣлахъ элементарнаго курса. Дѣло въ томъ, что ясный и точный чертежъ гораздо болѣе служитъ цѣлямъ наглядности, чѣмъ чертежъ приближенный. И, значитъ, чѣмъ болѣе является потребность въ наглядности, тѣмъ тщательнѣе надо исполнять чертежи. Но чертежъ вовсе нельзя считать необходимымъ условіемъ преподаванія геометріи. При достаточной привычкѣ учениковъ, когда они изучаютъ уже систематическій курсъ, полезно нѣкоторыя теоремы и задачи разрабатывать безъ чертежей, только воображая тѣ протяженія, которыя нужны въ построеніи. Этимъ мы окажемъ большую услугу развитію въ дѣтяхъ (старшаго возраста) силы воображенія. Аналогично съ этимъ первыя теоремы стереометріи (о взаимномъ положеніи линій и плоскостей) умѣстно разрабатывать также безъ чертежа, пользуясь линіями и плоскостями классной комнаты, гдѣ такъ много параллелей и перпендикуляровъ, и дополняя воображеніемъ нужныя линіи и плоскости. Вотъ, напримѣръ, задача: изъ точки A, лежащей внѣ плоскости P, опустить на эту плоскость перпендикуляръ;

ее полезно замѣнить слѣдующей задачей: от крюка, на которомъ виситъ лампа, провести къ полу перпендикуляръ. Рѣшеніе такой задачи потребуетъ значительной работы воображенія и въ этомъ смыслѣ является полезнымъ.

Кромѣ изготовленія чертежей, новѣйшие методисты, особенно англійскіе и американскіе, усиленно рекомендуютъ для начинающихъ учиться геометріи вырѣзываніе фигуръ и формъ. Съ какимъ интересомъ занимаются дѣти вырѣзываніемъ изъ бумаги квадратовъ, треугольниковъ, кружковъ и т. п.! Процессы наложенія, совпаденія и несовпаденія представляются на этихъ пособіяхъ чрезвычайно ясными; перегибаніе и разрѣзываніе приводятъ учащихся ко многимъ выводамъ, такъ сказать, открытіямъ, которыя даются имъ безъ особаго труда и съ избыткомъ окупаютъ затрачиваемое на работу время. — Большую услугу оказываетъ цвѣтная бумага: если фигура должна разлагаться на нѣсколько частей, рѣзко отграничивающихся одна отъ другой, то можно каждую часть приготовить изъ бумаги особаго цвѣта; напримѣръ, изъ разноцвѣтныхъ бумажныхъ квадратиковъ (квадратныхъ вершковъ) можно составить прямоугольникъ, площадь котораго, такимъ образомъ, ясно представится въ квадратныхъ единицахъ; или еще: правильный шестиугольникъ составляется изъ равностороннихъ треугольниковъ.

Англійскій педагогъ Перри рекомендуетъ употребленіе клѣтчатой бумаги. Дѣйствительно, въ начальномъ преподаваніи она незамѣнима, особенно если клѣтки готовятся опредѣленнаго размѣра (сторона равняется сантиметру или $^1/_{10}$ дм.). Клѣтчатая бумага хороша при изученіи площадей, но тетради изъ клѣтчатой бумаги усиленно можно рекомендовать вообще для начальныхъ занятій геометріей и черченіемъ.

Не слѣдуетъ съ начинающими дѣтьми чуждаться и другихъ наглядныхъ пособій, которыя могутъ оказаться подъ рукою учителя и признаны будутъ имъ цѣлесообразными. Всякій разъ, когда у дѣтей не хватаетъ представленій или когда дѣти не въ силахъ воспроизвести ихъ, вслѣдствіе ихъ блѣдности или сложности, необходимо обратиться къ наглядности. Вотъ, для примѣра, способъ, которымъ удачно можно пользоваться въ преподаваніи ученикамъ двухкласснаго или городского училища. Раздается на каждую парту по 4 прутка, палочки, спички и т. д. разной длины, но съ тѣмъ, чтобы наборъ пособій для одной парты равнялся набору для другой. Предлагается устроить (или построить) четырехугольникъ изъ этихъ длинъ. Тогда окажется, что это задача неопредѣленная, что четырехугольники не на всѣхъ партахъ получились одинаковые (убѣждаются измѣреніемъ, да это видно и на глазъ). Если потомъ отобрать изъ 4 прутковъ по 3 опредѣленныхъ и дать задачу построить треугольникъ, то она окажется совершенно опредѣленной, и треугольники на всѣхъ партахъ будутъ одинаковы. Изъ такихъ построеній дѣти поймутъ, что четырехугольникъ еще не опредѣляется 4 сторонами, треугольникъ же вполнѣ опредѣляется 3 сторонами. Точно такимъ же образомъ можно объяснить дѣтямъ, да они и сами это поймутъ безъ учителя, при помощи своей личной работы, что по 2 сторонамъ нельзя получить опредѣленнаго треугольника, такъ какъ на всѣхъ партахъ получились треугольники разные, вслѣдствіе неодинаковости угловъ.

Основныя условія примѣненія наглядности указаны выше: это отсутствіе нужныхъ представленій или же ихъ слабость, при которой они не могутъ воспроизвестись, или же, наконецъ, ихъ многочисленность, когда сила воображенія дѣтей не въ состояніи одолѣть сложныхъ комбинацій. Тактъ разсудительнаго учителя подскажетъ ему, когда наглядность необходима и когда она излишня. Во всякомъ случаѣ невѣрнымъ былъ бы взглядъ, что чѣмъ нагляднѣе, тѣмъ лучше. Но настолько же ошибочно и противоположное направленіе: обходиться безъ наглядности.

Нѣмецкіе методисты, наиболѣе основательно и безпристрастно разрабатывающіе вопросы своей спеціальности, горячо рекомендуютъ примѣненіе наглядности въ начальномъ преподаваніи геометріи. Но въ то же время они предостерегаютъ и противъ увлеченій ею, т.-е. противъ примѣненія ея тогда, когда представленія въ сознаніи учащихся есть и они въ состояніи воспроизводить ихъ. Такъ, въ методикѣ Лихтблау и Кнотта[1]) говорится, что если обучать геометріи исключительно наглядно, не давая работы воображенію и сужденію, то въ дѣтяхъ можетъ развиться вялость мышленія, и способность воображенія у нихъ притупится. Точно также извѣстный методистъ Керъ[2]) мѣтко

---

[1]) W. Lichtblau und A. Knotta. Methodik des Raumlehreunterrichts. 1910 (стран. 36).

[2]) Praktische Geometrie von Dr. Kehr. Neubearb. von Saro. 1910. Изд. 10-е.

выражается, что «Наглядность есть первое, высшее, лучшее. Но она не послѣднее и не единственное». Это значитъ, что наглядность является основаніемъ геометрическихъ знаній, но ограничиться только ею нельзя.

IV. Практичность.

Въ непосредственной связи съ наглядностью находится практичность. Дѣйствительно, собирая представленія изъ окружающаго міра, учащійся тѣмъ самымъ проводитъ невидимыя связи между своимъ сознаніемъ и близкой человѣку природой и обстановкой. Примѣры, которые берутся изъ жизни, образуютъ въ своей суммѣ основанія для такихъ знаній, которыя не оторваны отъ жизни, но, наоборотъ, связаны съ нею.

Практичность въ этомъ смыслѣ прямо вытекаетъ изъ требованія природосообразности. Такъ какъ ученикъ является частью человѣческаго общества и въ то же время онъ — частица всей природы, его окружающей, то первоначальныя его представленія, съ которыми онъ является въ училище и которыя обильно, хотя бы и противъ его воли, входятъ въ его сознаніе уже въ школьный періодъ его жизни, образуютъ начальный матеріалъ, весьма пригодный, какъ основаніе обученія. Дидактика говоритъ: начинай учить отъ той ступени, на которой стоитъ ученикъ. Но ученикъ полонъ представленіями жизни, растительной и животной, неорганической и органической. Вотъ изъ этой-то жизни надо черпать матеріалъ для геометрическихъ работъ, тогда обученіе явится нагляднымъ, оно будетъ сообразовано съ жизнью дѣтей и, какъ покоющееся на реальныхъ примѣрахъ, будетъ отличаться въ замѣтной степени практичностью.

V. Необходимость измѣренія, черченія и вычисленія.

Геометрическіе элементы, которые представляются ученикамъ наглядно, т.-е. линіи, поверхности и тѣла, подлежатъ прежде всего измѣренію, затѣмъ усвоенныя представленія воспроизводятся при помощи черченія, и, наконецъ, простѣйшія отношенія между ними устанавливаются при помощи вычисленія. Въ этихъ процессахъ (измѣреніи, черченіи и вычисленіи) состоитъ первоначальная обработка геометрическихъ представленій, которая, сообразно съ законами психической жизни человѣка, предшествуетъ отвлеченному обобщенію и логическому доказательству.

Пользуясь выпиской изъ Лихтблау (стран. 47), мы скажемъ, что «новое направленіе въ методикѣ геометріи состоитъ въ томъ, что бы всю сумму геометрическихъ теоремъ выводить изъ задачъ».

Измѣреніе, какъ сравненіе геометрическаго протяженія съ соотвѣтствующей единицей, устанавливаетъ наиболѣе легкую связь между однородными протяженіями и является первымъ актомъ изученія протяженія, послѣ нагляднаго его воспріятія. Еще въ начальной школѣ на урокахъ ариѳметики дѣти научаются измѣренію линейному, а иногда также измѣренію площадей и объемовъ. Практика жизни опредѣленно удостовѣряетъ, что нерѣдко даже неграмотные люди умѣютъ производить измѣренія, хотя бы и въ приближенной формѣ. Исторія геометріи также указываетъ, что измѣрительныя работы предшествовали выработкѣ теоретическаго курса. Согласно тѣмъ же указаніямъ исторіи надо признать, что первоначальными измѣрительными приборами являются болѣе доступные и близкіе народу, хотя бы и менѣе удобные и точные. Поэтому и дѣти для первоначальныхъ измѣрительныхъ работъ могутъ пользоваться болѣе доступными мѣрами—аршинами съ вершками; затѣмъ, когда привыкнутъ къ нимъ, они начинаютъ примѣнять сажени, футы и дюймы; и только потомъ слѣдуетъ ввести знакомство съ метромъ и его частями.

Чтобы усвоеніе мѣръ было дѣйствительно хорошо, надо, чтобы учащіеся умѣли находить результатъ самостоятельно и безошибочно. Но этого мало. Представленіе протяженія, если оно запечатлѣлось въ сознаніи твердо и ясно, позволяетъ человѣку узнавать встрѣчающіяся вновь протяженія, опредѣлять ихъ величину. Отсюда вытекаетъ важное значеніе глазомѣрнаго опредѣленія геометрическихъ величинъ. Среди неграмотныхъ людей нерѣдко можно встрѣтить такихъ, которые умѣютъ довольно вѣрно опредѣлить на глазъ длину, площадь, объемъ. Это умѣнье довольно цѣнно, и его напрасно не развиваетъ школа; только отчужденностью отъ жизни и можно объяснить стремленіе школы замыкаться въ свои собственныя рамки. Но отчужденностью отъ жизни порождается, во-первыхъ, несоотвѣтствіе ученія природѣ учащихся. Во-вторыхъ, такими практически цѣнными навыками, какъ опредѣленіе протяженій на глазъ, отнюдь пренебрегать нельзя и по такой причинѣ: это то же, что устный счетъ въ ариѳметикѣ — онъ и практически важенъ, и развивающее его значеніе велико, такъ какъ онъ дополняетъ и совершенствуетъ счетъ письменный. Не особенно давно, лѣтъ сто тому назадъ, всю ариѳметику изучали на цифрахъ, и даже запрещалось ученикамъ производить какія бы то ни было вычисленія, и самыя легкія, устно — во избѣжаніе ошибокъ. Тогда, слѣдовательно, не обращали вниманія на способность представленія въ ариѳметикѣ, а теперь подобное видимъ въ отношеніи геометріи.

Дѣти довольно скоро и безъ труда пріобрѣтаютъ умѣнье глазомѣрно оцѣнивать протяженія. Ихъ живое воображеніе и впечатлительная память помогаютъ хорошо удерживать и быстро воспроизводить опредѣленныя по величинѣ протяженія; этимъ обусловливается возможность вѣрной глазомѣрной оцѣнки.

Кромѣ измѣренія линій, площадей и объемовъ слѣдуетъ намъ упомянуть еще объ измѣреніи угловъ. Углы мѣряются частями прямого угла. Сравнивать съ прямымъ угломъ можно уже вскорѣ послѣ начала занятій геометріей. Именно, въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ встрѣчается уголъ, равный половинѣ прямого; въ равностороннемъ треугольникѣ $= {}^2/_3$ прямого; при вершинѣ равносторонняго треугольника получается два угла по $^1/_3$ прямого (если проведемъ высоту); правильный шестиугольникъ имѣетъ уголъ въ $1^1/_3$ прямого. Эти и другіе подобные имъ примѣры очень умѣстны для того, чтобы пріучить дѣтей къ глазомѣрному приближенному опредѣленію величины угла въ доляхъ прямого. Умѣнье же это полезно и въ практическомъ отношеніи, и для рисованія, и для составленія вообще ясной картины прямого угла, его частей и измѣренія угловъ. И только тогда, когда дѣти попривыкнутъ при помощи глазомѣра или же при помощи прямого угла, изображаемаго прямоугольнымъ кускомъ бумаги, опредѣлять величину всякаго угла въ доляхъ прямого, для нихъ нетруденъ будетъ переходъ къ косвенному измѣренію угловъ при помощи дугъ. Если приготовить изъ бумаги кругъ, діаметромъ, напримѣръ, въ футъ, и попробовать отлиневать на немъ уголъ въ 1 граду
отдѣлить $^1/_{90}$ прямого угла, то увидимъ, что 2 стороны этого

угла у вершины почти сливаются; между тѣмъ соотвѣтствующая дуга въ 1° выдѣляется явственно. Тогда дѣтямъ нетрудно будетъ понять, что измѣреніе угловъ не такъ удобно, какъ измѣреніе дугъ. Но въ то же время они увидятъ, что транспортиръ въ сущности тотъ же кругъ, съ выемкой центральной части, и что на транспортирѣ очень легко получить углы въ 1°, 2°, 3° и т. д., мысленно проводя радіусы или даже вычерчивая ихъ на подложенной подъ транспортиръ бумагѣ.

Также и въ другихъ подобныхъ случаяхъ полезно слѣдовать генетическому методу объясненія, т.-е. излагать какой-либо способъ или обучать употребленію инструмента по отдѣльнымъ ступенямъ его развитія, начиная отъ примитивной формы и переходя къ болѣе усовершенствованной. Такого именно пути держаться можно при объясненіи, напримѣръ, эккера, астролябіи и т. п.

Подобно Эвклиду, автору системы, которая проводится въ нашихъ курсахъ геометріи среднихъ учебныхъ заведеній, всѣ греческіе геометры до Архимеда избѣгали измѣренія[1]), такъ какъ они имѣли въ виду строго разграничить курсъ логической геометріи съ курсомъ измѣренія и въ частности землемѣрія. Но вѣдь греческая геометрія предназначалась для юношей и мужей, искавшихъ чистой науки, любителей философіи; въ нашихъ же школахъ учатся дѣти, далекія отъ философіи, не имѣющія пока силъ отрѣшиться отъ наблюденія и опыта; въ большинствѣ же случаевъ наши дѣти не имѣютъ въ виду даже впослѣдствіи уйти въ высокія сферы формальной логики. Поэтому основы землемѣрія, подобно другимъ измѣрительнымъ работамъ, надо признать соотвѣтствующими потребностямъ начальной школы, психической природѣ дѣтей, приступающихъ къ изученію геометріи, и вообще начальному курсу геометріи. Мы здѣсь не подразумѣваемъ землемѣрія, какъ спеціальнаго предмета, но лишь тѣ свѣдѣнія изъ него, которыя доступны обучающимся геометріи и въ то же время пригодны для геометрическихъ обобщеній. Эти свѣдѣнія имѣютъ, въ большинствѣ случаевъ, также и практическую цѣнность.

Черченіе въ занятіяхъ начальной геометріей является довольно важнымъ дѣломъ. Благодаря черченію изучаемыя свойства усваи-

---

[1]) См. Кэджори, стран. 77.

ваются въ болѣе ясной и опредѣленной формѣ. Кромѣ того, строя чертежъ, учащіеся сами собой наталкиваются на новыя свойства, отчасти подмѣчаютъ ихъ и во всякомъ случаѣ пріобрѣтаютъ матеріалъ для дальнѣйшей работы.

Основные геометрическіе приборы — циркуль и линейка, но къ нимъ еще присоединяются наугольникъ и транспортиръ. Чтобы начинающимъ дѣтямъ яснѣе была видна сущность употребленія циркуля, полезно замѣнить его для первыхъ упражненій ниткой съ привязаннымъ на концѣ карандашомъ. Тогда останется только перейти отъ длины нитки къ разстоянію между ножками циркуля; можно для убѣдительности вычертить нѣсколько окружностей сперва ниткой, а потомъ и циркулемъ. При этомъ практическая подробность: къ концу нитки привязывать бы колечко, чтобы карандашъ двигался свободнѣе.

Въ самомъ началѣ занятій приходится, конечно, ограничиваться черченіемъ прямыхъ линій съ помощью линейки. Клѣтчатая или вообще графленая бумага окажетъ при этомъ замѣтную услугу. Къ начальнымъ же стадіямъ занятій принадлежитъ черченіе, соединенное съ вырѣзываньемъ. Учитель даетъ для образца квадратъ или прямоугольникъ, задаетъ ученикамъ вырѣзать такой же по образцу, а затѣмъ и начертить въ тетради равный. Само собой разумѣется, что, обратно, вычерчиваемыя фигуры могутъ вырѣзаться, съ тѣмъ чтобы на нихъ прослѣдить тѣ или другія свойства.

Въ дальнѣйшемъ слѣдуетъ требовать отъ дѣтей точныхъ и опрятныхъ чертежей. Тщательность работы въ этомъ случаѣ имѣетъ значеніе и для геометріи, такъ какъ на точномъ чертежѣ ярче выдѣляются геометрическія отношенія, и вообще для воспитательныхъ цѣлей, которыя ни въ какомъ случаѣ не могутъ въ школѣ оставаться въ пренебреженіи: тщательность и аккуратность работы требуется отъ всякаго дѣлового человѣка.

Къ точности и изяществу чертежей въ особенности можно приблизиться въ томъ случаѣ, если работы будутъ касаться различныхъ сочетаній прямыхъ и кривыхъ линій. Для начальнаго курса мы можемъ отмѣтить такія работы: a) змѣевидная линія, b) волнистая линія, c) спиральная линія, d) готическая дуга, e) сплюснутая дуга и т. п.[1]).

---

[1]) См., напр., A. Kriebel, Ausgangspunkte und Ziele des geometrischen Unterrichts in der mehrklassigen Volksschule. Изд. 1907, стран. 12—13.

Дѣти очень любятъ замысловатые, красивые чертежи; этой ихъ наклонностью съ успѣхомъ можно пользоваться для цѣлей обученія геометріи и для воспитательныхъ цѣлей. Самыми доступными задачами построенія надо признать такія: дѣленіе фигуръ на равныя части (квадрата, прямоугольника, параллелограмма) или же равновеликія (дѣленіе треугольника); превращеніе однѣхъ фигуръ въ другія, напр. параллелограмма въ прямоугольникъ, трапеціи въ параллелограммъ; построеніе правильныхъ фигуръ.

Черченіе въ данномъ масштабѣ должно быть отнесено во всякомъ случаѣ не къ первымъ ступенямъ начальнаго курса. Оно требуетъ пониманія числового отношенія и предполагаетъ, что по ариѳметикѣ уже дано понятіе объ отношеніяхъ и пропорціяхъ. Кромѣ того, десятичный масштабъ нельзя и разработать безъ того, чтобы не коснуться подобія фигуръ. Все это заставляетъ отложить ознакомленіе съ масштабомъ до второго года обученія геометріи. Но несомнѣнно, упражненія въ черченіи въ данномъ масштабѣ чрезвычайно полезны и обязательно должны практиковаться въ начальномъ курсѣ геометріи. Безъ нихъ также нельзя обойтись и въ преподаваніи географіи, такъ какъ понятіе о картѣ обусловливается примѣненіемъ масштаба.

Въ связи съ черченіемъ и измѣреніемъ находится рѣшеніе задачъ, относящихся къ начальному курсу геометріи, главнымъ образомъ задачъ на вычисленіе. Задачи всѣхъ видовъ служатъ не только упражненіемъ повторительнымъ, укрѣпляющимъ усвоенное, но онѣ также играютъ роль матеріала подготавливающаго, такъ какъ на рѣшеніи задачъ можно основывать выводъ многихъ геометрическихъ истинъ. Напримѣръ, если продѣлать нѣсколько разъ измѣреніе внутреннихъ угловъ треугольника и потомъ складывать полученныя величины, то нетрудно прійти къ выводу, что сумма угловъ треугольника — величина постоянная, содержащая 2 прямыхъ угла. Послѣ такого индуктивнаго доказательства, идущаго отъ нѣсколькихъ частныхъ примѣровъ къ общему заключенію, учащіеся почувствуютъ въ себѣ потребность и интересъ къ болѣе строгому дедуктивному доказательству, которое проводится въ общей формѣ и даетъ выводъ отъ общаго къ частному. Такимъ образомъ, рѣшеніемъ задачъ подготовляется почва для геометрическихъ теоремъ; это указано и выше въ цитатѣ изъ методики Пихтблау.

Къ упражненіямъ въ измѣреніи наиболѣе тѣсно примыкаютъ тѣ задачи, данныя для которыхъ добываются самими учениками при измѣрительныхъ работахъ. Много задачъ на вычисленіе и построеніе можно составить на основаніи величинъ, какія учащіеся имѣютъ предъ собой въ классной комнатѣ, на школьномъ дворѣ и въ окрестностяхъ школы. Вычисленіе площадей, составленіе плановъ въ масштабѣ, опредѣленіе объемовъ, простѣйшія работы по землемѣрію — все это можетъ дать обильный матеріалъ для геометрическихъ задачъ, притомъ матеріалъ доступный дѣтямъ, близкій ихъ сознанію, интересный и полезный[1]). Доступной работой является приготовленіе фигуръ и моделей по даннымъ размѣрамъ. Въ задачахъ этого вида совмѣстно встрѣчается и вычисленіе, необходимое для отысканія размѣровъ, и черченіе съ вырѣзываньемъ. Задачи эти тѣмъ хороши, что допускаютъ, въ большинствѣ случаевъ, наглядную провѣрку рѣшенія.

Для школъ съ краткимъ курсомъ приходится ограничиваться тѣми геометрическими вопросами, которые не требуютъ большой изобрѣтательности отъ дѣтей и являются слѣдствіемъ или частью опредѣленныхъ геометрическихъ положеній. Въ примѣръ приведемъ вычисленія площадей и объемовъ. Но, напримѣръ, задачи обратнаго характера, гдѣ по данной площади или объему и по нѣкоторымъ даннымъ размѣрамъ требуется опредѣлить неизвѣстный размѣръ, подходятъ болѣе къ школамъ съ достаточно свободнымъ временемъ, гдѣ упражненія возможно проработать болѣе разнообразныя и болѣе нуждающіяся въ смѣтливости дѣтей.

Къ числу такихъ работъ мы относимъ задачи съ округленіемъ данныхъ размѣровъ. Понятно, какъ велико практическое значеніе умѣнья вести быстро приближенныя вычисленія. Маляръ, штукатуръ, землекопъ, землевладѣлецъ, домовладѣлецъ часто нуждаются въ схематической, приблизительно вѣрной обработкѣ вопросовъ протяженія; разрабатывая проектъ и устанавливая приблизительную смѣту, они вовсе не ищутъ совершенно точныхъ вычисленій и довольствуются только общей оцѣнкой. Вотъ

[1]) Сравн. статью г.-я. Макарова въ «Русской Школѣ» II, 1909, гдѣ авторъ отождествляетъ начала геометріи съ сознательнымъ отношеніемъ къ плану зданія и умѣньемъ начертить его; совмѣстно съ этимъ черченіемъ пріобрѣтается и небольшой навыкъ къ мышленію въ области отвлеченныхъ понятій.

на такія-то задачи приближеннаго характера, въ виду ихъ практической важности, должна обратить непремѣнное вниманіе геометрія, если только она желаетъ считаться съ запросами и интересами учащихся.

Геометрическія вычисленія представляютъ собою шагъ впередъ сравнительно съ чисто ариѳметическими вычисленіями. Они образуютъ, такъ сказать, мостъ къ операціямъ алгебры. Дѣйствительно, въ геометріи возможны вычисленія, основанныя на комбинаціяхъ формулъ, встрѣчаются сокращенія, вытекающія изъ свойствъ формулъ. Поэтому весьма желательно, чтобы соотвѣтствующіе отдѣлы геометріи проходились уже въ то время, когда совершается переходъ отъ ариѳметики къ алгебрѣ, чтобы такимъ образомъ своимъ матеріаломъ алгебраическаго характера она облегчила учащимся этотъ переходъ.

Греческій идеализмъ исключалъ изъ геометріи всякія вычисленія, изъ боязни, что «эта благородная наука потеряетъ свою строгость и снизойдетъ до уровня геодезіи или землемѣрія[1]»). На это надо сказать, во-первыхъ, что во времена древнихъ грековъ ариѳметика была разработана значительно менѣе, чѣмъ въ настоящее время, что большинство даже учившихся математикѣ не владѣло искусствомъ производить умноженіе и дѣленіе и ограничивалось только сложеніемъ и вычитаніемъ; греки не имѣли разработанной десятичной системы; поэтому геометрія ихъ не могла разсчитывать на замѣтную помощь ариѳметики и предпочитала итти своимъ путемъ чисто геометрическихъ построеній, не обращая вниманія на вычисленія, на которыя пришлось бы тратить много силъ, безъ видимаго успѣха. Вторая причина, заставлявшая пренебрегать землемѣріемъ и вообще вычисленіемъ, заключалась въ томъ, что тогда просвѣщеніе не являлось народнымъ, но составляло удѣлъ немногихъ избранныхъ, которые гнушались прикладной наукой и искали чистой мудрости. Наше время не то: теперь идутъ рѣчи объ общедоступности народнаго образованія, о повсемѣстномъ обученіи дѣтей и о связи между наукой и жизнью. Теперь надо такъ расположить преподаваніе, чтобы оно соотвѣтствовало природѣ учащихся дѣтей и не противорѣчило жизненнымъ условіямъ. Поэтому въ наше время при занятіяхъ геометріей нечего и ду-

---

[1]) Кэджори, стран. 81.

мать объ исключеніи измѣренія и вычисленія, но слѣдуетъ всемѣрно заботиться, чтобы на измѣреніи и черченіи основать то самое зданіе логической геометріи, величественность и пользу котораго нельзя отвергать и по отношенію къ современнымъ намъ условіямъ.

Въ указанномъ отношеніи заслуживаетъ сочувствія среди учебниковъ для начальнаго преподаванія геометрія Страхова[1]). Въ ней собрано очень много (до 1000 №№) различныхъ упражненій, задачъ и приложеній геометріи. Этотъ матеріалъ вполнѣ можетъ быть использованъ не только для усвоенія пройденнаго, но главное для вывода изъ него геометрическихъ свойствъ. Точно также заслуживаетъ вниманія задачникъ Арженикова[2]), имъ можно воспользоваться при начальномъ обученіи для обоснованія курса геометріи.

VI. Постепенность въ образованіи геометрическихъ понятій.

Упражняясь въ разсмотрѣніи геометрическихъ протяженій, т.-е. тѣлъ, поверхностей и линій, дѣти сами собою, по свойству человѣческаго духа, приходятъ къ обобщеніямъ. Справедливо говоритъ Исаакъ Тэйлоръ: «ни на что душа человѣческая не бросается съ такимъ восторгомъ, какъ на обобщеніе или классификацію, послѣ того какъ успѣла накопить запасъ частностей, и ни отъ чего не отворачивается она съ большимъ отвращеніемъ въ своемъ первобытномъ состояніи ненаполненности».

Наполнена ли душа дѣтей, приступающихъ къ изученію геометріи, частностями, т.-е. представленіями? Бросается ли она съ восторгомъ на обобщеніе или классификацію? Нѣтъ. Отрицательный отвѣтъ подтверждается и педагогической психологіей, и авторитетнымъ свидѣтельствомъ серіозныхъ педагоговъ. Такъ, директоръ Гилле[3]) въ журналѣ, издаваемомъ профессорами Фрисомъ и Менге, на вопросъ: «соотвѣтствуетъ ли начальное обученіе геометріи по Эвклиду психологической дидактикѣ?» указываетъ, что «начальное обученіе планиметріи должно ве-

[1]) М. А. Страховъ, Краткій курсъ геометріи съ практическими примѣненіями. Изд. 7-е, 1908.

[2]) К. П. Аржениковъ, Сборникъ упражненій по геометріи. Пособіе для начальныхъ училищъ. Изд. 2-е, 1910.

[3]) См. «Журналъ Мин. Нар. Просв.», ноябрь 1905.

стись эвристическимъ методомъ, что надо отъ задачи переходить къ рѣшенію и въ концѣ концовъ къ формулировкѣ теоремъ; для успѣшнаго изученія геометріи требуется прохожденіе практическаго пропедевтическаго курса; начинать надо затѣмъ съ измѣренія поверхностей, идя отъ квадрата къ прямоугольнику и параллелограмму; здѣсь практически и наглядно можно сдѣлать много выводовъ».

Вотъ тотъ единственный правильный путь,—путь практическій и наглядный, который наталкиваетъ учащихся на обобщеніе и классификацію и даетъ возможность вести эту работу съ интересомъ.

Между тѣмъ въ настоящее время большинство программъ и учебниковъ по геометріи какъ бы пренебрегаетъ практическимъ приготовительнымъ курсомъ геометріи и, минуя частности, прямо беретъ обобщенія. Напримѣръ, одинъ изъ самыхъ распространенныхъ у насъ учебниковъ—геометрія Киселева «поражаетъ съ первой страницы, на которой ученику, приступающему къ изученію геометріи, трактуется о томъ, что во всякой математической наукѣ могутъ встрѣтиться слѣдующія предложенія: опредѣленія, аксіомы, теоремы и т. д.; еще не создано ни одного геометрическаго представленія и понятія, не разобрано ни одного предложенія, а ужъ на трехъ страницахъ говорится о зависимости между теоремами: прямой, обратной и противоположной. Преподавателю, начинающему со своими учениками геометрію, приходится самому вырабатывать и устанавливать нѣчто въ родѣ пропедевтическаго курса, подготовляющаго учениковъ къ воспріятію систематическаго курса Киселева[1])».

Гильбертъ (die Grundlagen der Geometrie) признаетъ неудачной попытку Эвклида замѣнить наглядное представленіе словесными опредѣленіями, которыя въ дѣйствительности оказываются безполезными при логическомъ построеніи геометріи[2]).

Между тѣмъ въ современномъ преподаваніи геометріи мы видимъ противоположное взгляду Гильберта: дѣло начинается со словесныхъ опредѣленій, въ самой слабой степени опирающихся на наглядныя представленія; обобщеніе опережаетъ собою естественный ростъ ума дѣтей, и понятія не успѣваютъ образовы-

---

[1]) По статьѣ Б. Б. Піотровскаго въ «Пед. Сборн.» май 1911.

[2]) По статьѣ прив.-доц. Бернштейна въ «Пед. Сборн.», февраль 1911.

ваться путемъ нормальнаго процесса, хотя и медленнаго, но вѣрнаго. Остается одинъ выходъ—замѣнять идеи словами и пониманіе механическимъ усвоеніемъ. Конечно, нѣкоторые способные учащіеся успѣваютъ наверстать пропущенное, заполнять пробѣлы въ представленіяхъ и элементарныхъ обобщеніяхъ, но большинству это не удается, и оно тяготится геометріей. Между тѣмъ еще Коменскій заповѣдалъ вести ученіе такъ, чтобы оно совершалось «легко, пріятно, основательно».

Еще свѣжа память о старинномъ преподаваніи ариѳметики, которое во многомъ напоминаетъ собою современное преподаваніе геометріи. Ариѳметику также начинали со словесныхъ опредѣленій, недоступныхъ дѣтямъ и мало опирающихся на представленія. Вотъ какъ начиналась ариѳметика лѣтъ сто тому назадъ: «Что называется величиною? все то, что можетъ измѣряться; какія бываютъ величины? извѣстныя и неизвѣстныя; что такое единица? единица есть извѣстная величина, съ которою сравниваются другія величины того же рода; что такое число? число есть показаніе, сколько разъ въ какой-нибудь величинѣ содержится единица того же рода; какія бываютъ числа? именованныя и простыя», и т. д.; среди вопросовъ есть такой: «въ чемъ состоитъ предметъ ариѳметики? разсматриваніе свойства чиселъ и разныя дѣйствія съ оными составляютъ предметъ ариѳметики» Начиная съ семидесятыхъ годовъ прошлаго столѣтія, начальное обученіе ариѳметикѣ освободилось отъ такого отвлеченнаго, схоластическаго изложенія, несоотвѣтствующаго способностямъ громаднаго большинства учащихся дѣтей. Въ настоящее время элементарной ариѳметикѣ учатъ, начиная со счета, при чемъ счетъ производится въ небольшихъ предѣлахъ, доступныхъ дѣтямъ, и совершается онъ на предметахъ или на задачахъ. Со словесныхъ опредѣленій и раздѣленій никто теперь не думаетъ начинать ариѳметику, такъ какъ понятія должны вырабатываться изъ представленій путемъ обобщенія, а не предшествовать представленіямъ: общее должно итти за частнымъ, а не предшествовать ему. Ариѳметикѣ посчастливилось въ отношеніи методической разработки гораздо болѣе, чѣмъ геометріи, и это объясняется ближе всего большей распространенностью ариѳметическихъ знаній въ школахъ и въ народѣ, сравнительно съ геометрическими. Вспоминая, съ какимъ трудомъ вводились въ свое время улучшенія въ преподаваніи ариѳметики и сколько препятствій разнаго рода они встрѣчали, мы черпаемъ въ этомъ воспоминаніи надежду, что дѣло геометріи также увѣнчается успѣхомъ, и начальный ея курсъ будетъ поставленъ въ соотвѣтствіе съ духовной природой учащихся дѣтей.

Средства для усовершенствованія преподаванія даются въ достаточной степени лучшими педагогами. Къ сказанному выше относительно послѣдовательной переработки геометрическихъ представленій въ понятія мы можемъ добавить ссылку на Песталоцци. Въ 1803 г. онъ издалъ сочиненіе «*ABC* наглядности, или наглядное ученіе объ отношеніяхъ мѣръ», гдѣ онъ даетъ большое число упражненій съ прямой линіей и квадратомъ. Руководящими принципами Песталоцци были: полученіе всѣхъ выводовъ изъ наглядности, доступность учебнаго матеріала, расположеніе матеріала по ступенямъ. Фребель въ своихъ заботахъ о первоначальномъ образованіи установилъ правильный взглядъ, что фундаментъ геометрическаго ученія закладывается еще въ дошкольный періодъ жизни ребенка, слѣдовательно дѣти гораздо ранѣе составленія отвлеченныхъ понятій перерабатываютъ массу сырого матеріала въ видѣ реальныхъ фактовъ. Подобныя работы Фребель вводитъ уже въ дѣтскія игры, и среди такъ называемыхъ «Даровъ Фребеля» встрѣчаются кубики, призмы, шаръ и т. д.

Дистервегъ показалъ лучше, чѣмъ кто-либо другой, какими путями возможно проходить въ живой формѣ такой матеріалъ, который самъ по себѣ, повидимому, не дѣйствуетъ на душевный складъ и волю, какими путями возможно пробуждать въ дѣтяхъ интересъ и одушевленіе, захватывая всѣ душевныя способности. По Дистервегу, никакихъ заглавій впередъ давать не надо, учить ничего не слѣдуетъ (учить — въ смыслѣ воспринимать, затверживать и передавать) слѣдуетъ искать и находить. И это относится въ одинаковой мѣрѣ къ измѣреніямъ, вычисленіямъ и построеніямъ, также и къ доказательствамъ.

Итакъ, изъ фактическаго матеріала учащіеся дѣти извлекаютъ геометрическія обобщенія.

Прибавимъ еще нѣсколько частныхъ замѣчаній относительно аксіомъ и опредѣленій.

Аксіомы — это истины, не требующія доказательствъ. Но это не значитъ, чтобы онѣ не требовали и поясненія, и нагляднаго выраженія. Уже словесная форма выраженія нѣкоторыхъ аксіомъ представляетъ для дѣтей затрудненіе. Всѣ знаютъ поговорку: «вѣрно, какъ дважды два четыре», но вѣдь начинающіе учиться ариѳметикѣ не убѣждены въ безусловной истинности того, что дважды два четыре.

Опыты и наблюденія надъ дѣтьми и людьми малограмотными прекрасно доказываютъ, что у нихъ, обыкновенно, нѣтъ яснаго и раздѣльнаго представленія прямой линіи: если простого человѣка заставить провести длинную прямую борозду или разостлать длинный коверъ по прямой линіи, то онъ не выдержитъ прямого направленія и покривитъ. Такимъ образомъ, основное геометрическое представленіе является у такихъ людей нетвердымъ. Можно указать еще нѣсколько примѣровъ такого же рода. Люди, недостаточно зрѣлые умственно, сомнѣваются, дѣйствительно ли отъ точки до прямой можетъ быть только одно кратчайшее разстояніе: отчего бы не существовать имъ нѣсколькимъ; почему между вѣрнымъ заключеніемъ и невѣрнымъ не можетъ быть средняго, такъ сказать, почти вѣрнаго, или почему не можетъ быть положенія неизвѣстности; почему при доказательствѣ отъ противнаго нелѣпость заключенія свидѣтельствуетъ о невѣрности предположенія. Всѣ подобные примѣры побуждаютъ насъ не оставлять безъ вниманія геометрическихъ аксіомъ, но пояснять ихъ наглядно или же аналогіей, или же параллельностью съ другими сродными имъ истинами.

Вопросъ о геометрическихъ аксіомахъ, какъ истинахъ очевидныхъ, представляется спорнымъ иногда и для математиковъ. Приведемъ примѣры. Нѣкоторые древніе критики отрицали очевидность того, что прямая линія можетъ быть равной по длинѣ кривой; въ частности, что существуетъ прямая линія, по длинѣ своей равная окружности. Эвклидъ основываетъ равенство между линіями на ихъ совпаденіи. Но такъ какъ никакая кривая линія и даже никакая ея часть не могутъ быть приведены къ точному совпаденію съ прямой линіей и даже ни съ какой частью прямой, то нельзя никоимъ образомъ сравнивать по длинѣ кривой линіи съ прямой. Исходя изъ принятыхъ Эвклидомъ положеній, нельзя даже доказать, что периметръ описаннаго многоугольника больше, чѣмъ окружность. Нѣкоторые писатели, умалчивая о томъ, прибѣгаютъ къ наблюденію: они видятъ, что это такъ[1]). Самъ Эвклидъ прибѣгаетъ въ нѣкото-

[1]) Кэджори, стран. 81—82.

рыхъ случаяхъ вмѣсто логики къ интуиціи (усмотрѣнію) для познаванія извѣстныхъ фактовъ. Возможно, что и въ будущемъ, какъ и въ прошломъ, въ наиболѣе распространенныхъ элементарныхъ руководствахъ будетъ приниматься на вѣру, въ качествѣ вещей очевидныхъ, гораздо болѣе истинъ, чѣмъ у Эвклида[1]).

Остается сказать нѣсколько словъ о геометрическихъ опредѣленіяхъ. Для начальнаго курса будутъ слишкомъ трудными вполнѣ научныя опредѣленія, не говоря уже о чисто философскихъ, въ родѣ, напр., опредѣленія Пиѳагора, что точка есть единица въ положеніи. Для начальнаго курса вполнѣ возможно допустить *описаніе* понятій[2]). Это значитъ вотъ что. Разсматривая какую-нибудь геометрическую фигуру, напр. квадратъ (или вообще геометрическое протяженіе), ученикъ описываетъ признаки, которые онъ замѣчаетъ: стороны попарно параллельны, углы всѣ прямые, стороны равны между собою. *Указаніе признаковъ замѣнитъ собою опредѣленіе.* При этомъ нельзя считать ошибкой, что будутъ указаны признаки и несущественные или что одинъ и тотъ же признакъ будетъ упоминаться неоднократно въ различныхъ формахъ. Все это можно допустить, лишь бы только не указывались признаки, которыхъ нѣтъ въ данномъ протяженіи; привести же въ систему, отдѣлить существенное отъ несущественнаго — это дѣло послѣдующаго курса геометріи.

VII. Доступность геометрическихъ выводовъ и доказательствъ.

Въ предшествующемъ изложеніи намѣченъ тотъ рядъ нормальныхъ ступеней, подвигаясь по которому учащійся дойдетъ отъ первоначальнаго усвоенія геометрическихъ представленій до общихъ понятій, а затѣмъ перейдетъ къ обработкѣ этихъ понятій, т.-е. къ выводу истинъ и къ доказательству ихъ. Если мышленіе ученика расширяется и укрѣпляется нормально, то-есть согласно съ требованіями психической природы человѣка, то переходъ отъ представленій къ понятіямъ и отъ понятій къ заключеніямъ не явится отяготительнымъ, наоборотъ — вы-

---

1) Кэджори, стран. 310.

2) Heilmann, Handbuch der Pädagogik. II. Band. Der Unterricht in der Raumlehre. 1909. 8-е изд., стран. 213.

воды и доказательства будутъ доступны для учащихся. Важно здѣсь установить безспорный фактъ, что начинать геометрію прямо съ доказательствъ — невозможно; фактъ этотъ подтверждается справками какъ психологическаго, такъ и историческаго характера. Дѣйствительно, когда человѣкъ чувствуетъ нужду въ доказательствѣ? Когда онъ сомнѣвается въ истинности какого-либо положенія. Но что значитъ сомнѣваться? Это значитъ имѣть въ сознаніи два параллельныхъ мнѣнія, относящихся къ одной темѣ и противорѣчащихъ другъ другу. Такимъ образомъ, состояніе сомнѣнія является такимъ, при которомъ человѣкъ имѣетъ мнѣніе (т.-е. понятіе о чемъ-либо), да и не одно, а нѣсколько. И вотъ учитель, прежде чѣмъ приступить къ доказательствамъ, обязанъ снабдить ученика мнѣніями, относящимися къ темѣ и освѣщающими вопросъ съ разныхъ точекъ зрѣнія. Если ученикъ испытываетъ въ такомъ случаѣ сомнѣніе, то онъ тѣмъ самымъ приводится къ необходимости доказательства и не только не тяготится разработкой, напр., геометрическихъ доказательствъ, но самъ стремится къ выясненію истины, такъ какъ примиреніе противорѣчій, объединеніе противоположныхъ мнѣній составляетъ коренную потребность человѣческой психики, и наоборотъ, непримиренность противоположныхъ взглядовъ на одинъ и тотъ же предметъ доставляетъ человѣку довольно мучительное ощущеніе неудовлетворенности, раздвоенія.

Такимъ образомъ, прежде чѣмъ приступать съ учениками къ геометрическимъ доказательствамъ, надо утвердить въ ихъ сознаніи необходимость и возможность доказательствъ; надо, чтобы ученики почувствовали въ себѣ потребность доказательствъ и поняли, что истина можетъ быть выведена не только нагляднымъ путемъ, но и отвлеченнымъ, логическимъ.

Историческія справки убѣждаютъ насъ, что доказательства въ геометріи давались сперва далеко не въ точной формѣ, и лишь съ теченіемъ времени, по мѣрѣ разработки предмета, они систематизировались и отдѣлывались. Индусскіе математики, напр., не имѣли обыкновенія давать доказательства въ строгой формѣ. Это потому, конечно, что они еще не ощущали потребности въ совершенно точныхъ доказательствахъ.

Итакъ, переходя отъ понятій къ доказательству теоремъ, учитель добивается того, чтобы ученики почувствовали потребность въ доказательствахъ и поняли ихъ возможность. Въ виду этого нельзя начинать съ теоремъ, почти не возбуждающихъ сомнѣнія или же допускающихъ непосредственное воспріятіе, такъ что истинность ихъ видна съ перваго взгляда. Напримѣръ, нераціонально ставить одной изъ первыхъ теорему о равенствѣ прямыхъ угловъ, такъ какъ это равенство усматривается непосредственно, не возбуждаетъ въ учащихся сомнѣнія и не вынуждаетъ ихъ искать доказательства. По Дистервегу, болѣе всего пригодны для первоначальныхъ занятій такія теоремы, которыя, во-первыхъ, не содержатъ многихъ допущеній и, во-вторыхъ, даютъ нѣсколько путей для вывода. Самымъ доступнымъ для начинающихъ методомъ доказательства является методъ наложенія: онъ наиболѣе близокъ къ работѣ съ наглядными пособіями. Дѣти, напримѣръ, съ интересомъ убѣдятся въ томъ, что параллелограммъ равновеликъ прямоугольнику, если у нихъ одинаковыя основанія и высоты; они на глазъ не могутъ увѣриться въ этой равновеликости, она возбуждаетъ сомнѣніе въ нихъ; поэтому является потребность въ доказательствѣ, и эта потребность удовлетворяется наиболѣе доступнымъ методомъ, именно методомъ наложенія.

Какъ въ начальномъ курсѣ геометріи, такъ и въ курсѣ среднихъ учебныхъ заведеній нельзя считать правильнымъ порядокъ чистой дедукціи, когда учитель даетъ отъ себя заглавіе теоремы и на долю учениковъ оставляетъ только ея доказательство. Этимъ значительная часть работы отнимается отъ учениковъ и передается учителю. Между тѣмъ для учениковъ весьма полезно было бы еще до доказательства сдѣлать попытку вывести извѣстное свойство путемъ индукціи, т.-е. обработкою своихъ наблюденій, глазомѣрной оцѣнкой, сопоставленіемъ съ другими подобными свойствами. Однимъ словомъ, при изученіи геометріи весьма важно не только доказывать опредѣленныя и установленныя истины, но также искать и находить, изобрѣтать и открывать истины. Если учитель будетъ имѣть это въ виду, то тогда получится польза и для изощренія мышленія учениковъ вообще и для развитія практическаго ума въ особенности.

Дѣйствительно, упражненія въ выводахъ и доказательствахъ даютъ болѣе ограниченное развитіе, чѣмъ если къ нимъ присоединится еще работа установленія, открытія истинъ: тогда получится болѣе обширный рядъ сравненій и различеній, болѣе энергичное примѣненіе синтеза и анализа, также приложеніе индуктивнаго и дедуктивнаго метода. Съ практической точки зрѣнія умѣнье находить истины имѣетъ несомнѣнную цѣнность: для человѣка даже важнѣе искусство открывать истины, чѣмъ доказывать готовыя. Поэтому вполнѣ надо слѣдовать совѣту Дистервега и не ограничивать изученія геометріи только выводомъ истинъ[1]), но присоединять къ этому также и установленіе ихъ. Дистервегъ совѣтуетъ даже смотрѣть на всякую теорему прежде всего, какъ на задачу, т.-е. искать въ теоремѣ не только способа рѣшенія, но и самаго рѣшенія. Вѣдь не даются же ученикамъ въ задачахъ готовые отвѣты, и не спрашивается съ нихъ только путь, которымъ отыскиваются данные отвѣты! Если ученикъ, прочитавши задачу (напримѣръ ариѳметическую), сейчасъ же смотритъ въ отвѣтъ и по отвѣту старается найти способъ рѣшенія, то учитель относится къ такой работѣ неодобрительно; и это совершенно справедливо, потому что, подгоняя рѣшеніе къ отвѣту, ученикъ не можетъ использовать въ полной мѣрѣ своей сообразительности и вредитъ своей самодѣятельности. Но не то же ли самое мы видимъ въ преподаваніи геометріи, не та ли же ошибка повторяется? Во главѣ теоремы ставится, напр., такъ: «сумма внутреннихъ угловъ треугольника равна 2d», или: «діагонали ромба взаимно перпендикулярны». Вѣдь это, въ сущности, готовые отвѣты на задачи, и ученикамъ остается подогнать рѣшеніе къ отвѣту. Гораздо полезнѣе ограничиться постановкой вопроса: сколькимъ прямымъ равна сумма внутреннихъ угловъ треугольника? каковы свойства діагоналей ромба? По этимъ вопросамъ ученики стараются достигнуть вывода, и при этомъ ихъ наблюдательность, соображеніе и иниціатива проявятся гораздо болѣе, чѣмъ если сразу дать заглавіе теоремы.

Вообще при разработкѣ теоремъ начальнаго курса нельзя ограничиться единственно синтетическимъ методомъ, принятымъ въ руководствахъ для среднихъ учебныхъ заведеній. Во-первыхъ, въ нѣкоторыхъ случаяхъ онъ можетъ оказаться недоступнымъ для дѣтей. Затѣмъ, отъ примѣненія различныхъ способовъ и методовъ изощряется сообразительность: въ дополненіе къ синтетическому методу мы можемъ рекомендовать аналитическій, въ простѣйшей его формѣ, и сверхъ того генетическій. Послѣдній особенно удобенъ для начальнаго курса геометріи, и пре-

[1]) Данныхъ или готовыхъ.

имущественно въ тѣхъ выводахъ и опредѣленіяхъ, которые касаются образованія угловъ и видовъ угловъ, образованія круга, шара, цилиндра и конуса.

Что касается примѣненія различныхъ способовъ при разработкѣ геометрическаго матеріала, то золотое правило даетъ Керъ: «лучше одну теорему разработать десятью способами, чѣмъ десять теоремъ однимъ способомъ». Это правило можетъ относиться ко всѣмъ выводамъ и задачамъ. Дѣйствительно, когда вопросъ разрабатывается нѣсколькими способами, то онъ освѣщается гораздо всестороннѣе, и понятіе о немъ составляется болѣе полное; кромѣ того, изъ массы способовъ всякій ученикъ съ удобствомъ выберетъ тотъ, который болѣе всего ему доступенъ; наконецъ, послѣ разработки ряда теоремъ нѣсколькими способами ученики могутъ настолько окрѣпнуть, что будутъ въ послѣдующихъ теоремахъ примѣнять уже свои способы. Существуетъ возраженіе противъ такого разнообразія способовъ: на это уходитъ много времени, а время надо беречь. Но Керъ очень остроумно опровергаетъ: «если вы такъ жалѣете время, то лучше всего совсѣмъ не преподавать геометріи, тогда времени сбережется гораздо больше; если же преподавать ее, то надо вести дѣло въ соотвѣтствіи съ требованіями дидактики». Дистервегъ придаетъ такое важное значеніе придумыванію учениками способовъ доказательствъ, что отодвигаетъ на второй планъ заглавія теоремъ. Онъ говоритъ такъ. При помощи изученія геометріи ученикъ долженъ научиться думать и продуманное выражать ясно, увѣренно и умѣло. Не важно то, помнитъ ли онъ въ каждый данный моментъ всѣ тѣ теоремы, при помощи которыхъ онъ развивалъ свои душевныя силы; хотя надо сказать, что при хорошемъ прохожденіи курса теоремы запомнятся сами собой. Поставленная цѣль будетъ достигнута, если во время изученія геометріи ученикъ пріобрѣтетъ умѣнье разрабатывать математическіе вопросы, а равно и вообще всѣ такіе вопросы, которые опираются на способность мышленія и выраженія.

Въ начальномъ курсѣ геометріи не можетъ быть и рѣчи о полной строгости доказательствъ. Все, что не выводится простыми заключеніями, должно быть выпущено изъ начальнаго курса. Ему мѣсто въ курсѣ систематическомъ, образцы котораго мы имѣемъ въ настоящее время въ среднихъ учебныхъ заведеніяхъ и который въ общихъ чертахъ слѣдуетъ Эвклиду. Но «старинная Эвклидова метода не приспособлена для начинающихъ учиться геометріи, не можетъ возбудить въ малолѣтнемъ ученикѣ живого интереса; во всемъ свѣтѣ можно встрѣтить учениковъ, скучающихъ на урокахъ геометріи, когда ихъ ведутъ съ завязанными глазами по лабиринтамъ логическихъ доказательствъ; цѣлыми часами они созерцаютъ спину учителя, проводящаго на черной классной доскѣ бѣлыя линіи»[1]). Раумеръ въ Geschichte der Pädagogik говоритъ, что въ качествѣ элементарнаго руководства Эвклидовы Начала должны быть совершенно отвергнуты[2]). И далѣе: самъ Эвклидъ, вѣроятно, никогда не предназначалъ своихъ Началъ для начинающихъ. Такимъ образомъ, самъ собою возникаетъ вопросъ о необходимости особаго подготовительнаго курса геометріи въ тѣхъ учебныхъ заведеніяхъ, гдѣ по программѣ слѣдуетъ проходить курсъ систематическій, приближающійся по строгости доказательствъ и вообще по обработкѣ матеріала къ Эвклиду. Какъ систематикъ, Эвклидъ хорошъ, но учебникомъ, который былъ бы доступенъ начинающему, трудъ Эвклида служить не можетъ. «На первыхъ ступеняхъ обученія геометріи совсѣмъ не можетъ быть возбуждаемъ вопросъ о строгости доказательствъ, такъ какъ таковая все равно останется непонятой и незамѣченной учениками. Съ этой точки зрѣнія замѣна одного пріема доказательства другимъ, какъ будто болѣе строгимъ, является совершенно несущественной[3]).

VIII. Примѣненіе эвристическаго метода.

Еще съ древнихъ временъ для геометріи считался особенно умѣстнымъ эвристическій методъ. Примѣръ эвристическаго метода, принадлежащій Сократу, приведенъ у Платона: доказать, что для полученія двойной площади квадрата слѣдуетъ построить квадратъ на діагонали даннаго, а не на двойной сторонѣ его. Въ честь Сократа и методъ иногда называется со-

---

[1]) Керъ, Практическая геометрія. 10-е изд., 1910. (Kehr, Praktische Geometrie).

[2]) Кэджори, стран. 308.

[3]) Б. Б. Піотровскій въ «Педаг. Сборн», V, 1911.

кратическимъ. Особенное значенiе ему придавалъ и разработалъ его Дистервегъ. Въ «Путеводителѣ» Дистервега содержится такой примѣръ пользованiя эвристическимъ методомъ. «Что углы при основанiи равнобедреннаго треугольника равны между собою, это ученикъ узнаетъ наглядно. Если же ему придется искать доказательства, то онъ долженъ прежде всего опредѣленно разграничить данное съ искомымъ въ данной теоремѣ. Онъ долженъ ясно сознать, что предположенiемъ слѣдуетъ воспользоваться для доказательства. Послѣ этого отмѣчается, что равенство 2 данныхъ угловъ доказать возможно, и притомъ съ помощью равныхъ сторонъ треугольника. Далѣе идетъ самый важный пунктъ, въ которомъ вспоминаютъ о теоремахъ, въ которыхъ выводится равенство двухъ угловъ; такимъ путемъ ученики узнаютъ средства, примѣненiемъ которыхъ можно достигнуть поставленной цѣли. Въ обыкновенныхъ системахъ геометрiи есть только одна теорема, соотвѣтствующая поставленнымъ условiямъ, именно та, что 2 треугольника совпадаютъ, если имѣютъ равнаго по 2 стороны и по углу, заключенному между ними. Изъ этой теоремы слѣдуетъ, что углы въ равныхъ треугольникахъ, лежащiе противъ равныхъ сторонъ, равны между собою. Такимъ образомъ ученики должны усмотрѣть, что искомое доказательство требуетъ построенiя 2 треугольниковъ, которые по другимъ основанiямъ съ примѣненiемъ выше поставленнаго допущенiя равны между собою и въ которыхъ упоминаемые въ вопросѣ углы лежатъ противъ равныхъ сторонъ.

Когда ученики все ясно поняли, теорему—какъ предположенiе и заключенiе, цѣль и средства, то тогда, значитъ, учитель сдѣлалъ все, что онъ обязанъ былъ сдѣлать, онъ далъ полную возможность примѣнить эвристическiй методъ. Теперь дѣло за учениками; теперь онъ предоставляетъ ихъ собственному мышленiю, всякаго самому себѣ. Каждый теперь знаетъ, что ему надо дѣлать, и какими средствами можно достигнуть того, что ему задано. Но опредѣленнаго пути для построенiя треугольниковъ ученикъ еще не знаетъ: онъ ему не данъ, его еще надо найти. Если же учитель указалъ бы впередъ построенiе и предоставилъ бы ученикамъ выполнить построенiе и усвоить, то геометрiя этимъ была бы лишена своего настоящаго образовательнаго влiянiя. Для учениковъ гораздо важнѣе узнать путь доказательства, чѣмъ само доказательство».

Далѣе Дистервегъ говоритъ: «методъ обученія такъ же важенъ, какъ и учебный матеріалъ; сила учителя заключается въ его методѣ». По словамъ Кера, теоремы, содержаніе которыхъ ученикъ такъ же мало понимаетъ, какъ не можетъ онъ вникнуть въ доказательства, необходимость и возможность которыхъ для него неясна, ни въ какомъ случаѣ не могутъ возбудить въ ученикахъ любознательности; учитель думаетъ за своихъ учениковъ и тѣмъ усыпляетъ ихъ внимательность. Все это зависитъ отъ неправильнаго метода.

Какъ и выше сказано, всякая теорема должна разсматриваться, какъ задача для учениковъ; если ученики затрудняются въ рѣшеніи такой теоремы-задачи, то учитель долженъ дать намекъ. Напримѣръ, построить треугольникъ по 3 сторонамъ. Намекъ здѣсь будетъ состоять въ томъ, что одна линія опредѣляетъ уже двѣ вершины треугольника, и дѣло стоитъ только за отысканіемъ 3-ей вершины, которая должна принадлежать остальнымъ 2 сторонамъ.

Необходимымъ условіемъ эвристическаго метода и, можно сказать, его сущностью является самодѣятельность учащихся. По словамъ Канта («О педагогикѣ», § 75, изд. Тихомирова), «душевныя силы культивируются лучше всего тогда, когда дѣлаютъ сами все то, что хотятъ сдѣлать; великимъ вспомогательнымъ средствомъ для пониманія служитъ собственное воспроизведеніе: всего основательнѣе изучается и всего лучше удерживается то, что выучишь самъ собой».

Въ настоящее время эвристическій методъ, основанный на самодѣятельности учащихся, съ наибольшимъ успѣхомъ примѣняется во многихъ американскихъ школахъ. В. Джемсъ въ «Бесѣдахъ съ учителями о психологіи» (переводъ съ англ. Громбаха, стран. 2) говоритъ: «обычный въ американскихъ школахъ методъ преподаванія, развившійся изъ стараго американскаго метода заучиванія наизусть, съ одной стороны, исключаетъ недостатки лекціоннаго метода, который преобладаетъ въ Германіи и Шотландіи и при которомъ слишкомъ мало принимаются во вниманіе особенности каждаго отдѣльнаго слушателя, съ другой — онъ свободенъ и отъ недостатковъ англійской системы обученія которая, кажется, слишкомъ часто требуетъ, чтобы личность преподавателя приносилась въ жертву личности каждаго учащагося».

IX. Точность и опредѣленность геометрическаго языка.

Языкъ является дѣйствительнымъ средствомъ для того, чтобы приводить наши мысли въ систему, обрабатывать нашъ психическій матеріалъ. Ясность и точность языка предполагаетъ ясность и точность мыслей. Слово есть могучій рычагъ въ дѣлѣ пріученія къ логичности, геометрія же, несомнѣнно, выдѣляется среди другихъ предметовъ начальнаго курса именно своей пригодностью для развитія логичности. Въ виду этого преподаватель геометріи долженъ обращать особенное вниманіе на точность и опредѣленность геометрическаго языка.

Полной точности отъ начинающихъ учиться геометріи требовать нельзя. Умѣнье выражаться математически точно, подобно другимъ полезнымъ умѣніямъ, приходитъ не сразу, но растетъ одновременно съ развитіемъ умственныхъ силъ ученика. Заучиваньемъ готовыхъ формулъ, хотя бы и точно выраженныхъ, большой помощи оказать нельзя; гораздо лучше допустить нѣкоторую свободу попытокъ, примѣненіе самодѣятельной работы усовершенствованія языка. Слѣдовательно, въ начальныхъ стадіяхъ геометрическаго ученія необходимо допустить, чтобы ученики выражались и не совсѣмъ точно, но непремѣнно съ достаточнымъ смысломъ; въ дальнѣйшемъ же, благодаря помощи учителя и благодаря накопленію геометрическихъ знаній, языкъ будетъ совершенствоваться постепенно и безъ отягощенія для учениковъ: усиленіемъ логичности усилится потребность и возможность точности выраженій.

Слѣдуетъ оттѣнить то обстоятельство, что нѣкоторыя подробности въ словесномъ выраженіи геометрическихъ свойствъ имѣютъ свою характерную окраску по традиціи, внѣ зависимости отъ существа дѣла; напр., сущность геометріи вовсе не требуетъ, чтобы теоремы выражались тяжелымъ языкомъ, съ массой придаточныхъ предложеній, въ особенности условныхъ. Точно также и опредѣленія возможно выражать болѣе легкимъ и изящнымъ слогомъ, чѣмъ это дѣлается въ большинствѣ современныхъ учебниковъ. Теоремы сложнаго характера, состоящія изъ нѣсколькихъ теоремъ, необходимо расчленять на составныя части, въ видахъ болѣе легкаго словеснаго выраженія ихъ, въ особенности для начинающихъ.